البرمجة الخطية

١

د. ملفي الرشيدي
جامعة الملك فيصل
كلية إدارة الأعمـــال
قسم الأساليب الكمية

« بحوث العمليات »

١-تعريف البرمجة الخطية

٢

مقدمة:

- البرمجة الخطية هي أحد أهم الأساليب العلمية لبحوث العمليات، والتي تساعد الإدارة في حل الكثير من المشاكل التي تواجهها على مستوى وظائف منشأة الأعمال؛ أي في التمويل والاستثمار والإنتاج والأفراد والتسويق وغيرها من المهام التي تضطلع بها المنشأة.

- يمكن للبرمجة الخطية أن تساعد الإدارة في الوظيفة المركزية لها وهي اتخاذ القرارات في معظم مهامها ووظائفها إن لم يكن جميعها ، والتي تضمن التخطيط والتنظيم والمراقبة والتوجيه وغيرها.

١-تعريف البرمجة الخطية

- البرمجة الخطية تعالج المشاكل الروتينية المتكررة، مثل مشاكل الإنتاج وتخصيص الموارد كما تعالج المشاكل الاستثنائية التي لا تتكرر كثيرا في حياة منشأة الأعمال مثل مشاكل الاستثمار.

- تطبيقات البرمجة الخطية ليست حكرا على منشآت الأعمال، بل هي تمتد لتشمل المنشآت العامة ، والسياسات العامة للحكومة في كافة المجالات السياسية ، والاقتصادية والمالية، والزراعية ، والاجتماعية، والعسكرية ، والصحية ،والبيئية، وغيرها.

١-تعريف البرمجة الخطية

التعريف:

البرمجة الخطية Linear Programming أو البرمجة الرياضية هي أسلوب تحليلي كمي تم استخدامه في العلوم الطبيعية والهندسية قبل استخدامه في العلوم الاجتماعية والإدارية ، وهي من النماذج المؤكدة وليست من النماذج الاحتمالية. وهي أحد فروع وأنواع البرمجة الرياضية.

١-تعريف البرمجة الخطية

عناصر البرمجة الخطية:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من أربعة عناصر:

١-دالة الهدف Objective Function

الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية يكون إما تحقيق "أقصى" maximum أو "أقل" minimum كمية ما، وهذا ما يعرف في لغة الرياضيات بالامثلية optimization.

٢-متغيرات القرار Decision Variables

تدخل ضمن دالة الهدف المراد تعظيمه أو تقليله وهي متغيرات من الدرجة الأولى ، وهذه المتغيرات إما أن تكون صفرية أو موجبة.

١-تعريف البرمجة الخطية

٣-القيود Constraints

وجود قيود أو محددات أو متباينات على إمكانية تحقيق الهدف.

ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية ، وهي كما يلي:

أ. متساوية : (=) equality

ب. متباينة : أقل من (≥) less than or equal to

ج. متباينة : أكبر من (≤) more than or equal to

٤-شرط عدم السالبية Nonnegative

يعني الحل يجب أن يكون دائمًا في الربع الأول الموجب.

١-تعريف البرمجة الخطية

دالة الهدف		
تعظيم متغيرات القرار		تقليل متغيرات القرار
قيود	= ≥ ≤	موارد
متغيرات القرار موجبة أو صفرية " عدم السلبية "		

١-الشكل العام للبرمجة الخطية

Max/Min $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m$$

x_j = متغيرات القرار

b_i = الموارد المتاحة او المتطلبات

c_j = معاملات المتغيرات في دالة الهدف

a_{ij} = معاملات المتغيرات في القيود

حيث ان:

$i=1,2,\dots,m$ تمثل عدد القيود

$j=1,2,\dots,n$ تمثل عدد المتغيرات

صياغة النموذج الرياضي

- يتم صياغة النماذج الرياضية بشكل عام وفق خطوات واضحة و محددة يمكن إجمالها بالآتي:
  - تهيئة البيانات اللازمة لصياغة النموذج الرياضي و تحديد متغيرات القرار (Decision variables).
  - تحديد دالة الهدف (Objective function)و قد يكون :
    - تحقيق أعلى قدر ممكن من الأرباح أو العوائد الكلية
    - (Objective function→ Max. Profit)
    - تحقيق أقل قدر ممكن من الخسائر أو التكاليف الكلية
    - (Objective function→ Min. losses)
    - و يمكن أن يكون الهدف منفرد و هو إحدى الحالتين أعلاه(تعظيم أرباح أو تقليل خسائر) أو يكون مزدوج و هو تحقيق الهدفين معاً في آن واحد(البرمجة بالأهداف).
  - تحديد القيود غير السالبة (Non- negative Constraints).
  - تحديد القيود الهيكلية (Constructional Constraints).

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

تعالج البرمجة الخطية مشاكل التعظيم (العوائد والأرباح)، كما تعالج مشاكل التقليل (التكاليف) ،وهي ما تعرف في بحوث العمليات بالمثلى أو الفضلى OPTIMIZATION .

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

مثال ١ :

تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات ، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10 دولار، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40 دولار، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد.

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

الحل:

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد.
ثانيا	المتغيرات	كراسي ، طاولات.
ثالثا	الرموز	نعبر عن الكراسي(X1)، ونعبر عن الطاولات ب(X2).
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

جدول يبين بيانات المشكلة

	X1 كراسي	X2 طاولات	الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية
قسم النشر	1	2	100ساعة عمل
قسم التجميع	1	5	150ساعة عمل
سعر البيع	$10	$40	

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

خامسا : وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي

Objective function	Max z= 10 X1 + 40 X2	دالة الهدف
constraints	1 X1 + 2 X2 ≤ 100 1 X1 + 5 X2 ≤ 150	القيود
Non negative	X1≥ 0 , X2 ≥ 0	عدم السلبية

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

مثال ٢ :

تقوم شركة بإنتاج نوعين من الدفاتر المدرسية: دفاتر كتابة ، وكراس رسم ، ولإتمام العملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتاح للآلة هو 24 ساعة، بينما الوقت المتاح من عنصر العمل هو 16 ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من دفاتر الكتابة إلى ساعتين من الآلة، وساعتين من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من كراس الرسم إلى 3 ساعات من الآلة و ساعة واحدة من العمل. ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من دفاتر الكتابة 12$ ، ومن كراس الرسم 14$، علما بأن الشركة تستطيع أن تبيع سبع وحدات فقط من المنتج الأول ، وست وحدات من المنتج الثاني . وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من السلعتين التي تحقق للشركة أعلى عائد.

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

الحل:

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة:

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد
ثانيا	المتغيرات	دفتر كتابة ، كراس رسم
ثالثا	الرموز	نعبر عن دفتر الكتابة بـ X1 نعبر عن كراس الرسم بـ X2
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

جدول يبين بيانات المشكلة

	X1 دفتر كتابة	X2 كراس رسم	الموارد المتاحة أقل من أو مساوية
الآلة	2	3	24
العمل	2	1	16
سوق ١	1	-	7
سوق ٢	-	1	6
السعر	$12	$14	

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

١٨

خامسا : وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات

max $Z = 12\ X1 + 14\ X2$
Subject to:
$2\ X1 + 3\ X2 \leq 24$
$2\ X1 + 1\ X2 \leq 16$
$X1 \leq 7$
$X2 \leq 6$
$X1 \geq 0 \qquad X2 \geq 0$

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

١٩

- يرغب عميد كلية العلوم الإدارية في جامعة م وضع خطة لعدد المواد للفصل القادم. و نتيجة لطلبات الطلبة تبين أن عدد المواد التي يجب تقديمها لطلبة القسم الصباحي على الأقل ٣٠ مادة، في حين أن المواد القسم المسائي على الأقل ٢٠ مادة. كما و أن عدد مواد القسم الصباحي و القسم المسائي يجب أن تكون على الأقل ٦٠ مادة. وترغب العمادة في تخفيض التكاليف الى أدنى حد ممكن.

إذا علمت أن كلفة المادة الواحدة للقسم الصباحي ١٠٠٠ ريال. و كلفة المادة الواحدة للقسم المسائي ٨٠٠ ريال.

المطلوب: صياغة برنامج خطي مناسب لهذه المشكلة.

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

٢٠

نفرض عدد المواد للقسم الصباحي هو X_1
وأن عدد المواد للقسم المسائي هو X_2

- إذن سيكون النموذج الرياضي كالآتي

$$\text{Min } z = 1000\ X_1 + 800\ X_2$$

Subject to:

$$X_1 \geq 30$$
$$X_2 \geq 20$$
$$X_1 + X_2 \geq 60$$

شرط عدم السلبية $X_1 , X_2 \geq 0$

٢-أمثلة علي صياغة مشاكل البرمجة الخطية

سادسا: حل المشكلة عن طريق
١. الرسم البياني
٢. أو السمبلكس

٣-حل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

- تعد الطريقة البيانية من أبسط طرق البرمجة الخطية التي تهدف إلى إيجاد الحلول المناسبة للمسائل الإدارية المختلفة (مسائل الإنتاج، مسائل التسويق، مسائل الأفراد...)، وبخاصة تلك المتعلقة باتخاذ القرارات ذات الموضوعات الفنية والمعايير الكمية.

- يعيب هذه الطريقة أنه لا يمكن استخدامها لحل مشاكل تتضمن أكثر من مجهولين، وتقوم طريقة الحل بيانيًا على تحديد منطقة نقاط الحلول الممكنة بيانيًا، ثم اختيار النقطة التي تحقق أحسن قيمة لدالة الهدف.

٣-حل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

<u>خطوات الحل:</u>

١- تحويل متباينات القيود الى معادلات، و عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

٢- تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد.

٣- رسم القيود على الشكل البياني بعد ان يتم تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل الممكن.

٣-حل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

٤- تحديد الحل الأمثل (الحلول المثلى) والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (نقطة ركنية) من خلال:

أ- إيجاد قيم المتغيرات عند هذه النقاط.

ب- اختيار أكبر (أصغر) قيمة بعد التعويض بدالة الهدف.

٣-حل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

$$\text{Max } z = 40\ x_1 + 50\ x_2$$

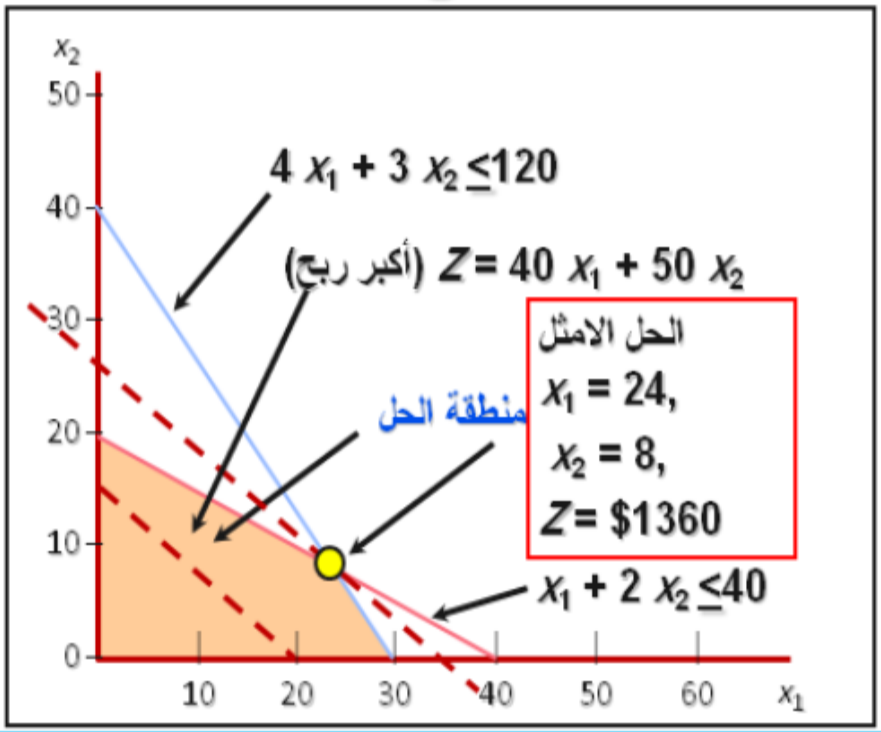
$$s.t.$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

٣-حل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية



٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

الطريقة المبسطة Simplex Method:

هي اجراء جبري يعتمد على جبر المصفوفات وهي اسلوب رياضي معقد مقارنة بالطريقة البيانية وكان G.B-Dantzig من الاوائل الذين اهتموا بهذا الجانب وتطويره لحل المشاكل التي تواجه الادارة ،والنقطة الجوهرية في هذا الاسلوب هو قدرته لحل المشاكل بشكل دقيق من جانب وعلى التعامل مع اكثر من متغيرين من جانب اخر.

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

- لاحظنا عند حل البرنامج الخطي بيانيًا أن الحل الأمثل يقع دائمًا على أحد النقاط القصوى والمحددة لمنطقة الحلول الممكنة. وتعتمد طريقة السمبلكس على اختيار نقطة قصوى ممكنة Feasible Extreme Point عادة تكون نقطة الأصل وينتقل الحل في عمليات متتالية من نقطة إلى أخرى أفضل منها حتى يصل إلى النقطة التي تحقق الحل الأمثل.
- ولشرح خطوات السمبلكس نستعين بالمثال التالي:

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

مثال ١:

اوجد أكبر ربح ممكن إذا كانت دالة الهدف

$$Z=30X_1+18X_2$$

طبقا للقيود الاتية:

$$X_1 + 2X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 300$$

$$X_1 \leq 150$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

الحل:

- الخطوة (١) نحول قيود المشكلة من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية Standard Form ، ولان القيود جميعها من نوع اصغر من او يساوي ،
لذا فان عملية التحويل تتطلب اضافة متغير راكد (مهمل slack) والذي سيرمز له بـ (S)

$$X1 + 2X2 + S1 = 200 \quad (1)$$
$$3X1 + 2X2 + S2 = 300 \quad (2)$$
$$X1 + S3 = 150 \quad (3)$$

$X1, X2, S1, S2, S3 \geq 0$ شرط عدم السلبية

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

- الخطوة (٢) تضاف المتغيرات الراكدة (المهملة)الى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية وكما يأتي:-

$$Max: Z = 30X1 + 18X2 + 0S1 + 0S2 + 0S3$$

- الخطوة(٣) نحول دالة الهدف الى دالة صفرية عن طريق نقل كافة المتغيرات من الطرف الايمن الى الطرف الايسر من المعادلة ،لتصبح كما يأتي:-

$$Max: Z - 30X1 - 18X2 - 0S1 - 0S2 - 0S3 = 0$$

- الخطوة(٤) نقوم بإعداد جدول الحل الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الاساسية وغير الاساسية في معادلة دالة الهدف.

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

- ملاحظات على اعداد الجدول :
  - المتغير الاساسي هو المتغير الذي يكون معامله صفر في معادلة دالة الهدف اي (S1,S2,S3).
  - ان وضع Z في عمود المتغيرات الاساسية لا يعني انها متغير اساسي انها فقط تساعد في تحديد المتغير الداخل ولتحديد ما اذا كنا قد وصلنا للحل الامثل.
  - القيم التي تقابل المتغير S1 هي معاملات المتغيرات في القيد (١). أما القيم التي تقابل المتغير S2 هي معاملات المتغيرات في القيد (٢).و القيم التي تقابل المتغير S3 هي معاملات المتغيرات في القيد (٣).

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

متغيرات غير اساسية / متغيرات اساسية	Z	متغيرات غير أساسية					الثوابت R.H.S
		X1	X2	S1	S2	S3	
Z	1	-30	-18	0	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	0	200
S2	0	3	2	0	1	0	300
S3	0	1	0	0	0	1	150

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

الخطوة (٥)

- اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل اكبر قيمة بإشارة سالبة في صف Z ومن الجدول يكون X1 هو المتغير الداخل لان قيمته(30-) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور Pivot column).
- اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم R.H.S على قيم عمود المحور ،وتهمل اية قيمة سالبة او صفرية او غير محددة (∞).ويطلق على الصف الذي يضم المتغير الخارج (صف المحور Pivot row).

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

أما حاصل قسمة قيم R.H.S على قيم عمود المحور فهي كالآتي :

200/1=200

300/3=100

150/1=150

اذن المتغير S2 هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل قيمة موجبة (100).

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

Non- Basic var. Basic Var.	Z	متغيرات غير أساسية					الثوابت R.H.S	النسبة
		X1	X2	S1	S2	S3		
Z	١	٣٠	-18	٠	٠	٠	٠	
S1	٠	١	٢	١	٠	٠	٢٠٠	٢٠٠
S2	٠	٣	٣	٠	١	٠	٣٠٠	١٠٠
S3	٠	١	٠	٠	٠	١	١٥٠	١٥٠

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

ايجاد القيم الجديدة لمعاملات المتغيرات:

- ايجاد قيم المتغير الداخل X1 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في صف المحور على العنصر المحوري.
- العنصر المحوري (Pivot variable) هو نقطة تقاطع عمود المحور مع صف المحور، وهو(3).
- اذن قيم المتغير الداخل X1 هي :

X1= (0/3, 3/3, 2/3, 0/3,1/3, 0/3, 300/3)

X1= (0 , 1 , 2/3 , 0 ,1/3 , 0 , 100)

تكتب القيم الجديدة اعلاه في جدول الحل الجديد.

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

ايجاد قيم بقية المتغيرات في الجدول:

- لإيجاد قيمة Z الجديدة ، نضرب القيمة المقابلة لـ Z في عمود المحور وهى (-30) × قيم المتغير الداخل الجديدة وكما يأتي:

-30 * (0 , 1 , 2/3 , 0 , 1/3 , 0 , 100)

= (0 , -30 , -20 , 0 , -10 , 0 , -3000)

ثم نطرح القيم اعلاه من قيم معاملات Z القديمة في جدول الحل الابتدائي وكما يأتي:

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

(1 , -30 , -18 , 0 , 0 , 0 , 0)

-

(0 , -30 , -20 , 0 ,-10 , 0 , -3000)

(1 , 0 , 2 , 0 , 10 , 0 , 3000)

ثم ننقل القيم الى جدول الحل الثاني.

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

ايجاد قيم معاملات المتغيرات الجديدة:

- لإيجاد قيمة S1الجديدة نقوم بنفس الخطوات اعلاه أي ضرب العنصر المقابل للمتغير S1 في عمود المحور × قيم المتغير الداخل الجديدة وكما يأتي:

1 * (0 , 1 , 2/3 , 0 , 1/3 , 0 , 100)

=(0 , 1 , 2/3 , 0 , 1/3 , 0 , 100)

ثم نطرح الناتج من قيم المتغير S1 القديمة:

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

(0 , 1 , 2 , 1 , 0 , 0 , 200)

-

(0 , 1 , 2/3 , 0 , 1/3 , 0 , 100)

(0 , 0 , 4/3 , 1 , -1/3 , 0 , 100)

ثم ننقل القيم الى جدول الحل الثاني.

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

ايجاد قيم المتغيرات الجديدة:

- بنفس الطريقة نجد قيم S3

1 *(0 ، 1 ، 2/3 ، 0 ، 1/3 ، 0 ، 100)
= (0 ، 1 ، 2/3 ، 0 ، 1/3 ، 0 ، 100)

نطرح القيم اعلاه من قيم المتغير القديمة:

(0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 150)
-
(0 ، 1 ، 2/3 ، 0 ، 1/3 ، 0 ، 100)

(0 ، 0 ، -2/3 ، 0 ، -1/3 ، 1 ، 50)

ثم نضيف القيم اعلاه الى جدول الحل الثاني

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

B.V.	Z	X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S.
Z	1	0	2	0	10	0	3000
S1	0	0	4/3	1	-1/3	0	100
X1	0	1	2/3	0	1/3	0	100
S3	0	0	-2/3	0	-1/3	1	50

٤-حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

- بعد استكمال الجدول يتم التأكد من اذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الامثل وذلك من خلال ملاحظة القيم في صف Z ،ولان دالة الهدف من نوع تعظيم ،نصل للحل الامثل عندما تكون جميع القيم في صف Z موجبة او صفرية.

- لذا الجدول الثاني يمثل جدول الحل الامثل لان جميع القيم في صف Z موجبة او صفرية.

- هذا يعني ان الحل الامثل هو في انتاج 100 وحدة من النوع الاول (X1=100) لنتمكن من تحقيق ربح مقداره 3000 (Z=3000).

٥-الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

- قد يوجد تكرار (تحلل) Degenerate (في الطريقة المبسطة)
- قد يوجد حلول مثلى متعددة Optimal solutions (بمجرد النظر الى المسألة)
- قد لا يوجد لها حل Infeasible (من الرسم البياني)
- قد يوجد لها حل غير محدود Unbounded (من الرسم البياني)

٥-الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

مثال ١ :

اوجد أكبر ربح ممكن إذا كانت دالة الهدف $z = 5\ x1 + 2\ x2$

طبقا للقيود الاتية:

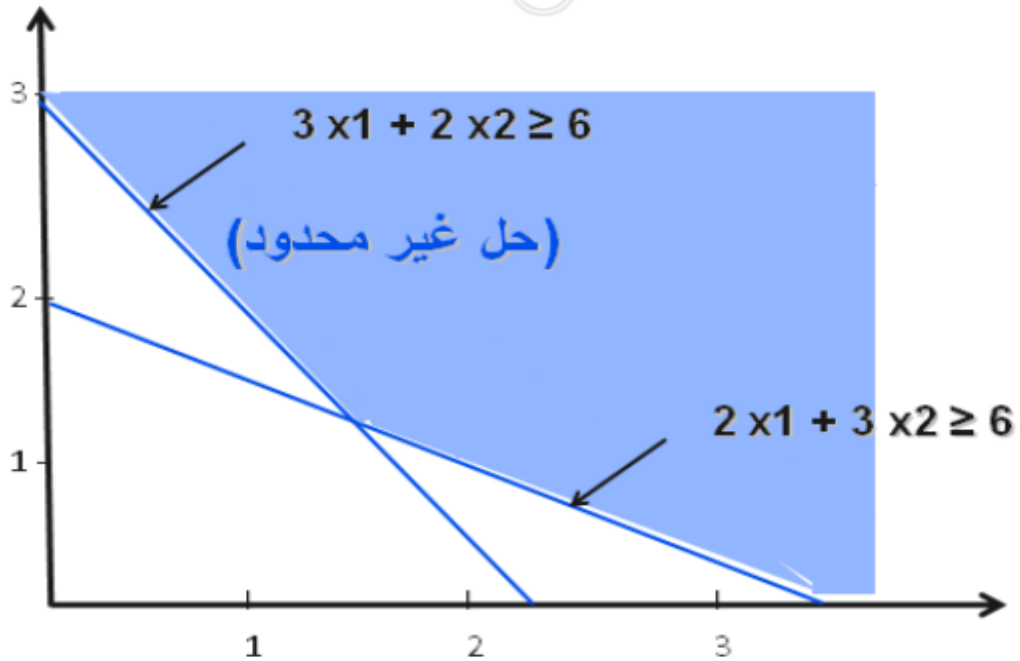
$2\ x1 + 3\ x2 \geq 6,$

$3\ x1 + 2\ x2 \geq 6,$

$x1 \text{ and } x2 \geq 0$

٥-الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

الحل:



٥-الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

٤٨

مثال ١ :

أوجد أقل تكلفة للمشكلة التالية: $z = 5\,x1 + 2\,x2$

بشرط أن:

$3\,x1 + 3\,x2 \le 9,$

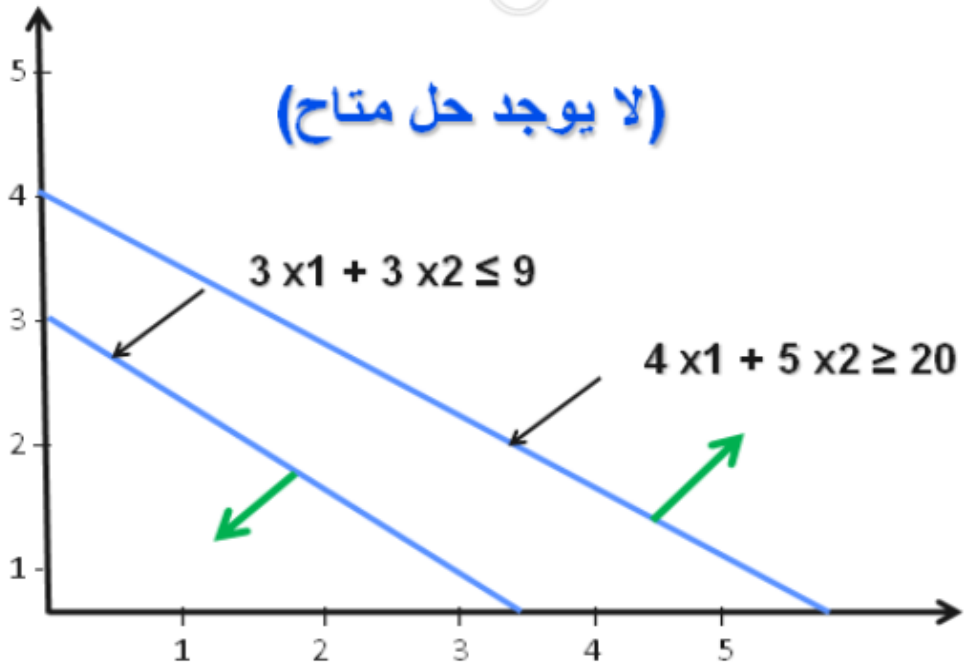
$4\,x1 + 5\,x2 \ge 20,$

$x1 \text{ and } x2 \ge 0$

٥-الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

٤٩

الحل:



تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح في الدارين أختكم / دوحه غنّاء