نظرية الاحتمالات

$$\text{احتمال تحقق حدث معين} = \frac{\text{عدد حالات تحقق هذا الحدث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

P(A) : هو احتمال تحقق الحدث A.

$P(\bar{A})$: هو احتمال عدم تحقق الحدث A. وهو الاحتمال المكمل لاحتمال تحقق الحدث A وحيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$P(A \cap B)$: التقاطع ويشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الأول و الثاني).

$P(A \cup B)$: الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الاول أو الثاني)

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

أنواع الاحداث A و B :-

1- أحداث متنافية (متعارضة): وهى الأحداث التى لا يمكن أن تقع معاً

- احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي صفر $\boxed{P(A \cap B) = 0}$
- احتمال تحقق أحدهما على الأقل : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

2- أحداث مستقلة: أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر

- احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي : $\boxed{(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

3- أحداث غير مستقلة: وهي الأحداث التي يؤثر تحقق أحدها على تحقق الأخرى

- احتمال تحقق الحدثين معاً: $\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$

- الاحتـمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P(A2) لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$\boxed{P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}}$$

المتغير العشوائي المنفصل

Σ	قيم المتغير X	X	صف (1)
1	الاحتمالات الخاصة بقيم X	P(X =x)	صف (2)
القيمة المتوقعة	صف3 = صف 1 × صف 2	μ = E(x)	صف (3)
	صف4 = صف 1 × صف 3	$E(x^2)$	صف (4)

التباين = ناتج صف 4 – (ناتج صف 3)^2

$$\text{التباين } Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

للمتغير العشوائي المتصل:

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X ، حيث $a < x < b$ ،

(القيمة المتوقعة) $\mu = E(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx$

(التباين) $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

حيث $E(X^2) = \int_a^b x^2\, f(x)\, dx$

توزيع ذي الحدين

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة:

$$p(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x\, q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح

q احتمال الفشل q=1-p

التوقع $E(X) = \mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

توزيع بواسون

يعتبر بديلا لتوزيع ذي الحدين ولكن عندما تكون n كبيرة و p صغيرة جدا

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

التوقع : $E(X)=\lambda$

التباين : $Var(X)=\lambda$

$P(x)$ = احتمال حدوث عدد x من النجاحات.

λ = متوسط أو معدل تكرار الحدث في وحدة الزمن. حيث $\boxed{\lambda = np}$

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ، وقيمتها تساوي 2.718 تقريبا، ويمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد x

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ وسط حسابي

σ انحراف معياري

يطلق على القيمة (z) قيمة قياسية أو معيارية

ولحساب أي احتمالات تخص التوزيع الطبيعي يجب أولا تحويل القيم إلى قيم قياسية أو معيارية ثم الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب الاحتمالات.

حالات حساب الاحتمالات بالاستعانة بالجدول:

1- أقل من قيمة موجبة.
2- أكبر من قيمة سالبة.

نفس القاعدة : احتمال من الجدول مباشرة

3- أكبر من قيمة موجبة.
4- أقل من قيمة سالبة.

نفس القاعدة : 1 – الاحتمال من الجدول

5- بين قيمتين موجبتين.
6- بين قيمتين سالبتين.

نفس القاعدة : احتمال القيمة الأكبر – احتمال القيمة الأصغر

7- بين قيمتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

احتمال القيمة الأولى + احتمال القيمة الثانية - 1

توزيع t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

s الانحراف المعياري

$\bar{x}$ متوسط العينه

- متوسط المتغير العشوائي t يساوي صفر لجميع درجات الحرية.
  وهذا يعني أن $E(t) = 0$
- التباين للمتغير العشوائي t بدرجات حرية أكبر من اثنين يساوي :

$$\sigma^2 = V(t) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

$\nu = n-1$

حيث ν هي درجة حرية المتغير العشوائي t

تحديد حجم العينة:

(1) حجم العينة المناسب لتقدير متوسط المجتمع

$$n = \left(\frac{z\ \sigma}{d}\right)^2$$

n : حجم العينة المطلوب.

z : قيمة مستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري تتحدد بناء على درجة الثقة المطلوبة. (درجة ثقة 95% : z = 1.96 ، درجة ثقة 99% : z = 2.58)

σ : الانحراف المعياري لقيم المجتمع. (إذا لم يكن معلوما من دراسات سابقة ، يمكن تقديره بربع المدى المتوقع لقيم المجتمع)

d : خطأ التقدير الذي يحدده الباحث وفقا لطبيعة دراسته.

(2) حجم العينة المناسب لتقدير النسبة في المجتمع

$$n = \left(\frac{z}{d}\right)^2 p(1-p)$$

p : نسبة الصفة المطلوب تقديرها في المجتمع من واقع الخبرة السابقة أو الدراسات المشابهة. (إذا كانت هذه النسبة غير معلومة ، نضع p = 0.5)

توزيعات المعاينة

نظرية (1)

إذا كان المجتمع الأصلى يتبع التوزيع الطبيعى وتباينه معلوم

التباين $= \frac{\sigma^2}{n}$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

نظرية (2): النهاية المركزية (تقارب التوزيعات)

كلما زاد حجم العينة ويكون التوزيع طبيعيا إذا كان حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$

أي أنه إذا كان المجتمع الأصلي لا يتبع بالضرورة التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم

وكانت العينة كبيرة فإن $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

نظرية (3)

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين غير معلوم

$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع t

S يمثل الانحراف المعياري للعينة

بدرجات حرية (n-1)

التقدير

تقدير الوسط الحسابي للعينة $\boxed{\hat{\mu} = \bar{x}}$ تقدير الوسط الحسابي للمجتمع

تقدير نسبة العينة $\boxed{\hat{P} = \hat{p}}$ تقدير نسبة المجتع

أولا: تقدير المتوسط بفترة ثقة:-

الحالة الأولى:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) معلوم.

$$\boxed{\hat{\mu} = \bar{X} \pm z \times \sigma/\sqrt{n}}$$

$$\left(\bar{X} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \times \sigma/\sqrt{n}\right)$$

حيث:

الوسط الحسابي للمجتمع: μ

الوسط الحسابي للعينة: $\bar{X}$

الانحراف المعياري للمجتمع: σ

حجم العينة: n

معامل الثقة المناظر لمستوى (درجة) الثقة: z $(z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

الحالة الثانية:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة غير معروف.
- تباين المجتمع (σ) معلوم.
- العينة كبيرة $(n \geq 30)$.

نظرية (2)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ، وتباينه σ^2 معلومة فإن فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي تقريبا: $\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ إذا كانت n كبيرة $(n \geq 30)$

الحالة الثالثة:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) غير معلوم.
- العينة صغيرة $(n < 30)$.

نظرية (3)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي μ، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي تقريبا: $\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ عند درجة حرية $(n-1)$

الحالة الرابعة:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) غير معلوم.
- العينة كبيرة $(n > 30)$.

في هذه الحالة يمكن استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع t ، وكلاهما يعطي نتائج متقاربة

ثانيا: تقدير النسبة بفترة ثقة:-

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي $\hat{p}$ فإن خطوات تقدير النسبة فى المجتمع تكون كما يلى:

1) حساب النسبة في العينة $\hat{p}$

2) حساب الخطأ المعياري للنسبة والتي تساوي في هذه الحالة :

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

3) ضرب الخطأ المعياري للنسبة في معامل الثقة المناسب Z حسب درجة الثقه المطلوبه والتى نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو من الجدول الذي يحوي أهم درجات ومعاملات الثقه والذي ذكرناه آنفاً). أي نحسب:

$$Z \times \sigma_{\hat{p}} = Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

4) للحصول على الحد الأدنى لتقدير النسبة نطرح حاصل الضرب (السابق) من نسبة العينة $\hat{p}$، وللحصول على الحد الأعلى نجمع حاصل الضرب مع النسبة في العينة $\hat{p}$، فنحصل على فترة تقدير النسبة. وبالتالى فإن فترة تقدير النسبة تكون في شكلها النهائي كما يلي :

$$P = \hat{p} \pm \left(Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

خطوات الاختبار الإحصائى :

1) صياغة الفرضين العدمي والبديل:

- وضع الفرض العدمي H_o، والذي يأخذ – عادة – شكل " يساوي " فمثلاً إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 20 سنة فإن هذا الفرض يصاغ كما يلي : $H_o : \mu = 20$

- وضع الفرض البديل H_1، والذي يأخذ أحد أشكال ثلاثة إما :
" لا يساوي " أو " أكبر من " أو " أقل من "

وبالرموز فإن الفرض البديل قد يأخذ شكل أحد الصيغ التالية :

"$H_1: \mu \neq 20$" أو "$H_1: \mu > 20$" أو "$H_1: \mu < 20$"

2) حساب إحصائية الاختبار: = $\dfrac{\text{قيمة الإحصاءة المناظرة للمعلمة المجهولة من العينة} - \text{قيمة المعلمة المجهولة كما حدد الفرض العدمي}}{\text{الخطأ المعياري}}$

ويختلف الخطأ المعياري من حالة لأخرى حسب المعلمة المراد اختبار الفروض حولها.

المعلمة المجهولة	رمز المعلمة المجهولة	الإحصاءة المناظرة في العينة	الخطأ المعياري
متوسط المجتمع	μ	$\bar{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو $\frac{s}{\sqrt{n}}$
النسبة في المجتمع	P	$\hat{p}$	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

3) تحديد حدود منطقتي القبول والرفض: ونحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري أو توزيع t ، وتختلف وفقا لمستوى المعنوية الخاص بالاختبار وما إذا كان الاختبار ذو طرف واحد أو ذو طرفين.

4) المقارنة والقرار: حيث تقارن قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 2 بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 3) ، فإن وقعت في منطقة القبول يقبل الفرض العدمي ، بينما لا نستطيع قبول الفرض العدمي إن وقعت الإحصائية المحسوبة في منطقة الرفض (أو أحد منطقتي الرفض).