تحليل التباين الأحادي One Way ANOVA

تحليل التباين الأحادي (مستوى واحد) :-

هو طريقة لاختبار معنوية الفرق بين المتوسطات لعدة عينات بمقارنة واحدة، ويعرف أيضاً بطريقة تؤدي لتقسيم الاختلافات الكلية لمجموعة من المشاهدات التجريبية لعدة أجزاء للتعرف على مصدر الاختلاف بينها ولذا فالهدف هنا فحص تباين المجتمع لمعرفة مدى تساوى متوسطات المجتمع.

ولكن لا بد من تحقيق ثلاثة أمور قبل استخدامه وهي:

١ - العينات عشوائية ومستقلة.
٢ - مجتمعات هذه العينات كلاً لها توزيع طبيعي.
٣ - تساوي تباين المجتمعات التي أخذت منها العينات العشوائية المستقلة.

ولتوضيح ما سبق بمقارنة متوسطات ثلاث مجتمعات باستخدام ثلاث عينات (تحقق فيها الشروط الثلاثة السابقة) موضحة بالجدول الآتي:

مثال (1) : -

إذا كان لدينا ثلاث منتجات لإحدى الشركات الصناعية ، وتم تقييمها من قبل مجموعة من المستهلكين وحصلنا على النتائج التالية :

المنتج (1) X_1	المنتج (2) X_2	المنتج (3) X_3
7	4	2
10	6	2
10	7	3
11	9	7
12	9	6
50	35	20

المطلوب: هل هناك فروق ذات دلالة بين المنتجات الثلاثة ؟

الحل :-

- وضع فرض العدم والفرض البديل.

صياغة الفرضية الصفرية كالتالي:

$$H0: {}_1\mu = {}_2\mu = {}_3\mu$$

في حين تفترض الفرضية البديلة التالي :

متوسطان على الأقل غير متساويين :HA

- تحديد مستوى الدلالة (α): وتحدد مستويات المعنوية سلفاً وهي عادة 0.05 أو 0.01
- حساب إحصائية الاختبار (F) وذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:-

المنتج (1) X_1		المنتج (2) X_2		المنتج (3) X_3	
X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2
7	49	4	16	2	4
10	100	6	36	2	4
10	100	7	49	3	9
11	121	9	81	7	49
12	144	9	81	6	36
50	514	35	263	20	102

- ✓ المتوسط الحسابي لـ X_1 = $\overline{X} = \frac{50}{5} = 10$
- ✓ المتوسط الحسابي لـ X_2 = $\overline{X} = \frac{35}{5} = 7$
- ✓ المتوسط الحسابي لـ $X3$ = $\overline{X} = \frac{20}{5} = 4$

١ - مجموع المربعات الكلي = Total Sum of Squares

$$Total..SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{(n_g)(k)} = 879 - \frac{(105)^2}{15} = 144$$

حيث ng تعني عدد أفراد المجموعة المحددة و k تعني عدد المجموعات موضع الدراسة.

٢ - مجموع المربعات بين المجموعات = Between Sum of Squares

$$Between..SS = \sum \frac{(\sum X_g)^2}{n_g} - \frac{(\sum X)^2}{(n_g)(k)} = \frac{(50)^2}{5} + \frac{(35)^2}{5} + \frac{(20)^2}{5} - \frac{(105)^2}{15} = 90$$

- ✓ مجموع المربعات داخل المجموعات = Within Sum of Squares

٣ -مجموع المربعات داخل المجموعات =*Within SS*

= مجموع المربعات الكلي – مجموع المربعات بين المجموعات

= 144-90=54

✓ نحسب درجات الحرية:

درجات الحرية بين المجموعات Between groups

degrees of freedom

$$(K-1)=3-1=2$$

درجات الحرية داخل المجموعات Within groups

degrees of freedom

$$(nK-K)=15-3=12$$

درجات الحرية الكلية Total degrees of freedom

$$(nK-1)=15-1=14$$

✓ التباين بين المجموعات أو ما يسمى متوسط المربعات بين المجموعات Between mean square =

$$Beween..groups..mean..square=\frac{Between..SS}{K-1}$$

$$Beween..groups..mean..square=\frac{90}{2}=45$$

✓ التباين داخل المجموعات أو ما يسمى متوسط المربعات داخل المجموعات Within mean square =

$$Within..groups..mean..square=\frac{Within..SS}{(n-K)}$$

$$Within..groups..mean..square=\frac{54}{12}=4.5$$

✓ قيمة F =

$$F=\frac{Between..groups..mean..square}{Within..groups..mean..square}=\frac{45}{4.5}=10$$

✓ نقوم بعد ذلك بتفريغ ما تم الحصول عليه من معلومات في جدول تحليل التباين كالتالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات Means	قيمة F
بين المجموعات Between groups	90	2	45	10
داخل المجموعات Within groups	54	12	4.5	
الكلي (المجموع) Total	144	14		

بالرجوع إلى جدول توزيع *F* نجد أن القيمة الحرجة لـ *F* بدرجات حرية للبسط تساوي 2 ودرجات حرية للمقام تساوي 12 وباستخدام مستوى= 0.05 نجد أن القيمة الحرجة تساوي 3.88

وحيث أن القيمة المحسوبة لـ *F* = 10 وهي بالتالي أكبر من القيمة الحرجة المجدولة، نستنتج أن الفرضية الصفرية تكون مرفوضة، أي يوجد اختلاف بين متوسطي مجتمعين على الأقل من المجتمعات التي قيّمة من المستهلكين ولمعرفة بين أي من المنتجات تكون الفروق ينبغي علينا اللجوء إلى أسلوب المقارنات المتعددة Multiple Comparisons .

مثال (2) : -

قام أحد الباحثين بتفريغ ما تم الحصول عليه من معلومات في جدول تحليل التباين كالتالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجات الحرية df	متوسط المربعات Means	قيمة F
بين المجموعات Between groups	200	10	.....	.....
داخل المجموعات Within groups	.....	.....	....	
الكلي (المجموع) Total	250	20		

قيمة إحصائي الاختبار F تساوي :-

أ - 10
ب - 5
ج - 80

(د) لا شيء مما سبق

من خلال مقارنة قيمة إحصائي الاختبار بقيمة حدود منطقتي القبول والرفض (إذا علمت أن قيمة F الجدولية تساوي 6.88) يمكن :-

أ - قبول الفرض البديل .
ب - قبول الفرض العدمي .
ج - عدم قبول أي من الفرضين .
د - لا شيء مما سبق

مثال (3) : -

إذا كانت لدينا البيانات التالية والتي تمثل بيانات أربع مجموعات تم استطلاع آراؤها حول موضوع ما:

A	B	C	D
8	4	5	6
7	3	3	5
9	6	4	6
5	5	5	4
6	2	3	3
7	7	2	4
42	27	22	28

المطلوب:

هل هناك فروق بين آراء هذه المجموعات الأربع ولصالح من هذا الفرق؟

الحل :-

- **وضع فرض العدم والفرض البديل.**

صياغة الفرضية الصفرية كالتالي:

H0: μ1 = μ2 = μ3 = μ4

في حين تفترض الفرضية البديلة التالي :

HA: متوسطان على الأقل غير متساويين

- **تحديد مستوى الدلالة (α): وتحدد مستويات المعنوية سلفاً وهي عادة إما 0.05 أو 0.01 وليكون α = 0.05**
- **حساب إحصائية الاختبار (F) وذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:**

✓ **نجمع قيم كل متغير للحصول على $\sum X$ لكل متغير .**

✓ **نربع كل درجة في كل متغير للحصول على X^2 لكل متغير .**

✓ **نجمع قيم مربع كل درجة للحصول على $\sum X^2$ لكل متغير .**

✓ **نربع مجموع كل متغير للحصول على $(\sum X)^2$ لكل متغير .**

✓ **نحسب متوسط كل متغير من خلال العلاقة :** $\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$

	A	A^2	B	B^2	C	C^2	D	D^2	
	8	64	4	16	5	25	6	36	
	7	49	3	9	3	9	5	25	
	9	81	6	36	4	16	6	36	
	5	25	5	25	5	25	4	16	
	6	36	2	4	3	9	3	9	
	7	49	7	49	2	4	4	16	
	42		27		22		28		119
		304		139		88		138	669
	1764		729		484		784		3761
	42/6= 7		27/6 =4.5		22/6 =3.7		28/6 =4.7		

١ - مجموع المربعات الكلي Total Sum of Squares =

$$Total..SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{(n_g)(k)} = 669 - \frac{(119)^2}{24} = 669 - 590.042 = 78.958$$

٢ - مجموع المربعات بين المجموعات =

$$\text{Between SS} = \sum \left[\sum \frac{(\sum X_g)^2}{n_g} \right] - \frac{(\sum X)^2}{n.k}$$

$$= \frac{(42)^2 + (27)^2 + (22)^2 + (28)^2}{6} - 590.042 = 36.8$$

٣ - مجموع المربعات داخل المجموعات *Within SS* =

= مجموع المربعات الكلي – مجموع المربعات بين المجموعات

42.1 = 36.8 – 78.9 =

ثم نقوم بعمل جدول تحليل التباين كالتالي:

Source of Variance	SS	d f	MS	F	$f_{0.05,3,20}$
بين المجموعات	SST – SSW = 36.8	K – 1 = 4 – 1 = 3	12.264	5.818	3.10
داخل المجموعات	42.1	K(n – 1) = 4(6 – 1) = 20	2.108		
TOTAL	78.958	Kn – 1 = 24 – 1 = 23			

قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية (5.818 > 3.1) فالمتوسطات غير متساوية ، أي قبول الفرض البديل القائل بعدم تساوي المتوسطات .

مثال (4) : -

للمقارنة بين أربعة أنواع من القمح (A ، B ، C ، D) بغرض تعميم أفضلها في الزراعة تم زراعة كل نوع في حوض تجريبي بحيث كانت الأحواض الأربعة متماثلة في الخصوبة ونوع التربة وكميةالأسمدة المستعملة ومنسوب المياه ودرجة الحرارة وكانت إنتاجية الفدان من كل نوع كما يلي :-

D	C	B	A
2	7	6	1
6	8	5	3
4	6	7	5

المطلوب :-

اختبار معنوية الفروق بين الأنواع الأربعة من القمح بدرجة ثقة 95% .

الحل :-

Ho : $\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$

H1 : $\mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D$

عدد المجموعات k = 4

عدد مفردات المجموعة الواحدة n = 3

العدد الكلى للمفردات = 3 × 4 = 12

	A	A^2	B	B^2	C	C^2	D	D^2	
	1	1	6	36	7	49	2	4	
	3	9	5	25	8	64	6	36	
	5	25	7	49	6	36	4	16	
$\sum X$	9		18		21		12		60
$\sum X^2$		35		110		149		56	350
$(\sum X)^2$	81		324		441		144		990
$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$	9 /3 =3		18/3=6		21/3=7		12/3=4		

١ - مجموع المربعات الكلي = Total Sum of Squares

$$Total..SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{(n_g)(k)} = 350 - \frac{(60)^2}{12} = 350 - 300 = 50$$

٢ - مجموع المربعات بين المجموعات =

$$\text{Between SS} = \sum \left[\sum \frac{(\sum X_g)^2}{n_g} \right] - \frac{(\sum X)^2}{n.k}$$

$$= \frac{(9)^2 + (18)^2 + (21)^2 + (12)^2}{3} - 300 = 30$$

٣ - مجموع المربعات داخل المجموعات ***Within SS*** =

= مجموع المربعات الكلي – مجموع المربعات بين المجموعات

= 50 - 30 = 20

ثم نقوم بعمل جدول تحليل التباين كالتالي:

Source of Variance	SS	d f	MS	F	$f_{0.05,3,8}$
بين المجموعات	SST – SSW = 30	K – 1 = 4 – 1 = 3	10	4	4.07
داخل المجموعات	20	K(n – 1) = 4(3 – 1) = 8	2.5		
TOTAL	50	Kn – 1 = 12 – 1 = 11			

قيمة Fالمحسوبة أقل من قيمة F الجدولية (4 < 4.07) فالمتوسطات متساوية

أي قبول الفرض العدمي القائل بتساوي المتوسطات ، وعلى ذلك فلا توجد فروق معنوية بين متوسطات إنتاجية الفدان للأنواع الأربعة من القمح والفروق الموجودة بينهم ترجع إلى عوامل الصدفة .

مثال (5) : -

طبقت ثلاثة برامج مختلفة للتدريب على ثلاث مجموعات من اللاعبين : الأولى تضم أربعة أفراد و الثانية تضم ستة أفراد و الثالثة تضم خمسة أفراد و في نهاية فترة التدريب أجرى لهم اختبار وكان عدد الأهداف المسجلة لكل لاعب كما يلي :-

البرنامج الأول	البرنامج الثاني	البرنامج الثالث
5	6	7
6	2	6
7	4	8
6	5	9
	3	5
	4	

اختبر ما إذا كانت هناك فروقاً معنوية بين برامج التدريب الثلاث بمستوى معنوية 5% .

الحل : -

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H1 : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

عدد المجموعات k = 3

العدد الكلى للمفردات = 4 + 6 + 5 = 15

	A	A^2	B	B^2	C	C^2	
	5	25	6	36	7	49	
	6	36	2	4	6	36	
	7	49	4	16	8	64	
	6	36	5	25	9	81	
			3	9	5	25	
			4	16			
$\sum X$	24		24		35		83
$\sum X^2$		146		106		255	507
$(\sum X)^2$	576		576		1225		2377
$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$	24 /4 =6		24/6=4		35/5=7		

١ - مجموع المربعات الكلي Total Sum of Squares =

$$Total..SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{(n_g)(k)} = 507 - \frac{(83)^2}{15} = 507 - 459.267 = 47.73$$

٢ - مجموع المربعات بين المجموعات =

$$\text{Between SS} = \sum\left[\sum \frac{(\sum X_g)^2}{n_g}\right] - \frac{(\sum X)^2}{n.k}$$

$$= \left(\frac{(24)^2}{4} + \frac{(24)^2}{6} + \frac{(35)^2}{5}\right) - 459.267 = 25.73$$

٣ - مجموع المربعات داخل المجموعات *Within SS* =

= مجموع المربعات الكلي – مجموع المربعات بين المجموعات

= 47.73 – 25.73 = 22

ثم نقوم بعمل جدول تحليل التباين كالتالي:

Source of Variance	SS	d f	MS	F	$f_{0.05,2,12}$
بين المجموعات	25.73	2	12.865	7.018	3.89
داخل المجموعات	22	12	1.833		
TOTAL	47.73	14			

قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية (7.18 > 3.89) فالمتوسطات غير متساوية

أي قبول الفرض البديل القائل بعدم تساوي المتوسطات مما يعنى وجود فروق معنوية بين برامج التدريب الثلاثة وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال (6) : -

في تجربة لمقارنة 3 مجموعات تحتوى كل منها على 5 مفردات حصلنا على النتائج التالية :-

مجموع المربعات الكلي = 176

مجموع المربعات بين المجموعات = 104

المطلوب :-

١ - اختبار معنوية الفروق بين متوسطات المجتمعات التي سحبت منها العينات بمستوى معنوية5% .
٢ - إذا أظهر الاختبار وجود فروق معنوية بين المتوسطات فالمطلوب تحليل معنوية هذه الفروق.

الحل :-

$$Ho : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$

$$H1 : \mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C \neq \mu_D$$

عدد المجموعات k = 3

عدد مفردات المجموعة الواحدة n = 5

العدد الكلى للمفردات = 3 × 5 = 15

مجموع المربعات الكلي = 176

مجموع المربعات بين المجموعات = 104

مجموع المربعات داخل المجموعات = 176 – 104 = 72

ثم نقوم بعمل جدول تحليل التباين كالتالي:

Source of Variance	SS	d f	MS	F	$f_{0.05,2,12}$
بين المجموعات	104	2	52	8.67	3.89
داخل المجموعات	72	12	6		
TOTAL	176	14			

قيمة F المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية (8.67 > 3.89) فالمتوسطات غير متساوية

أي قبول الفرض البديل القائل بعدم تساوي المتوسطات .