

## تحليل الانحدار

يعتبر تحليل الانحدار أكثر طرق التحليل الإحصائي استخداماً، حيث يتم من خلاله التنبؤ بقيمة أحد المتغيرات (المتغير التابع) عند قيمة محددة لمتغير أو متغيرات أخرى (المتغيرات المستقلة).

وتسمى العلاقة الرياضية التي تصف سلوك المتغيرات محل الدراسة والتي من خلالها يتم التنبؤ بسلوك أحد المتغيرين عند معرفة الآخر بمعادلة خط الانحدار.

وهناك صورتان أساسيتان لمعادلة الانحدار وهما:

الصورة الأولى: معادلة انحدار  $x|y$  (التي يطلق عليها معادلة انحدار  $y$  على  $x$ )

الصورة الثانية: معادلة انحدار  $y|x$  (التي يطلق عليها معادلة انحدار  $x$  على  $y$ )

معادلة انحدار  $y$  على  $x$

وهي تلك المعادلة التي يطلق عليها معادلة انحدار  $y | x$ . أي تتحدد قيمة المتغير  $y$  تبعاً لقيمة المتغير  $x$  لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

حيث يسمى  $b_0$  ثابت الانحدار أو الجزء الثابت أو الجزء المقطوع من محور الصادات بينما  $b_1$  يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير في الدالة.

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين  $y$  و  $x$  لابد من تقدير قيمة للثابتين و الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى كما يلي:

تقوم نظرية المربعات الصغرى على تدنية مجموع مربعات الأخطاء في التقدير إلى أقل حد ممكن.

ويمكن استخدام المعادلات التالية لحساب معامل الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

$$b_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n} \\ &= \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{aligned}$$

مثال

عند دراسة العلاقة بين عدد غرف المسكن وكمية الكهرباء المستهلكة بالآلاف كيلو واط فكانت كما يلي:

| عدد الغرف x      | 9  | 7 | 10 | 5 | 3 | 7 | 8  | 10 | 4 | 6 |
|------------------|----|---|----|---|---|---|----|----|---|---|
| استهلاك كهرباء y | 12 | 9 | 14 | 6 | 4 | 7 | 10 | 10 | 5 | 8 |

المطلوب أوجد:

١. معادلة انحدار y على x ؟
٢. تحديد معدل التزايد أو التناقص في استهلاك الكهرباء؟
٣. ماهو الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من ٨ غرف؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالي:

| x  | y  | xy  | x <sup>2</sup> | y <sup>2</sup> |
|----|----|-----|----------------|----------------|
| 9  | 12 | 108 | 81             | 144            |
| 7  | 9  | 63  | 49             | 81             |
| 10 | 14 | 140 | 100            | 196            |
| 5  | 6  | 30  | 25             | 36             |
| 3  | 4  | 12  | 9              | 16             |
| 7  | 7  | 49  | 49             | 49             |
| 8  | 10 | 80  | 64             | 100            |
| 10 | 10 | 100 | 100            | 100            |
| 4  | 5  | 20  | 16             | 25             |
| 6  | 8  | 48  | 36             | 64             |
| 69 | 85 | 650 | 529            | 811            |

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار x على y كما يلي:

أولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار  $b_1$

$$b_1 = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10(650) - (69)(850)}{10(529) - (69)^2} = 1.2003$$

وبالتالي يكون معدل التزايد في استهلاك الكهرباء هو لأنها موجبة ويساوي 1.2003 أى أن كل غرفة بالمسكن تعمل على زيادة استهلاك الكهرباء بمقدار 1200.3 كيلو واط.

ثانياً - تقدير قيمة  $b_0$

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{69}{10} = 6.9, \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{85}{10} = 8.5$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 8.5 - (1.2003)(6.9) = 0.21793$$

معادلة انحدار  $x$  على  $y$  هي:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$\hat{y} = 0.21793 + 1.2003 x$$

الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من ٨ غرف:  
يتم التعويض في معادلة الانحدار التي سبق إيجادها عندما تكون  $x = ٨$  كما يلي:

$$\hat{y} = 0.21793 + 1.2003 (8) = 9.8203$$

أي أن الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من 8 غرف هو 9820.3 كيلو واط

معادلة انحدار  $x$  على  $y$

وهي التي يطلق عليها معادلة انحدار  $x | y$ . أي تتحدد قيمة المتغير  $x$  تبعاً لقيمة المتغير  $y$  لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

حيث يسمى  $c_0$  ثابت الانحدار أو الجزء الثابت بينما  $c_1$  يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير في الدالة

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين  $x$  و  $y$  لابد من تقدير قيمة للثابتين  $c_0$  و  $c_1$  الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى فتكون النتيجة كما يلي:

$$c_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$

$$= \bar{x} - c_1 \bar{y}$$

مثال

باستخدام بيانات المثال السابق لعدد الغرف واستهلاك الكهرباء، وعلى اعتبار هو المتغير المستقل وعدد الغرف هو المتغير التابع، أوجد التالي:

| عدد الغرف $x$      | 6 | 4 | 10 | 8  | 7 | 3 | 5 | 10 | 7 | 9  |
|--------------------|---|---|----|----|---|---|---|----|---|----|
| استهلاك كهرباء $y$ | 8 | 5 | 10 | 10 | 7 | 4 | 6 | 14 | 9 | 12 |

**المطلوب أوجد:**

١. معادلة انحدار  $x$  على  $y$  ؟
٢. ماهو عدد الغرف المتوقع لأستهلاك 25000 كيلو وات ؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالي:

| $y^2$ | $x^2$ | $xy$ | $y$ | $x$ |
|-------|-------|------|-----|-----|
| 144   | 81    | 108  | 12  | 9   |
| 81    | 49    | 63   | 9   | 7   |
| 196   | 100   | 140  | 14  | 10  |
| 36    | 25    | 30   | 6   | 5   |
| 16    | 9     | 12   | 4   | 3   |
| 49    | 49    | 49   | 7   | 7   |
| 100   | 64    | 80   | 10  | 8   |
| 100   | 100   | 100  | 10  | 10  |
| 25    | 16    | 20   | 5   | 4   |
| 64    | 36    | 48   | 8   | 6   |
| 811   | 529   | 650  | 85  | 69  |

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار  $x$  على  $y$  كما يلي:  
أولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار  $c_1$

$$c_1 = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum y^2 - (\sum y)^2} = \frac{10((650) - (69)(85))}{10(811) - (85)^2} \cong 0.718$$

ثانياً - تقدير قيمة  $c_0$

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$

$$c_0 = \bar{x} - c_1 \bar{y} = 6.9 - 0.718(8.5) \cong 0.797$$

معادلة انحدار  $x$  على  $y$  هي:  
 وبالتالي تكون معادلة انحدار  $x$  على  $y$

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y \Rightarrow \hat{x} = 0.797 + 0.718 y$$

إذا كان الاستهلاك للمنزل ٢٥٠٠٠ كيلوات  
 فإن عدد الغرف المتوقعة هو:  
 يتم التعويض في معادلة الانحدار التي سبق إيجادها عندما تكون  $y = 25$  كما يلي:

$$\hat{x} = 0.797 + 0.718(25) = 18.747 \cong 19$$

أي أنه إذا كان استهلاك الكهرباء في احد المنازل ٢٥٠٠٠ كيلوات فإن عدد الغرف  
 المتوقع في هذا المنزل = 19 غرفة تقريبا.