جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

التحليل الإحصائي

أستاذ المقرر

د/ محمد زايــد

المحاضرة (6)

توزيعات إحصائية متصلة خاصة

التوزيع الطبيعي:

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي لها دوال كثافة احتمال محددة ومنها:

- التوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي (القياسي) المعياري
- توزيع t

ويعتبر التوزيع الطبيعي Normal Distribution من أكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع .

والتوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، وهو جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي .

التوزيع الطبيعي

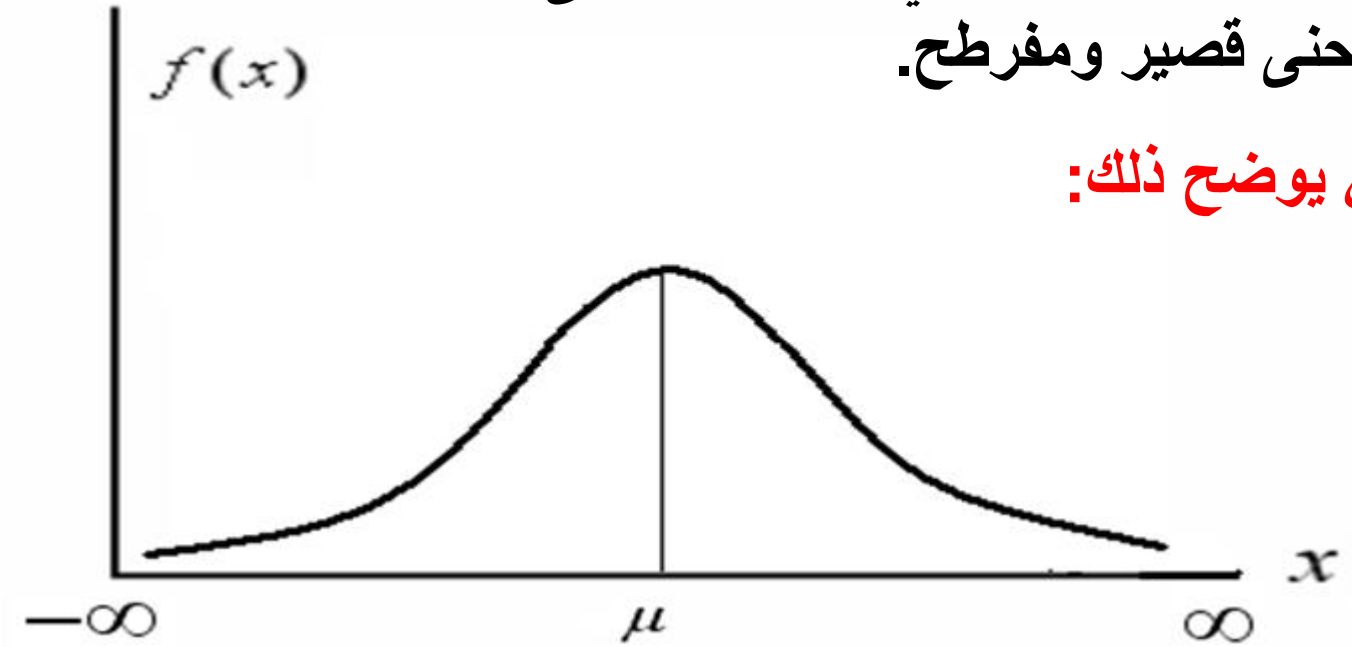
خصائص التوزيع الطبيعي:

- منحنى التوزيع له شكل ناقوسي أو جرسي (أي يشبه الجرس).
- متماثل حول المتوسط ، بمعنى أن الجزء الذي على يمين المتوسط مطابق للجزء الأيسر
- التوزيع الطبيعي له وسط ووسيط ومنوال واحد وكلها متساوية القيمة.
- التوزيع معتدل ، بمعنى أن الالتواء (الاطراف) والتفلطح (القمة) يساوي صفر.
- الذيلين الايمن والايسر يقتربان من الخط الافقي ولكن لا يلامسانه
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد صحيح

التوزيع الطبيعي

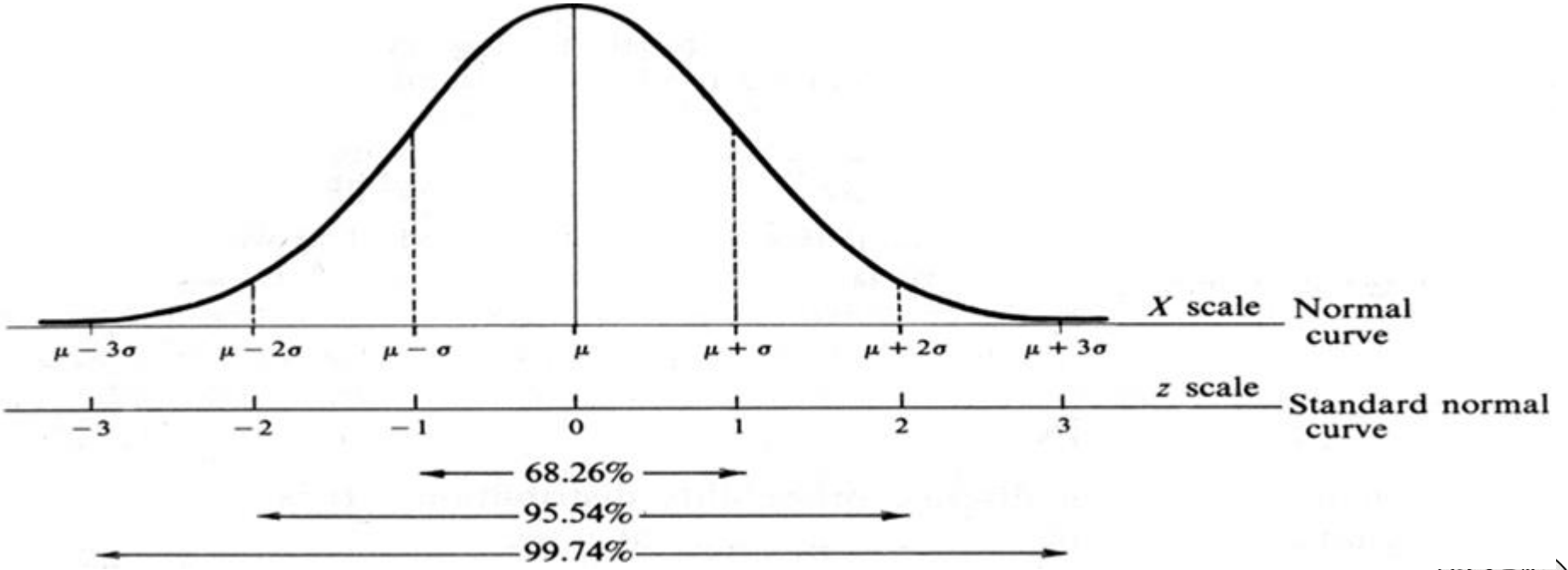
- يتحدد شكل منحنى التوزيع الطبيعي تماماً بمعلومية قيمتين هما الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع.
- تدل قيمة μ على مكان مركز المنحنى، كما تدل σ على كيفية الانتشار.
- القيمـــــة الصغـــيرة لـــ σ تعني أن لدينا منحنى طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لها تعني أن المحنى قصير ومفرطح.

والشكل التالي يوضح ذلك:



التوزيع الطبيعي

- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6827
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد إنحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9545
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9973



التوزيع الطبيعي

معالم التوزيع الطبيعي:

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $\boldsymbol{E(X) = \mu}$ والتباين : $\boldsymbol{Var(X) = \sigma^2}$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز : $\boldsymbol{X \sim N(\mu,\sigma^2)}$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ ، وتباين $\boldsymbol{\sigma^2}$.

التوزيع الطبيعي

شكل دالة كثافة الاحتمال:

إذا كان لدينا توزيع طبيعي ذو وسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال تكون على الصورة التالية:

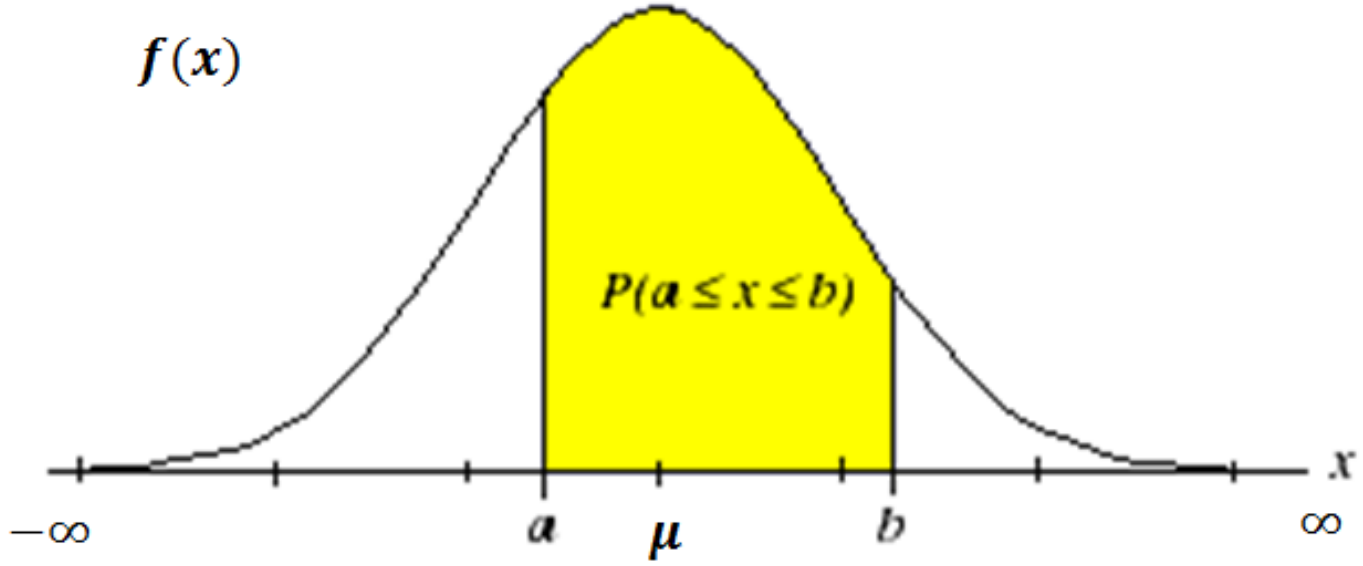
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < \infty, \qquad \pi = 22/7$$

التوزيع الطبيعي

كيفية حساب الاحتمالات:

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(a < X < b)$ وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



التوزيع الطبيعي

وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيون إلى عمل تحويلة رياضية يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات.

التوزيع الطبيعي

حساب الاحتمالات : (التوزيع الطبيعى القياسى)

نلاحظ من الخصائص السابقة للتوزيع الطبيعي أن شكل التوزيع يختلف مع اختلاف المتوسط والتباين ، ولتسهيل حساب الاحتمالات فقد أعد الإحصائيون جدولا خاصا لحساب الاحتمالات المتعلقة بالتوزيع الطبيعي وذلك في حالة واحدة فقط هي عندما تكون قيمة μ تساوي الصفر وقيمة σ تساوي واحد ، ويطلق على التوزيع في هذه الحالة «التوزيع الطبيعي القياسي».

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي (Z)

إذا كان: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن: $Z \sim N(0, 1)$

حيث:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ويطلق على القيمة (z) قيمة قياسية أو معيارية.

ولحساب أي احتمالات تخص التوزيع الطبيعي يجب أولا تحويل القيم إلى قيم قياسية أو معيارية ثم الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب الاحتمالات.

التوزيع الطبيعي القياسي

مثال 1

إذا كانت لدينا مجموعة من درجات الحرارة خلال شهر مارس هى 30, 33, 35, 40, 42
وإذا علم أن درجات الحرارة خلال هذا الشهر لها توزيع طبيعى بتوقع رياضى مقداره 35 وانحراف معيارى 2. أوجد القيم المعيارية (القياسية) لدرجات الحرارة المعطاة.

الحل

بفرض أن X يمثل درجات الحرارة خلال شهر مارس

$\mu = 35$, $\sigma = 2$, $Z = (X-35)/2$

1. $X = 30 \Rightarrow Z = (30-35)/2 = (-5)/2 = -2.5$
2. $X = 33 \Rightarrow Z = (33-35)/2 = (-2)/2 = -1$
3. $X = 35 \Rightarrow Z = (35-35)/2 = (0)/2 = 0$
4. $X = 40 \Rightarrow Z = (40-35)/2 = (5)/2 = 2.5$
5. $X = 42 \Rightarrow Z = (42-35)/2 = (7)/2 = 3.5$

التوزيع الطبيعي القياسي

مثال 2

إذا كان Z متغيرا عشوائيا توزيعه هو التوزيع الطبيعي المعياري. احسب الاحتمالات الآتية:

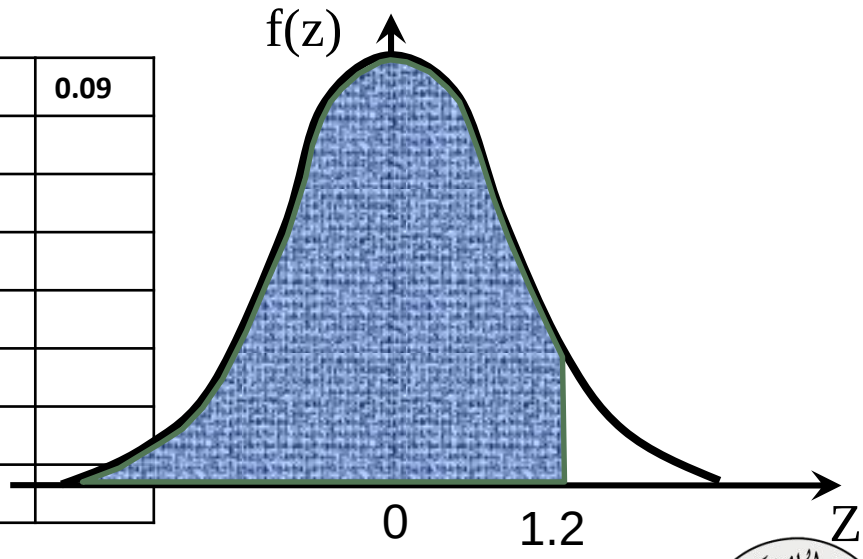
1. $P(Z < 1.2)$ 2. $P(Z < -0.11)$ 3. $P(0.32 < Z < 1.24)$

الحل

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة تحت المنحنى ويتم إيجاد هذه المساحة (الاحتمال) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

1. $P(Z < 1.2) = 0.8849$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1									
0.2									
1.2	.8849					.8944			



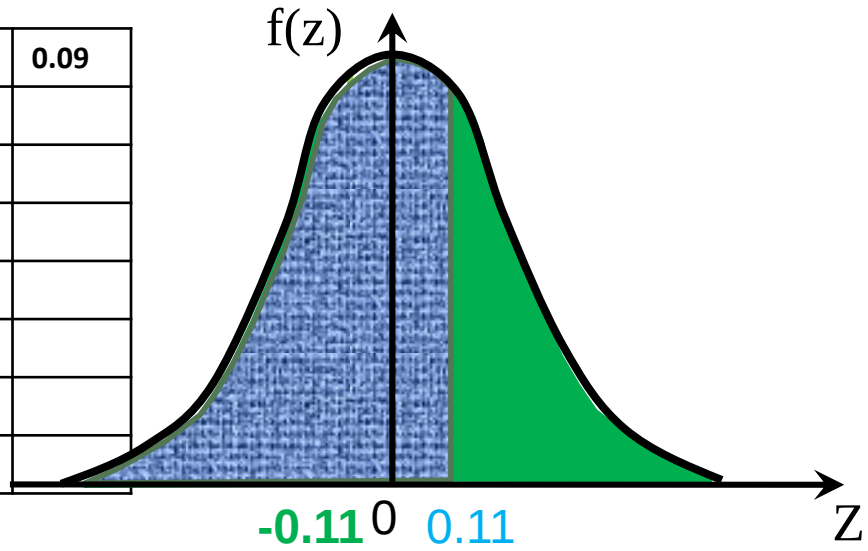
التوزيع الطبيعي القياسي

2. P(Z < -0.11) = 1 - P(Z < 0.11)

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الخضراء يسار المنحنى وهى تساوى المساحة الخضراء يمين المنحنى وبالتالي فهي تساوى المساحة الكلية تحت المنحنى (تساوى الواحد) مطروحا منها المساحة الزرقاء (من الجدول)

2. P(Z < -0.11) = 1 - P(Z < 0.11) = 1 – 0.5438 = 0.4562

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
1.2	.8849					.8944			



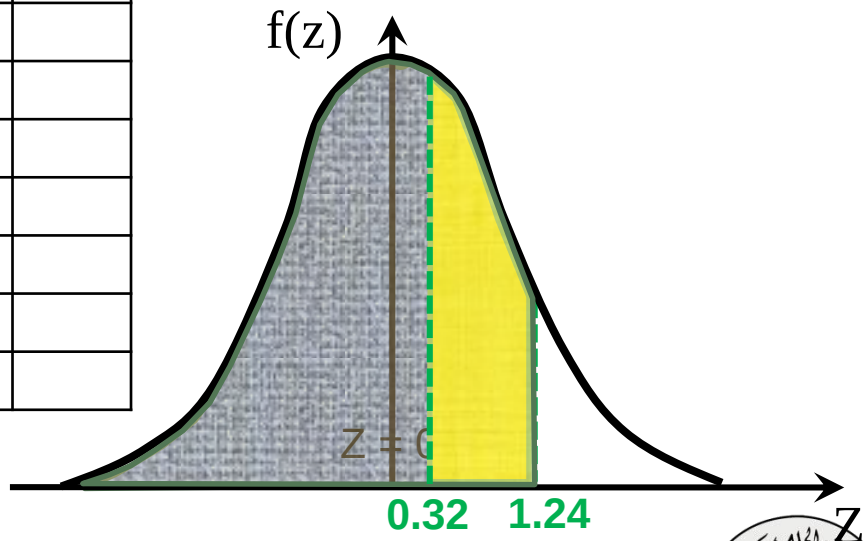
التوزيع الطبيعي القياسي

3. P(0.32 <Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32)

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الصفراء وهى تساوى المساحة البنى (تستخرج من الجدول) مطروحا منها المساحة الزرقاء (تستخرج من الجدول)

3. P(0.32 <Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32) = 0.8925 – 0.6293 = 0.6270

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
0.3			.6293						
1.2	.8849				.8925	.8944			



Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

التوزيع الطبيعي القياسي

مثال 3: إذا كان متوسط طول الطالب يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 10 سم. تم اختيار أحد الطالب عشوائياً ، فأوجد :-

1- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم.

2- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم.

3- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175 سم.

4- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 160 سم.

5- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 175 سم و 185 سم.

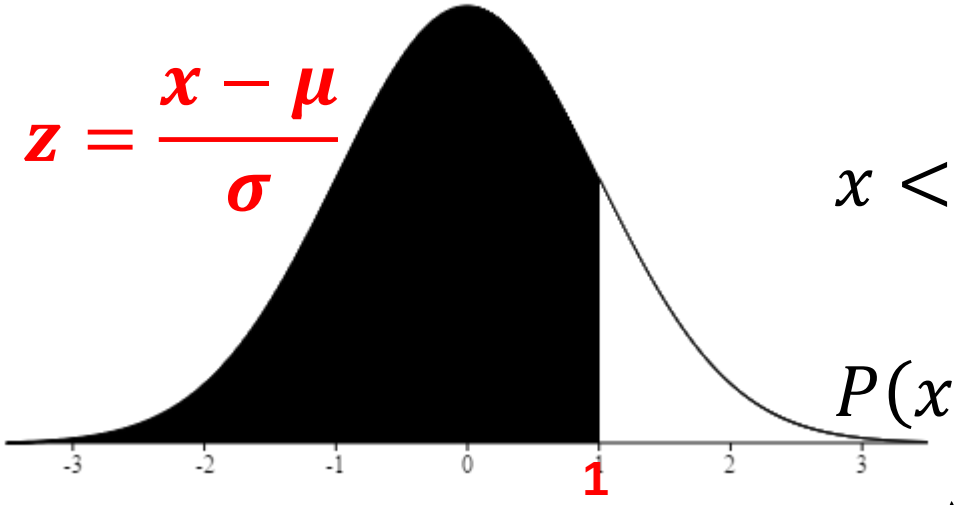
6- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم.

7- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 178 سم.

التوزيع الطبيعي القياسي

1- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم (p(x<180)) :-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$x < 180 \Longrightarrow z < \frac{180 - 170}{10}$$

$$P(x < 180) = P(z < 1)$$

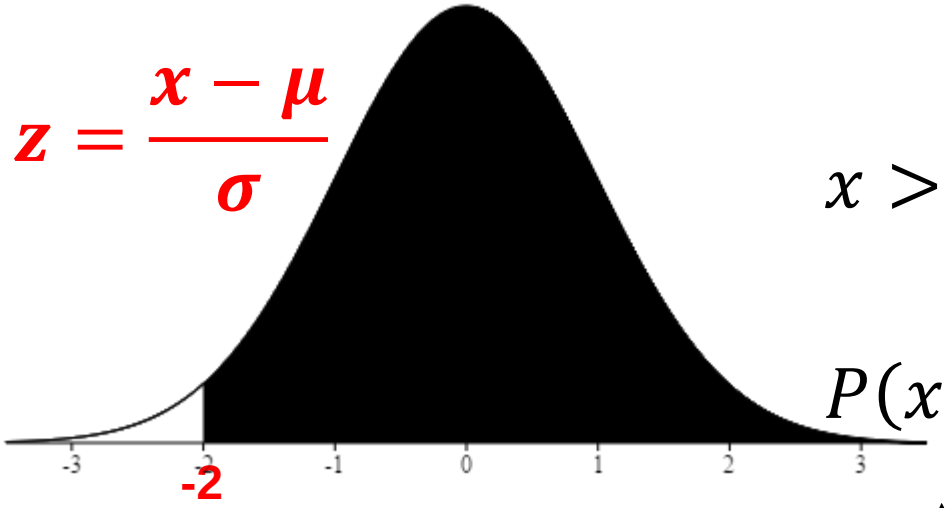
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(z < 1) = 0.8413$$

التوزيع الطبيعي القياسي

2- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم (p(x>150)) :-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$x > 150 \Rightarrow z > \frac{150 - 170}{10}$$

$$P(x > 150) = P(z > -2)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

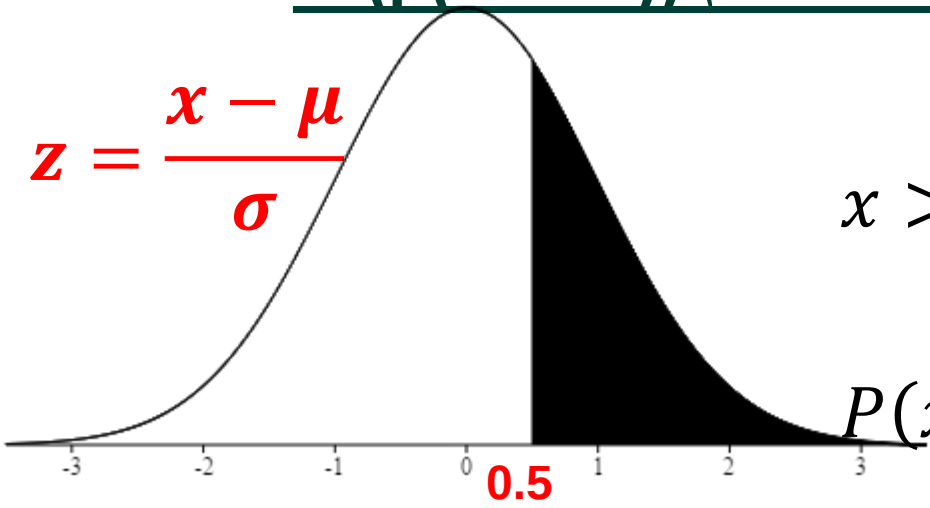
$$P(z > -2) = P(z < 2)$$

$$= 0.9772$$

التوزيع الطبيعي القياسي

3- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175 سم (p(x>175)) :-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$x > 175 \Rightarrow z > \frac{175 - 170}{10}$$

$$P(x > 175) = P(z > 0.5)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

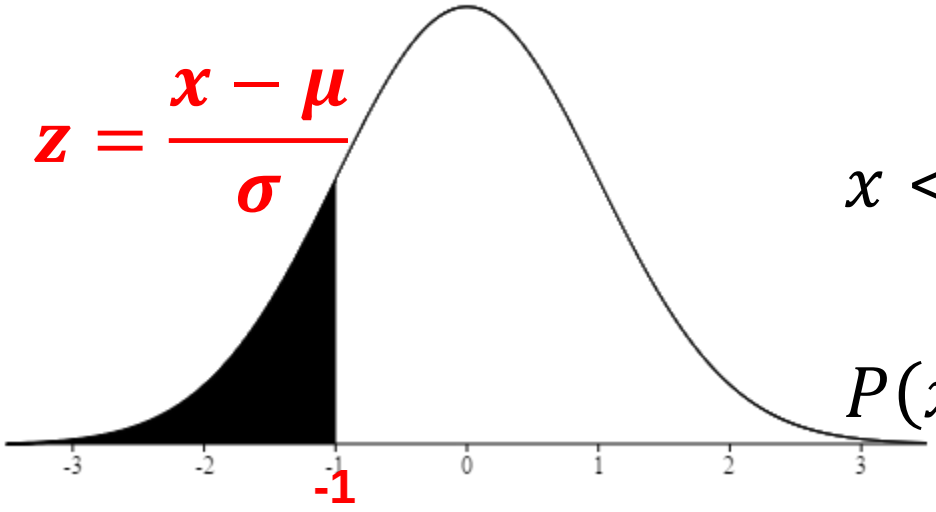
$$P(z > 0.5) = 1 - P(z < 0.5)$$

$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

التوزيع الطبيعي القياسي

4- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 160 سم ((p(x<160)):-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$x < 160 \Rightarrow z < \frac{160 - 170}{10}$$

$$P(x < 160) = P(z < -1)$$

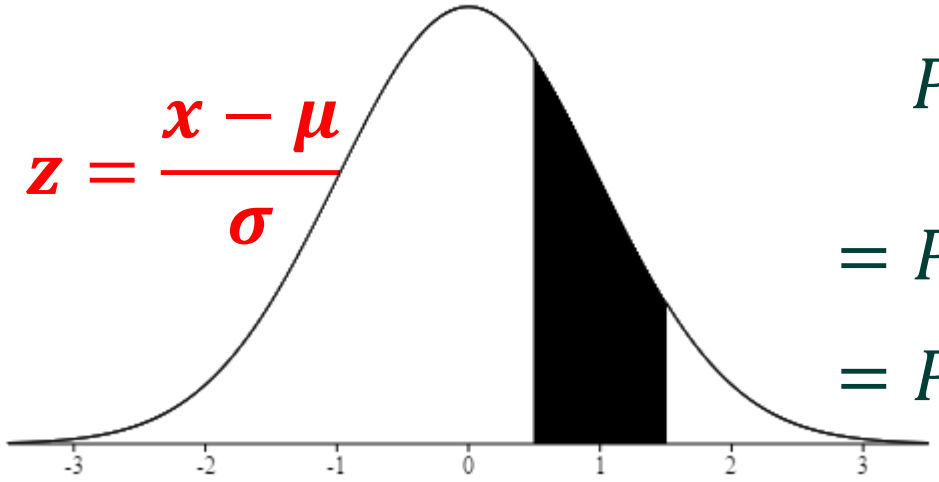
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(z < -1) = P(z > 1)$$

= 1 - 0.8413 = 0.1587

التوزيع الطبيعي القياسي

5- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 175 سم و 185 سم ((p(175<x<185)):-



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(175 < x < 185)$$

$$= P\left(\frac{175 - 170}{10} < z < \frac{185 - 170}{10}\right)$$

$$= P(0.5 < z < 1.5)$$

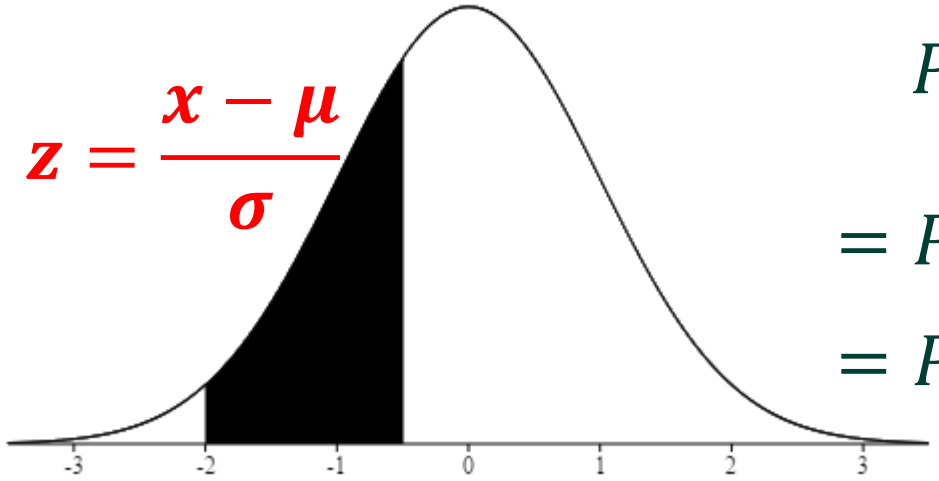
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(z < 1.5) - P(z < 0.5)$$

= 0.9332 - 0.6915 = 0.2417

التوزيع الطبيعي القياسي

6- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم ((p(150<x<165)):-



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(150 < x < 165)$$

$$= P\left(\frac{150 - 170}{10} < z < \frac{165 - 170}{10}\right)$$

$$= P(-2 < z < -0.5)$$

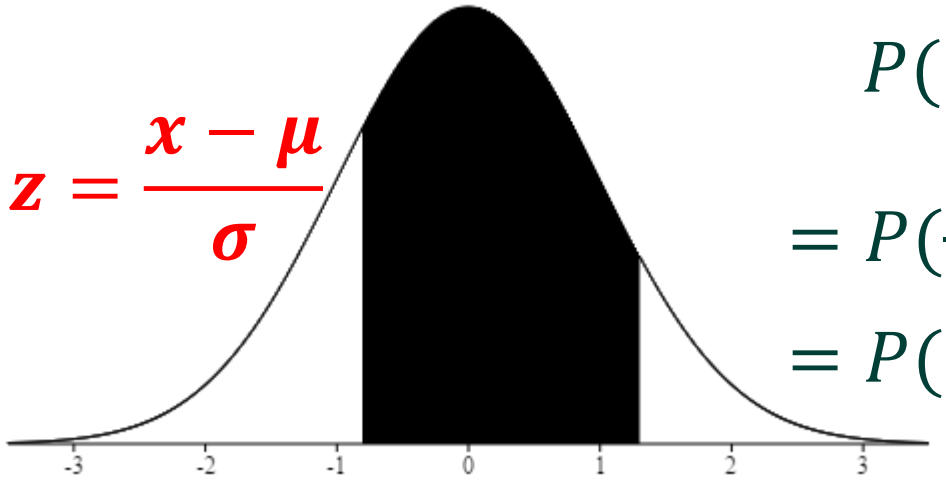
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(z < 2) - P(z < 0.5)$$

= 0.9772 - 0.6915 = 0.2857

التوزيع الطبيعي القياسي

7- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 183 سم (p(162<x<183)):-



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(162 < x < 178)$$

$$= P\left(\frac{162 - 170}{10} < z < \frac{183 - 170}{10}\right)$$

$$= P(-0.8 < z < 1.3)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(z < 1.3) - P(z < -0.8)$$

$$P(z < 1.3) + P(z < 0.8) - 1$$

= 0.9032 + 0.7881 - 1 = 0.6913

التوزيع الطبيعي القياسي

تعليق على المثال السابق: حالات حساب الاحتمالات بالاستعانة بالجدول:

1- أقل من قيمة موجبة.
2- أكبر من قيمة سالبة.

نفس القاعدة : احتمال من الجدول مباشرة

3- أكبر من قيمة موجبة.
4- أقل من قيمة سالبة.

نفس القاعدة : 1 – الاحتمال من الجدول

5- بين قيمتين موجبتين.
6- بين قيمتين سالبتين.

نفس القاعدة : احتمال القيمة الأكبر – احتمال القيمة الأصغر

7- بين قيمتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

احتمال القيمة الأولى + احتمال القيمة الثانية - 1

التوزيع الطبيعي القياسي

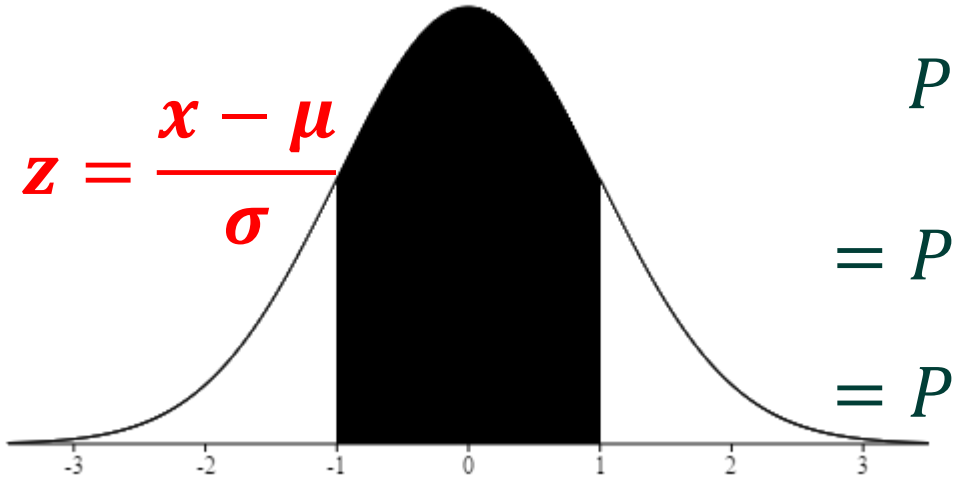
مثال 4:

افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا في الساعة .
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 50 ميلا و 70 ميلا في الساعة .
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 45 ميلا و 75 ميلا في الساعة .
- عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة.

التوزيع الطبيعي القياسي

1- نسبة السيارات التى تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 فى الساعة :



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(55 < x < 65)$$

$$= P\left(\frac{55 - 60}{\sqrt{25}} < z < \frac{65 - 60}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-1 < z < 1)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$= 2 * P(z < 1) - 1$$

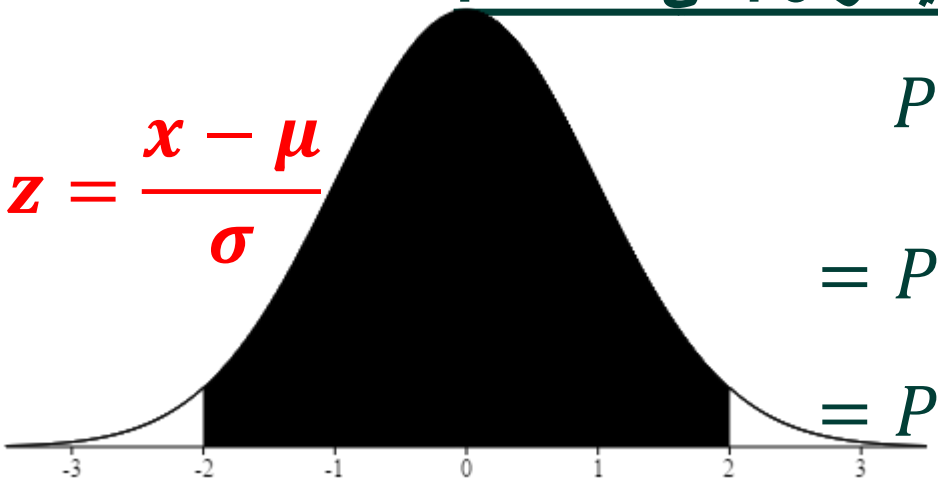
$$= 2\ (0.8413) - 1 = 0.6826$$

∴ النسبة = %68.26

التوزيع الطبيعي القياسي

2- نسبة السيارات التى تكون سرعتها بين 50 ميلا و 70 فى الساعة :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



$$P(50 < x < 70)$$

$$= P\left(\frac{50 - 60}{\sqrt{25}} < z < \frac{70 - 60}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-2 < z < 2)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

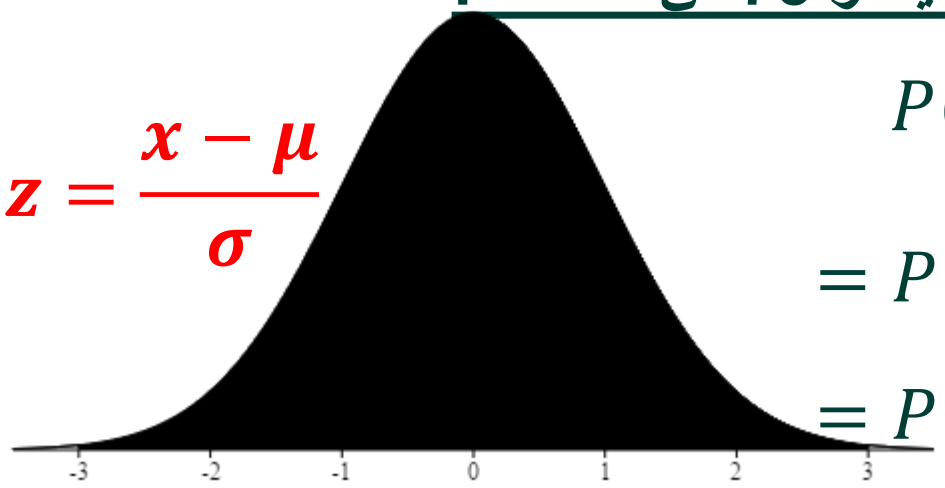
$$= 2 * P(z < 2) - 1$$

$$= 2(0.9772) - 1 = 0.9544$$

∴ النسبة = %95.44

التوزيع الطبيعي القياسي

3- نسبة السيارات التى تكون سرعتها بين 45 ميلا و 75 فى الساعة :



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$P(45 < x < 75)$$

$$= P\left(\frac{45 - 60}{\sqrt{25}} < z < \frac{75 - 60}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-3 < z < 3)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

= 2 * $P(z < 3)$ - 1

= 2(0.9987) – 1 = 0.9974

∴ النسبة = %99.74

التوزيع الطبيعي القياسي

الحل السابق يؤكد خصائص التوزيع الطبيعي السابق ذكرها ، حيث:

- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6826
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد انحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9544
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9974

4- عدد السيارات المتوقع سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة:

العدد = إجمالي عدد السيارات × نسبة السيارات التي تتراوح سرعتها بين 55 و 65 ميلا

العدد = 5000 × 0.6826 = 3413 سيارة

تابع: التوزيعات الاحتمالية الخاصة

توزيع t

توزيع t

توجد عائلة أخرى من المتغيرات العشوائية المتصلة المستخدمة في الإحصاء الاستدلالي وهي مجموعة المتغيرات العشوائية t .

ويعتبر وليم جوست W. S. Gosset هو أول من درس تلك المتغيرات حيث سجل نتائجه عام 1908 تحت اسم مستعار هو student ولذلك يسمى توزيع t في بعض الأحيان بتوزيع ستيودنت.

ويرمز لهذه العائلة من التوزيعات بالرموز $(t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_{df})$ ، كما يرمز لمعلمة التوزيع الوحيدة ويطلق عليها درجات الحرية بالرمز ν (حرف إغريقي ينطق نيو) وهي تأخذ القيم (df , ... ,1,2).

توزيع t

العلاقة بين توزيع t والتوزيع الطبيعي:

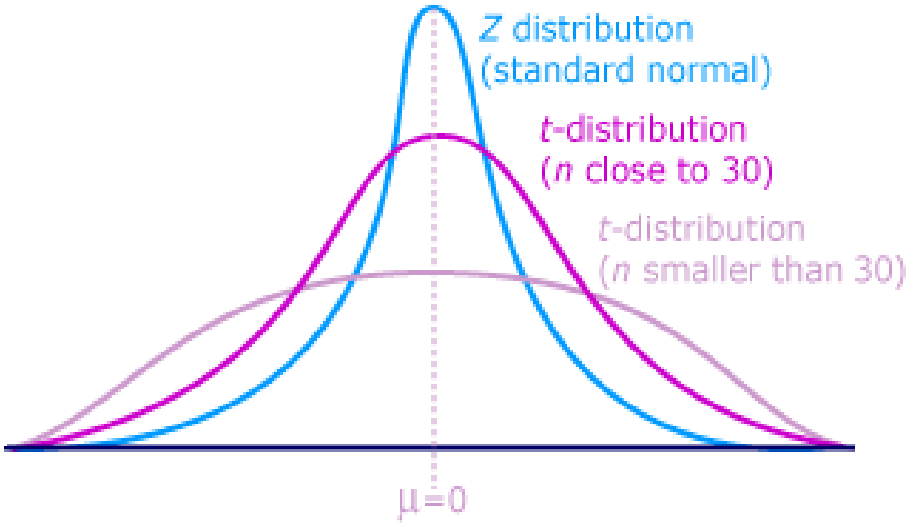
لاشتقاق المتغير العشوائي t من المتغير العشوائي (الطبيعي) الاعتدالي ، فإن ذلك يتطلب معرفة قيمة المتوسط μ للمتغير العشوائي الاعتدالي ، بينما لا نحتاج إلي معرفة انحرافه المعياري.

وبفرض أن قيمة المتغير العشوائي الاعتدالي قد تم ملاحظتها n من المرات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وأن هذه الملاحظات البالغ عددها n تكون عينة متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s ، فإن قيم المتغير العشوائي t تحسب باستخدام الصيغة التالية :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

توزيع t

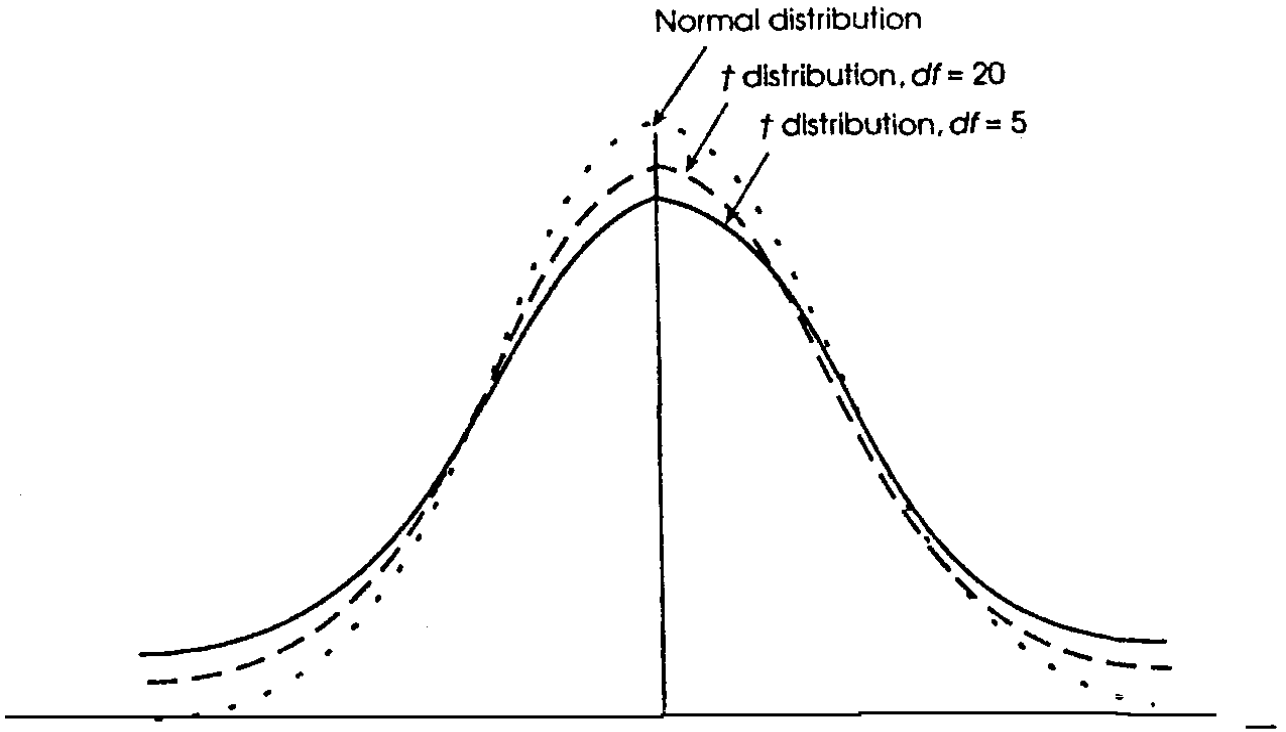
وتتحدد درجة حرية المتغير العشوائي t بأنها تساوي (n-1) كذلك فإنه لكل قيم n نجد أن توزيع t له قيمة واحدة عند النقطة صفر، وهو توزيع متماثل يقل تدريجيا كلما اتجهنا ناحيتي الذيلين الأيمن والأيسر، وهذا ما يوضحه الشكل التالي :



ونلاحظ من الشكل السابق ان توزيع t يشبه توزيع z فيما عدا أنه أكثر انتشارا diffuse لأنه أكثر كثافة عند الذيلين وخاصة عندما تكون n صغيرة.

توزيع t

أما إذا كانت n كبيرة فإن توزيع t يكون أقل انتشارا وأكثر قربا من شكل توزيع z ، **وبزيادة درجات الحرية يقترب توزيع t من التوزيع الاعتدالي** ، وهذا ما يوضحه الشكل التالي:



توزيع t

دالة الاحتمال لتوزيع t :

لأي متغير عشوائي يتبع توزيع t بدرجات حرية ν ، فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال تكون على الصورة التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

حيث: Γ هي دالة جاما ، $\Gamma(n) = (n-1)!$

ويوجد جدول خاص بتوزيع t عند درجات حرية مختلفة يعطي القيم المناظرة لبعض الاحتمالات الخاصة بالتوزيع.

توزيع t

خصائص توزيع t :

- متوسط المتغير العشوائي t يساوي صفر لجميع درجات الحرية.
  وهذا يعني أن $E(t) = 0$
- التباين للمتغير العشوائي t بدرجات حرية أكبر من اثنين يساوي :

$$\sigma^2 = V(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$$

حيث ν هي درجة حرية المتغير العشوائي t .

توزيع t

خصائص توزيع t :

ويتبين من المعادلة السابقة أنه كلما زادت درجات حرية المتغير العشوائي t بحيث تصل إلي 30 فأكثر، فإن الانحراف المعياري يقترب من الواحد الصحيح، وبصفة عامة فإن الانحراف المعياري لتوزيع t يتراوح بين 1.035 ($\nu = 30$) و 1.732 ($\nu = 3$).

ولذلك فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير t يكون قريبا جدا من التوزيع الطبيعي المعياري (المتغير العشوائي z) وبصفة خاصة عندما تكون $\nu > 30$ وفي هذه الحالة نستخدم جدول z للإجابة على الأسئلة الاحتمالية حول المتغير العشوائي t .

توزيع t

مثال (1)

أوجد قيمة كل من: (أ) $t(0.05\ ,\ 10)$ ، (ب) $t(0.025\ ,\ 20)$

الحل:

(أ) بالبحث في جدول t عند تقاطع الصف 10 والعمود 0.05 نجد القيمة 1.812

(ب) بالبحث في جدول t عند تقاطع الصف 20 والعمود 0.025 نجد القيمة 2.086

مثال (2)

أوجد المتوسط والانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X \sim t(8)$

الحل:

- من خصائص التوزيع نعلم أن المتوسط يساوي الصفر.
- حيث أن درجات الحرية = 8 ، فإن الانحراف المعياري يساوي

$$\sigma = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} = \sqrt{\frac{8}{8-2}} = 1.155$$

توزيع t

مثال 3 :

احسب القيمة الحرجة (نقطة القطع) من الجانبين لتوزيع t بدرجات حرية 15 عند مستوى الدلالة 0.1.

الحل :

نقطة القطع من الجانبين هي التي تقسم مستوى الدلالة إلى قسمين متساويين أحدهما بالذيل الأيمن والآخر بالذيل الأيسر للتوزيع ، وبالتالي يخص كل جانب 0.05

بالبحث في الجدول توزيع t عند صف درجات الحرية 15 والعمود الخاص بمستوى الدلالة 0.05. نجد أن القيمة عند تقاطع الصف والعمود تساوي 1.753 ، ويكون:

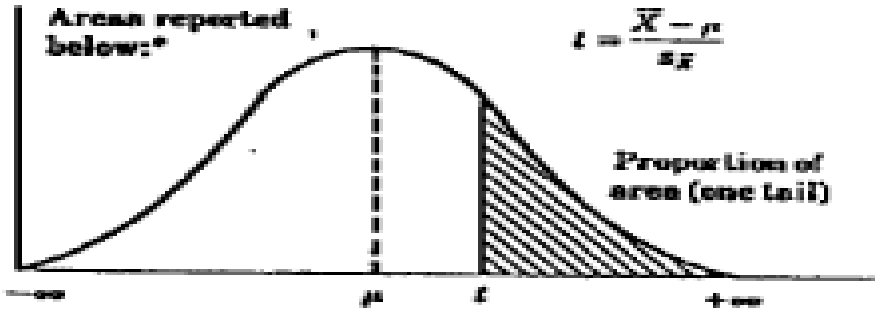
$$P(t_{15} \geq 1.753) = P(t_{15} \leq -1.753) = 0.05$$

$$P(-1.753 \leq t_{15} \leq 1.753) = 0.90$$

الجدول أدناه يعطي قيمة t ∝

∝ المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها

Proportions of Area for the t Distributions



df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898

df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
Z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

تمت بحمد الله

جميع الحقوق محفوظة لجامعة الملك فيصل ©
All Rights Reserved for KFU ©