جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

التحليل الإحصائي

أستاذ المقرر

د/ محمد زايــد

المحاضرة (4)

تابع ... المتغيرات العشوائية

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

ذكرنا في ما سبق أن المتغير العشوائي المستمر أو المتصل هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عددا لانهائيا من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا، ويقع في المدى ***(a,b)***، أي أن:

$$\{X = x : a < x < b\}$$

فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى ***(a,b)***.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

.

- ❑ يرمز لدالة الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي المتصل بالرمز ***f(x)*** ويطلق عليها دالة كثافة الاحتمال ***(p.d.f)*** **Probability Density Function**

- ❑ ويقال أن الدالة **f(x)** هي دالة كثافة احتمال لمتغير متصل إذا تحقق الشرطان التاليان:

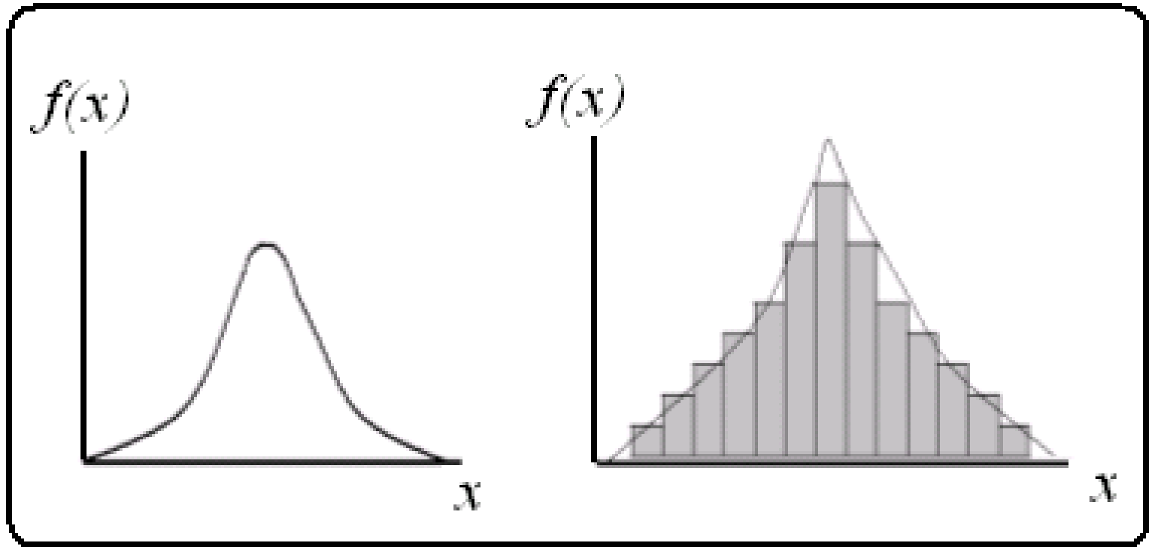
1. $f(x) \geq 0$ **f(x) موجبه**

2. $\int \ f(x) = 1$ **(كامل المساحة تحت المنحنى = 1)**

$$\int_a^b f(x) = 1$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

وعند تمثيل بيانات المتغير الكمي المتصل في شكل مدرج تكراري نسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المتصل، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المتصل، كما هو مبين بالشكل التالي:



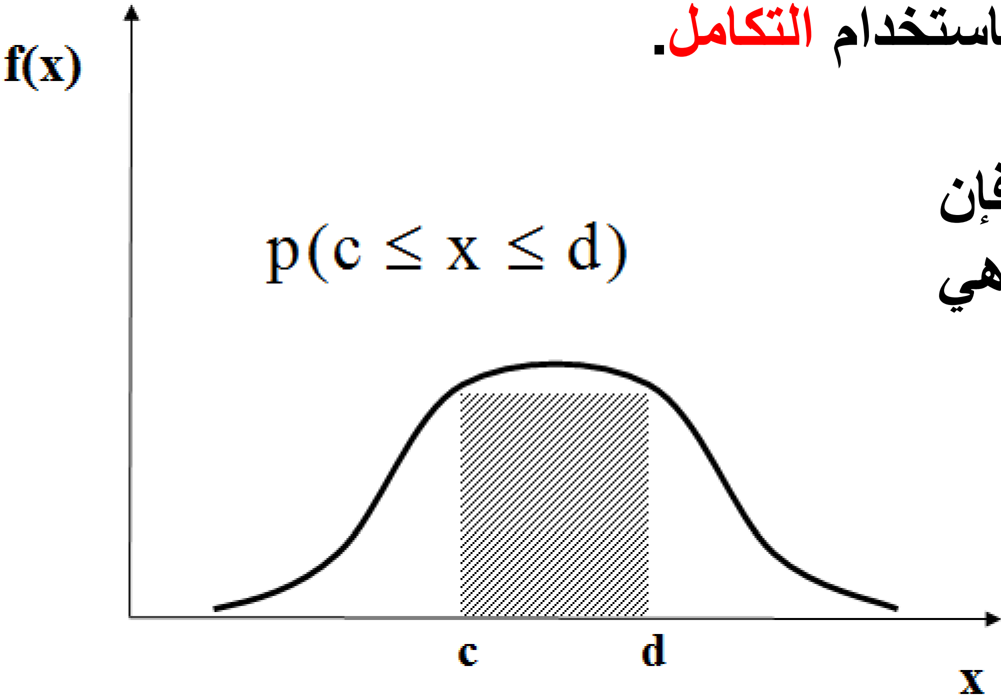
وبفرض أن المتغير العشوائي المتصل يقع في المدى $[a,b]$ ، فإن المساحة أسفل منحنى الدالة f(x) بين النقطتين a وb تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

- ويكون احتمال أن تقع قيمة المتغير العشوائي المتصل بين أي نقطتين $[c,d]$ هو:

$$P(c \le X \le d)$$

ويعبر عن الاحتمال السابق بالمساحة أسفل منحنى الدالة f(x) والواقعة بين النقطتين c وd. وتحسب المساحات تحت المنحنى باستخدام التكامل.



- ولأي متغير عشوائي متصل (X) فإن احتمال أن تكون قيمة هذا المتغير هي نقطة محددة x يساوي الصفر، أي أن:

$$P(X = x) = 0 \quad , x \in X$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

قواعد التكامل المحدود:

1. $\int a\,dx = a\ x$

2. $\int dx = x$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

4. $\int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

مثال (1):

إذا كان X متغير عشوائي دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le x \le 2$$

احسب الاحتمالات التالية:

1. P (0.5 < x < 1.5)
2. P (x > 0.25)
3. P (x < 0.75)
4. P (x = 1.5)
5. P (x > 2)

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

1) P(0.5 < x < 1.5) = $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$

$$= \int_{0.5}^{1.5} \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \,\Big|_{0.5}^{1.5}$$

$$= \frac{1}{2}(1.5 - 0.5) = 0.5$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

تابع الحل:

2) P(x > 0.25) = $\int_{0.25}^{2} f(x)\, dx$

$$= \int_{0.25}^{2} \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \,\Big|_{0.25}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} (2 - 0.25) = 0.875$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

تابع الحل:

3) P(x < 0.75) = $\int_0^{0.75} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{0.75} \left(\frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x \,\Big|_0^{0.75}$$

$$= \frac{1}{2} (0.75 - 0) = 0.375$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

تابع الحل:

4) $P(x = 1.5) = 0$ (الاحتمال عند أي نقطة يساوي صفر)

5) $P(x > 2) = 0$ (القيم أكبر من 2 تقع خارج مجال الدالة)

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

مثال (2):

هل الدوال التالية هي دوال كثافة احتمال لمتغير متصل؟

$$1)\ f(x) = \frac{1}{3}, \qquad 0 \le x \le 3$$

$$2)\ f(x) = \frac{2}{5}, \qquad 1 \le x \le 2$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

نتحقق من شروط دالة كثافة الاحتمال.

$$1)\ f(x) = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le 3$$

- الشرط الأول محقق (قيم الدالة موجبة)
- الشرط الثاني (مجموع الاحتمالات):

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}\right) dx = = \frac{1}{3} x \,\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(3-0) = 1$$

∴ الدالة هي دالة كثافة احتمال.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

نتحقق من شروط دالة كثافة الاحتمال.

$$2)\ f(x) = \frac{2}{5},\ 1 \le x \le 2$$

- الشرط الأول محقق (قيم الدالة موجبة)
- الشرط الثاني (مجموع الاحتمالات):

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{5}\right) dx = = \frac{2}{5} x \,\Big|_1^2 = \frac{2}{5}(2-1) = 0.4 \neq 1$$

∴ الدالة ليست دالة كثافة احتمال.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

❑ التوقع والتباين للمتغير العشوائى المتصل:

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X ، حيث $a < x < b$ ، فإن معادلة القيمة المتوقعة والتباين يمكن كتابتها كما يلي:

(القيمة المتوقعة) $$\mu = E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

(التباين) $$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

حيث $$E(X^2) = \int_a^b x^2\, f(x)\, dx$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

مثال (3):

احسب التوقع والتباين للمتغير العشوائي X الذي له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \qquad 0 \le x \le 3$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

$$E(X) = \int x\, f(x)\, dx$$ (القيمة المتوقعة)

$$= \int_0^3 x \left(\frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^3 x \ dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1.5\right.$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$ (التباين)

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \left(\frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^3 x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 3\right.$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

مثال (4):

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لأوزان الرسائل (بالجرام) التي تنقلها إحدى شركات البريد معطاه على النحو التالي:

$$f(x) = 0.003\,x^2, \qquad 0 < x < 10$$

أوجد:

1) احتمال أن يزيد وزن الرسالة عن 7 جرامات.

2) القيمة المتوقعة لوزن الرسالة.

3) الانحراف المعياري لوزن الرسالة.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

1) P(x > 7) = $\int_{7}^{10} f(x)\,dx$

$$= \int_{7}^{10} (0.003\,x^2)\,dx$$

$$= 0.003\,\frac{x^3}{3}\,\Big|_{7}^{10}$$

$$= 0.003\,\left(\frac{10^3}{3} - \frac{7^3}{3}\right) = 0.657$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

الحل:

$$E(X) = \int x\, f(x)\, dx \quad \text{(القيمة المتوقعة)}$$

$$= \int_0^{10} x\,(0.003\, x^2)\, dx$$

$$= 0.003 \int_0^{10} x^3\, dx$$

$$= 0.003\, \left(\frac{x^4}{4}\,\Big|_0^{10}\right) = 0.003\, \left(\frac{10^4}{4}\right) = 7.5$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)\,dx$$ (الجزء الأول في صيغة حساب التباين)

$$= \int_0^{10} x^2(0.003\,x^2)\,dx$$

$$= 0.003 \int_0^{10} x^4\,dx$$

$$= 0.003\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^{10}\right) = 0.003\left(\frac{10^5}{5}\right) = 60$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$ (التباين)

$$= 60 - (7.5)^2 = 3.75$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3.75} \approx 1.94$$ (الانحراف المعياري)

تمّت

بحمد الله