المحاضرة الاولى
مفاهيم اساسية

عناصر المحاضرة

١- المقدمة
٢- مفهوم علم الاحصاء
٣- المجتمع والعينة
٤- البيانات
٥- خطوات العملية الاحصائية
٦- تمرينات محلوله
٧- تدريبات للطالب (متروك للطالب ومعطى له اجابات نهائية)

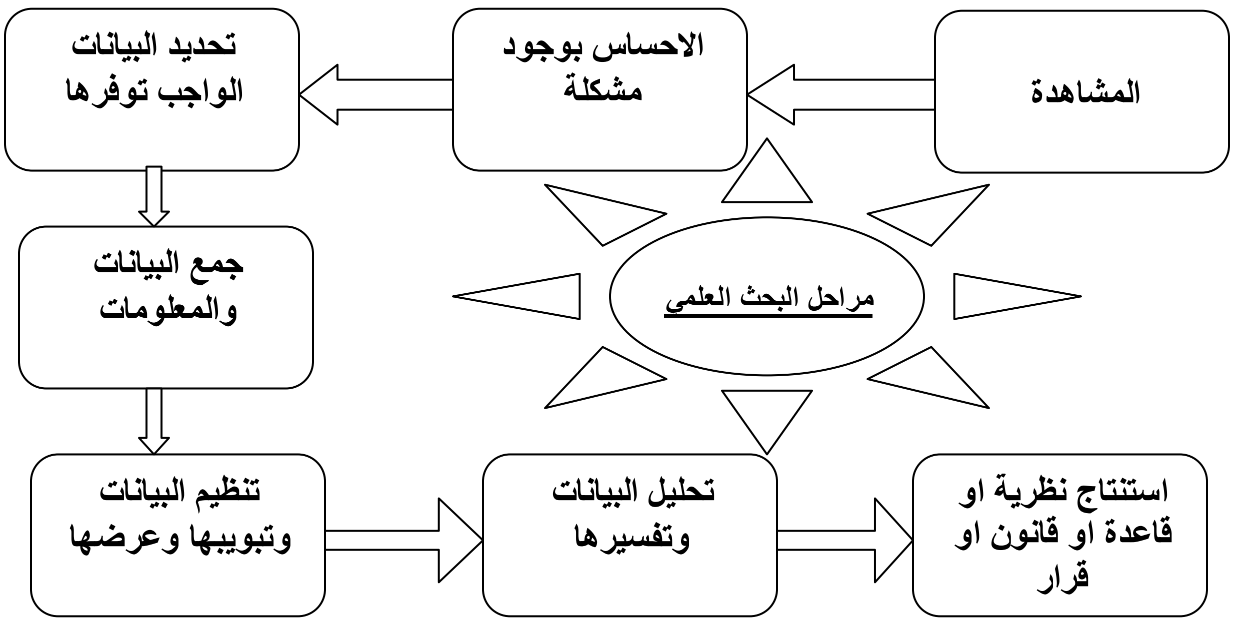
المقدمة :-

الغرض من العلم (بوجه عام) هو البحث عن الحقيقة ، والبحث العلمي هو الوسيلة للوصول الى حقائق الاشياء والظواهر ومعرفة كل العلاقات التي تربط بينها وبعضها البعض ، سواء كانت هذه الظواهر اجتماعية او اقتصادية او طبيعية او غير ذلك ، لذا يستخدم البحث العلمي العلم بقصد دراسة ظاهرة معينة لاكتشاف حقائقها ومعرفة القواعد العامة التي تحكمها.

والاحساس بوجود مشكلة (او ظاهرة) ما يمثل شرطاً اساسياً للقيام ببحث علمي ، وهذا الاحساس لا يأتي الا من خلال المشاهدة للظواهر المختلفة . وهذا يتطلب تحديد البيانات الواجب توفرها حتى يمكن اجراء البحث والوصول الى نتائج مقبولة يمكن الاعتماد عليها في تفسير تلك الظواهر المختلفة التي قد تثير الاهتمام .

يأتي بعد ذلك جمع لتلك البيانات من مصادرها المختلفة وتنظيماتها وتبويبها وعرضها في صور جدولية او بيانية ، ثم يتم استخدامها في حساب بعض المقاييس الخاصة بهذه الظواهر واجزاء تحليل لتلك البيانات بما يساعد في تفسير النتائج المختلفة للبيانات واستخدامها في استنتاج نظرية او قاعدة او قانون او المساعدة في اتخاذ القرارات او التنبؤ بنتائج مستقبلية .

الشكل التالي يمكن ان يوضح الاطار العام لاى بحث علمي :-



(٢) مفهوم علم الاحصاء :-

يختص علم الاحصاء بالطرق العلمية لجمع وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول الى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

وقديماً عرف علم الاحصاء على انه جمع البيانات عن ظاهرة معينة وترتيبها في جدول او عرضها في صور رسومات واشكال بيانية بسيطة . ومن ثم استخدم اطلاح علم الاحصاء لتعبير عن البيانات والمقاييس المستخرجة من تلك البيانات (مثل المتوسطات) ، وعلى هذا الاساس نتحدث عن احصاءات البطالة والحوادث والمواليد والوفيات ....الخ .

لكن في حقيقة الامر هذا ذي معنى ضيق لاصطلاح ((علم الاحصاء)) لكن مع تقدم العلوم بدا علم الاحصاء يلعب دوراً متزايداً في حياتنا اليومية بحيث اصبح يشغل حيزاً كبيراً بين بقية العلوم الاخرى . فأصبح يبحث في جميع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها واستنتاج وتوقع نتائج واتخاذ قرارات .

اقسام علم الاحصاء

الإحصاء الوصفي

وهو يهتم بجمع وتبويب وعرض ووصف البيانات وحساب بعض المقاييس الخاصة بها دون الوصول الى نتائج او استدلالات خاصة

الإحصاء الاستقرائي

ويسمى ايضاً الاستدلال الاحصائي :- وهو يبحث في استقراء النتائج واتخاذ القرارات .

(٣) المجتمع والعينة :-

مثلا لتحليل نتائج طلاب المملكة في مقرر الانجليزية لطلاب وطالبات الثانوية العامة ، فمن المستحيل او غير العلمي ان نقوم بجمع درجات جميع الطلاب في هذا المقرر على مستوى المملكة وتنظيمها وتحليلها ثم نستنتج بعض النتائج من هذا التحليل ، هنا يكون المجتمع هو جميع طلاب المملكة .
اذا المجتمع هو :- المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد او اشياء .

فبدلاً من ذلك نقوم باختيار عينة من هؤلاء الطلاب (تحت شروط معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع) ونقوم بتحليل بيانات هذه العينة ونخرج من هذا التحليل باستدلالات تخص المجتمع ككل .
اذا العينة هي :- مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح .

(٤) البيانات :-

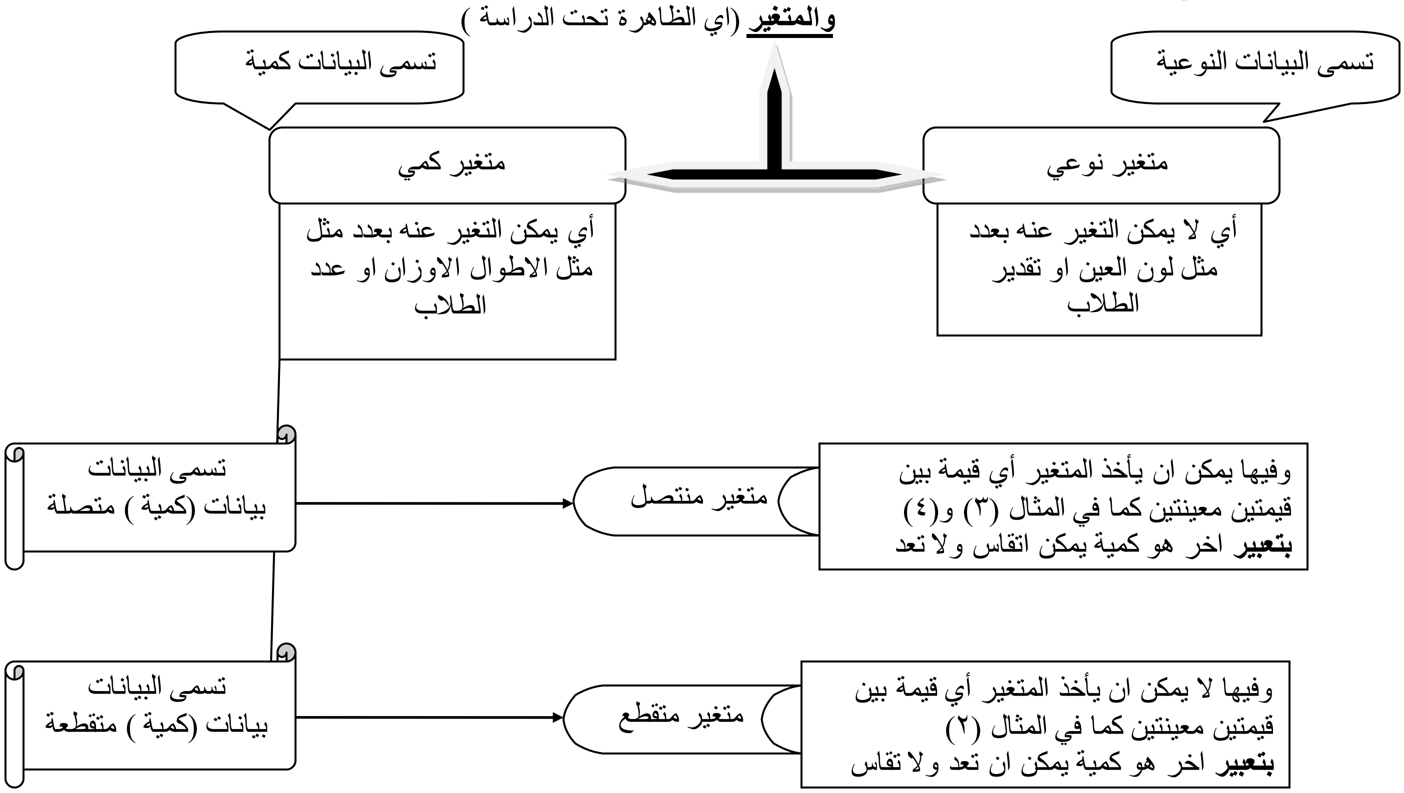
يمكن ببساطة تعريف البيانات على انها مجموعة من ((المشاهدات او القياسات)) التي تخص الظاهرة تحت الدراسة ، والكمية التي نقوم بمشاهدتها او قياسها تسمى ((المتغير)) وعادة نرمز للمتغير برمز B , A , Y , X

امثلة لتوضيح

مثال	العملية الاحصائية (الدراسة)	البيانات (القياسات او المشاهدات)	المتغير (X)
(١)	لون عين بعض الاطفال حديثي الولادة	اخضر – ازرق – بني -	لون العين
(٢)	عدد الطلاب في فصول المدرسة	١٥ – ١٨ - ٢٠ - ٢٥ - ١٧	عدد الطلاب
(٣)	اطوال مجموعة من الطلاب في فصل ما (بالمتر)	١،٥ - ١،٥٢ – ١،٧١ - ١،٨٣	طول الطالب
(٤)	اوزان بعض العاملات بمصنع معين (بالكيلو جرام)	٥٥،٢ - ٦٠،١ - ٦٣،٣٥ – ٧٠،٥٢	وزن العاملة
(٥)	تقديرات عدد من الطلاب في مقرر الاحصاء	A - B - C - F - A - C - B	تقدير الطالب

اقسام المتغير

١ - متغير نوعي
٢ - متغير كمي



اقسام المتغير

١ - **متغير نوعي :-** أي لا يمكن التغير عنه بعدد مثل لون العين او تقدير الطلاب (تسمى البيانات النوعية)
٢ - **متغير كمي :-** أي يمكن التغير عنه بعدد مثل مثل الاطوال الاوزان او عدد الطلاب (تسمى البيانات كمية)
وينقسم المتغير الكمي الى :-

- **متغير متصل :-** وفيها يمكن ان يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين معينتين كما في المثال (٣) و(٤) .
بتعبير اخر هو كمية يمكن ان تقاس ولا تعد وتسمى البيانات عندئذ بيانات (كمية) متصلة.
- **متغير متقطع :-** وفيها لا يمكن ان يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين معينتين كما في المثال (٢) .
بتعبير اخر هو كمية يمكن ان تعد ولا تقاس و تسمى البيانات عندئذ بيانات (كمية) متقطعة.

(٥) خطوات العملية الإحصائية

يمكن تلخيص خطوات أي عملية إحصائية في الاتي:-

(١) جمع البيانات :- هي خطة الحصول على القياسات الخاصة بظاهرة معينة وعادةً ما نسمي البيانات المجمعة **"بيانات الخام"**.
(٢) تنظيم وعرض البيانات :- هي عملية وضع البيانات السابقة في جداول خاصة وعرضها بطريقة مناسبة.
(٣) تحليل البيانات :- هي عملية إيجاد مقاييس تتحدد قيمها من البيانات السابقة وتعطي بعض الدلالات عن الظاهرة تحت الدراسة.
(٤) استقراء النتائج واتخاذ القرارات :- هي الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من خلال تحليله للبيانات السابقة وعادةً ما تكون على شكل تقديرات او تنبؤات او تعميمات او قرارات بالرفض او القبول

المحاضرة الثانية
التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

١- مقدمة ((البيانات النوعية – الكمية – المنفصلة))

٢- عرض البيانات المنفصلة

- ❖ تحديد المدى
- ❖ تفريغ البيانات
- ❖ عرض البانات عن طرق الجداول
- ❖ العرض البياني للبيانات

الاعمدة البسيطة – القضبان البسيطة – المضلع التكراري – المنحنى التكراري – طريقة الدائرة

(١)المقدمة

ذكرنا في الباب السابق (الباب الاول) ماهي:-

- البيانات ((هي مجموعة المشاهدات او القياسات التي تخص ظاهرة معينة تحت الدراسة))
- المتغير على انه تلك الكمية التي تقوم بمشاهدتها او قياسها ، كما ذكرنا ان البيانات إما ان تكون نوعية او كمية ، حيث :

(أ) البيانات النوعية:- هي تلك البيانات التي لا يمكن التعبير عن متغيرها بعدد (أي بيانات غير رقمية) امثلة على ذلك :-

- لو (او نوع السيارات الموجودة في موقف ما (احمر – ابيض – اسود - ....)
- الحالة الاجتماعية للسيدات في محافظة معينة (متزوجة – عزباء –مطلقة – ارملة –منفصلة)
- رايك في قرار خاص بالمؤسسة التي تعمل بها (أوافق بشدة – أوافق – اعترض – اتحفظ - ....)
- وغيرة من مثل هذه الأمثلة .

(ب) البيانات الكمية :- ((هي تلك البيانات التي تعبر فيها عن المتغير بعدد (أي بيانات رقمية) ، وهذه البيانات بدورها تنقسم الى :-

(ب-١) بيانات كمية متصلة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين (أي بيانات يمكن أن تقاس ولا تعد أمثلة على ذلك :-

- أطوال الطلاب في إحدى المدارس .
- أوزان العاملات بإحدى المصانع .
- الدخل السنوي لمنسوبي مؤسسة معينة .

(ب-٢) كمية متقطعة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير قيمة على (إما ....أو..........وليس أي قيمة بينهما) ، وبتعبير اخر هى بيانات يمكن أن تقاس ولا تعد مثل عدد طلاب الفصول المختلفة في مدرسة ما (قد يكون ٢٥ او ٢٦ ولا يمكن ان يكون ٢٥,٥)

والبيانات المنفصلة إما ان تكون بيانات نوعية أو كمية متقطعة

والان سوف نستعرض في البند التالي (بإذن الله) كيفية عرض البيانات المنفصلة

(٢)عرض البيانات المنفصلة :-

كما ذكرنا في البند السابق أن البيانات المنفصلة إما أن تكون بيانتا نوعية او بيانات كمية متقطعة يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) قيماً محددة ولا يأخذ قيماً موزعة على فترة ، وهذه البيانات يمكن عرضها بطرق مختلفة منها :

- الجداول
- ومنها الأشكال البيانية .

ولتوضيح ذلك دعنا نتعامل مع المثال التوضيحي التالي :-

مثال توضيحي (٢-١) :-
قام احد الباحثين بجمع البيانات التالية عن درجة الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية بالثانوية العامة بأخذ الفصول المتميزة بإحدى مدارس المنطقة الشرقية وكانت الدرجات كالتالي (**العظمى** ١٠٠)

مثال توضيحي (٢-١) : قام أحد الباحثين بجمع البيانات التالية عن درجة الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية بالثانوية العامة بأحد الفصول المتميزة بإحدى مدارس المنطقة الشرقية وكانت الدرجات كالتالي (الدرجة العظمى 100) :

92	98	99	94	93	95	99	99	95	100
94	95	92	95	96	93	95	94	95	97

و المطلوب تنظيم وعرض النتائج السابقة بطريق عرض مختلفة .

البيانات المعطاة في المثال تمثل الخطوة الأولى في أي عملية إحصائية وهي عملية "جمع البيانات" ، والبيانات هنا معطاة على صورة "بيانات خام " أي بيانات كاملة لكن في صورة غير منظمة ،
ولتنظيم هذه البيانات نحاول تكوين ما يُسمى بالتوزيع التكراري لهذه البيانات ،

ويتم ذلك كالآتي
١- تحديد المدى
٢- تفريغ البيانات في الجدول

- تحديد المدى [وسنرمز له بالرمز R]

وهو "الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة" في البيانات المعروضة

92	98	99	94	93	95	99	99	95	100
94	95	92	95	96	93	95	94	95	97

ويمكن بسهولة ملاحظة أن أكبر قيمة = 100

وأن أقل قيمة = 92

وبالتالي يكون المدي مساوياً لـــ :

$R = 100 - 92 = 8$

- تفريغ البيانات

$\cancel{92}$	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$	$\cancel{94}$	$\cancel{93}$	$\cancel{95}$	$\cancel{99}$	$\cancel{99}$	$\cancel{95}$	$\cancel{100}$
$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{92}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	$\cancel{93}$	$\cancel{95}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{97}$

جدول (٢-١) تفريغ البيانات

المتغير (الدرجة) x	تفريغ البيانات (العلامات)
92	II
93	II
94	III
95	~~IIII~~ I
96	I
97	I
98	I
99	III
100	I

٣- عرض البيانات عن طريق الجدول ويسمى (الجدول او التوزيع) التكراري النسبي

• عرض البيانات عن طريق الجداول

التوزيع (الجدول) التكراري

التكرار f	العلامات	الدرجة x
2	‖	92
2	‖	93
3	‖‖‖	94
6	𝍸 ‖	95
1	‖	96
1	‖	97
1	‖	98
3	‖‖‖	99
1	‖	100
$\sum f = 20$		

مجموع التكرارات (الطلاب)
وتُقرأ سيجما f

التوزيع (الجدول) التكراري النسبي

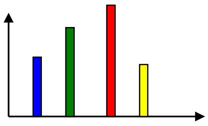
التكراري النسبي $\bar{f}$ $(f/\sum f =)$	التكرار f	الدرجة x
2/20 = 0.1 or 0.1 x 100 = 10%	2	92
2/20 = 0.1 or 0.1 x 100 = 10%	2	93
3/20 = 0.15 or 0.15 x 100 = 15%	3	94
6/20 = 0.3 or 0.3 x 100 = 30%	6	95
1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%	1	96
1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%	1	97
1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%	1	98
3/20 = 0.15 or 0.15 x 100 = 15%	3	99
1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%	1	100
$\sum \bar{f} = 1$ or $\sum \bar{f} = 100\%$	$\sum f = 20$	

هناك طرق اخرى لعرض البيانات المنفصلة

١- الاعمدة ٢- القضبان ٣- المضلع التكراري ٤- المنحنى التكراري ٥- الدوائر

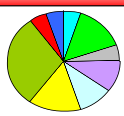
• العرض البياني للبيانات المنفصلة : طرق شتى منها

طريقة الأعمدة



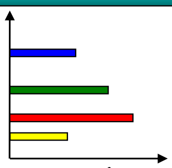
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بعمود (خط رأسي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

طريقة الدائرة



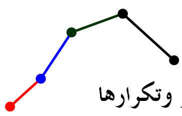
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة وذلك طبقاً لتكرارها

طريقة القضبان



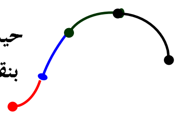
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقضيب (خط أفقي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

المضلع التكراري



حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة)

المنحنى التكراري

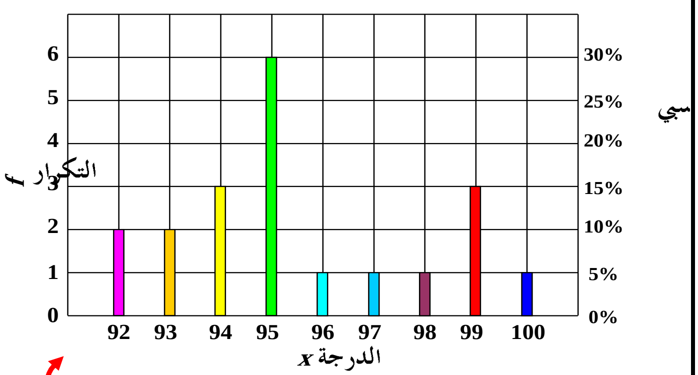


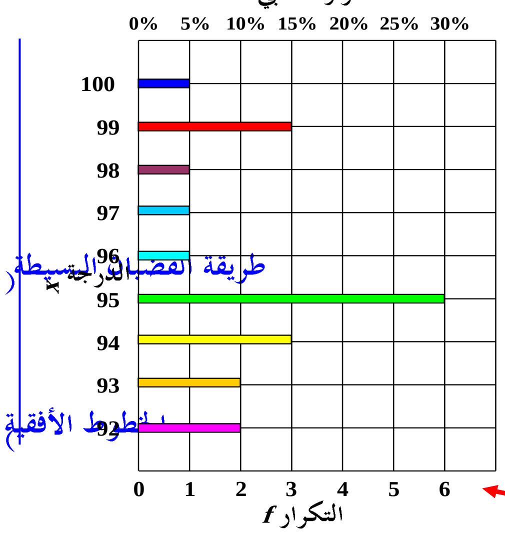
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط ممهد (بواسطة اليد)

الطريقة الاولى (**الاعمدة**) كما هو مبين في الشكل — **الطريقة الثانية** (**القضبان**)) كما هو مبين في الشكل

الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

طريقة الأعمدة البسيطة (الخطوط الرأسية)



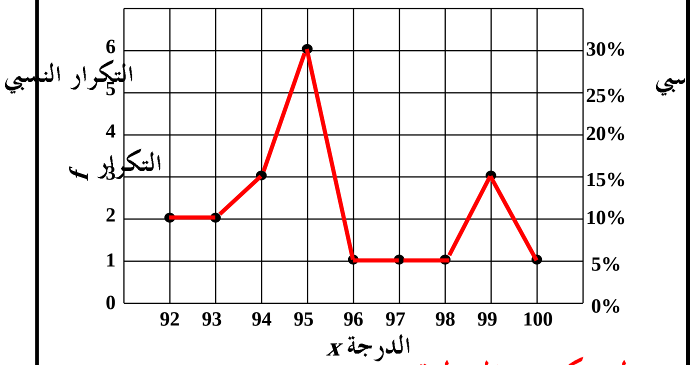


وفي الطريقتين لا يهم عرض المستطيلات لكن من المهم جداً أن تكون الأعمدة أو القضبان منفصلة عن بعضها

الطريقة الثالثة (**المضلع**) كما هو مبين في الشكل — **الطريقة الرابعة** (**المنحنى**) كما هو مبين في الشكل

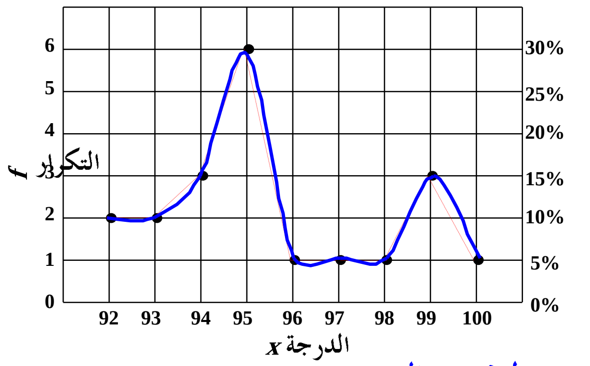
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

المضلع التكراري [المضلع التكراري النسبي]



خط منكسر (بالمسطرة)

المنحنى التكراري [المنحنى التكراري النسبي]



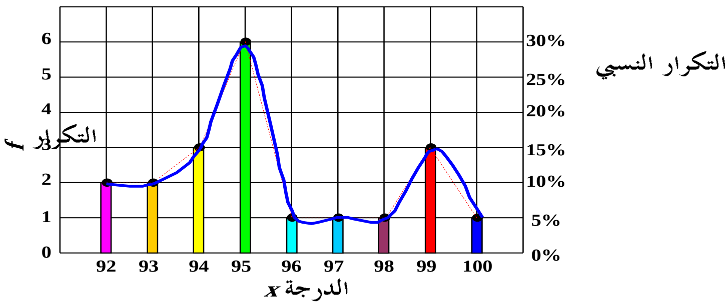
خط ممهد (باليد)

في الأسلوبين تُمثل كل قيمة من قيم المتغير (الدرجة) X بنقطة إحداثيها الأفقي هو قيمة المتغير وإحداثيها الرأسي هو قيمة التكرار [أو التكرار النسبي] المناظر لتلك القيمة

وهنا يبين لنا انه يمكن جمع الطريقتين في شكل بياني واحد {الطريقة الثالثة (**المضلع**) و الطريقة الرابعة (**المنحنى**) كما هو مبين في الشكل}

لاحظ أنه يمكن الجمع بين أكثر من طريقة لعرض البيانات

الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي f	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%



طرق مختلفة للعرض

طريقة الأعمدة البسيطة

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي)

المنحنى التكراري (أو التكراري النسبي)

الطريقة الخامسة (**الدائرة**) كما هو مبين في الشكل

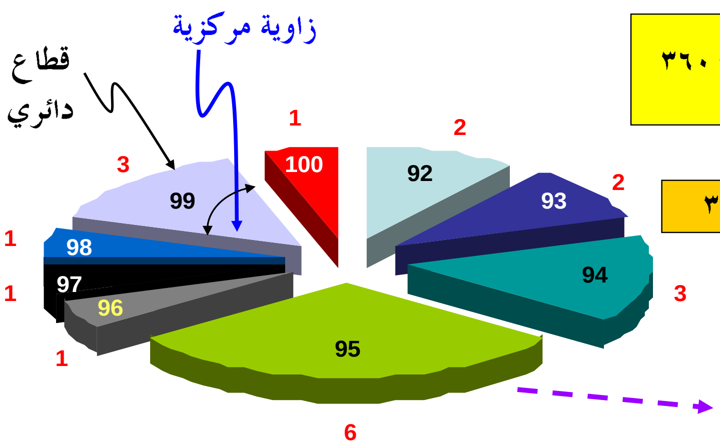
والآن نتناول طريقة أخرى لتمثيل البيانات بيانياً وهي طريقة **الدائرة** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة بقطاع من دائرة تحدد زاويته المركزية بالعلاقة :

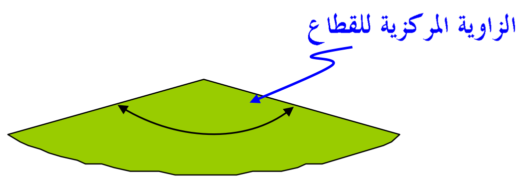
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1

الزاوية المركزية لقيمة ما = $\frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}}$ × ٣٦٠

أو

الزاوية المركزية لقيمة ما = التكرار النسبي للقيمة × ٣٦٠





القيم داخل القطاعات تمثل الدرجة (المتغير) x والقيم المكتوبة خارج القطاعات باللون الأحمر تمثل التكرار f

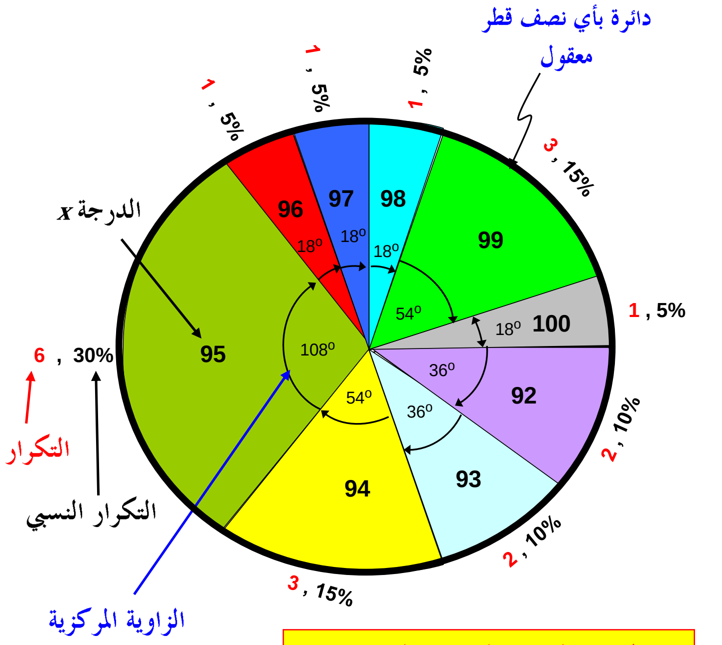
القطاع الخاص بالدرجة "95" ذات التكرار 6
قياس زاويته المركزية تساوي :

$$\frac{6}{20} \times 360 = 108^{o}$$

وهنا نوضح كيف استطعنا تمثيل البيانات على الدائرة (علماً بأن درجة الدائرة ٣٦٠ درجة)

إذن لابد من حساب الزاوية المركزية المناظرة لكل قيمة من قيم المتغير x (الدرجة) ، وهذه القيم مبينة بالجدول التالي :

الزاوية المركزية	التكرار f	الدرجة x
$(2/20)\times360 = 36^o$	2	92
$(2/20)\times360 = 36^o$	2	93
$(3/20)\times360 = 54^o$	3	94
$(6/20)\times360 = 108^o$	6	95
$(1/20)\times360 = 18^o$	1	96
$(1/20)\times360 = 18^o$	1	97
$(1/20)\times360 = 18^o$	1	98
$(3/20)\times360 = 54^o$	3	99
$(1/20)\times360 = 18^o$	1	100
مجموع الزوايا = 360^o	$\sum f = 20$	



طريقة الدائرة لتمثيل البيانات

مثال توضيحي على ما سبق

مثال (٢-٢) : في دراسة قام بإجرائها أحد الأطباء لطفل معرض لأحد الأمراض النفسية ، تم سؤاله عن لون مجموعة من الأشياء فكانت إجاباته كما يلي :

أحمر	أزرق	بنفسجي	أحمر	أخضر
أبيض	أبيض	أحمر	أخضر	أبيض
أزرق	أحمر	أخضر	أحمر	بنفسجي
أخضر	أزرق	أبيض	بنفسجي	أحمر

المطلوب : عرض البيانات السابقة بطرق مختلفة

ملحوظة : إذا لم يُذكر أمام المثال أنه مثال توضيحي ننصح القارئ بأن يقوم بحله بمفرده ويقارن حله بالحل التفصيلي المعطى

بداية الحل : نقوم أولاً بتفريغ البيانات [تحويلها من صورتها الخام إلى صورة منظمة] وتكوين الجدول (التوزيع) التكراري (والتكراري النسبي)

حل المثال التوضيحي :

هذا كل ما يمكن أن تحتاجه

نحتاجه فقط عند تمثيل البيانات بطريقة الدائرة

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)	عمود (٥)	عمود (٦)
المتغير (اللون) x	العلامات	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f}$	التكرار النسبي $\bar{f}$ (كنسبة مئوية)	الزاوية المركزية
أحمر	𝍸 I	6	6/20 = 0.30	(6/20) x 100 = 30%	0.3x360 = 108°
أزرق	IIII	4	4/20 = 0.20	(4/20) x 100 = 20%	0.2x360 = 72°
بنفسجي	III	3	3/20 = 0.15	(3/20) x 100 = 15%	0.15x360 = 54°
أبيض	IIII	4	4/20 = 0.20	(4/20) x 100 = 20%	0.2x360 = 72°
أخضر	III	3	3/20 = 0.15	(3/20) x 100 = 15%	0.15x360 = 54°
		$\sum f = 20$	$\sum \bar{f} = 1$	$\sum \bar{f} = 100\%$	المجموع = 360°

الجدول (التوزيع) التكراري

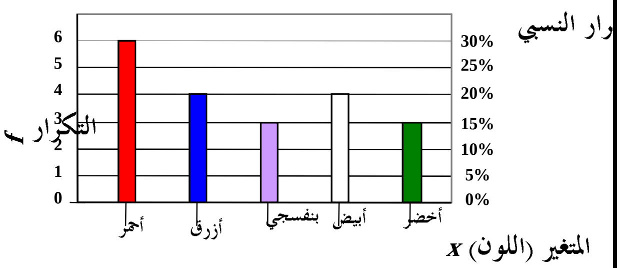
الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

نستبدل العمود (٤) بالعمود (٥) إذا كان التكرار النسبي مطلوب كنسبة مئوية

للاسترشاد به فقط

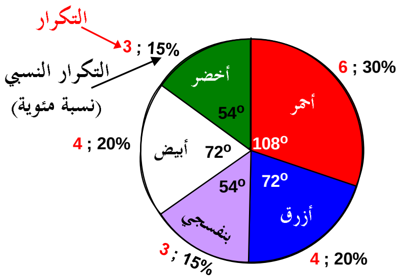
[التفاصيل في الصفحة السابقة]

تمثيل البيانات بطريقة الأعمدة البسيطة

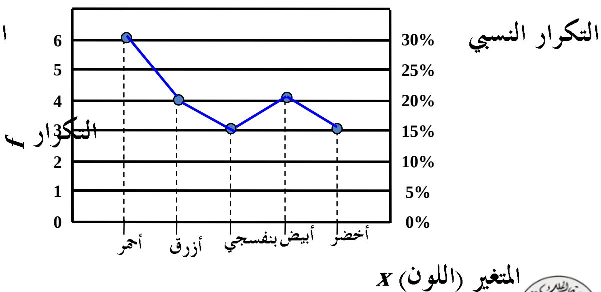


x	f	الزاوية
أحمر	6	108
أزرق	4	72
بنفسجي	3	54
أبيض	4	72
أخضر	3	54

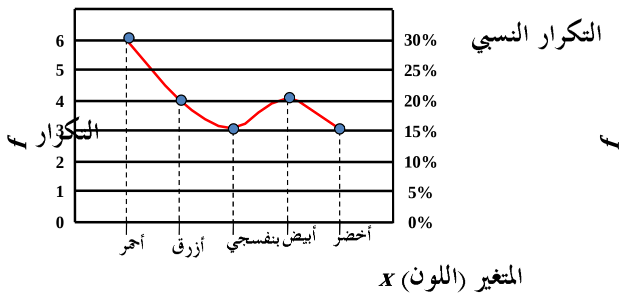
تمثيل البيانات بطريقة الدائرة



تمثيل البيانات بطريقة المضلع التكراري (النسبي)



تمثيل البيانات بطريقة المنحنى التكراري (النسبي)



المحاضرة الثالثة
تابع التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة
١- تمارين محلولة على ما سبق
٢- عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهر
❖ طريقة الاعمدة المزدوجة
❖ طريقة الاعمدة المجزئة
❖ طرق اخرى

تمارين محلولة (٢-١)

س ١ : الجدول التالي يبين عدد السيارات الموجودة في أحد المواقف طبقاً لنوع السيارة ، المطلوب عرض هذه البيانات بطرق بيانية مختلفة

نوع السيارة	شيفروليه C	نيسان N	تويوتا T	لانسر L	هيونداي H	مرسيدس M
عدد السيارات	20	30	50	30	60	10

الحل :

$$\frac{f}{\sum f}\times 360 \quad \text{or} \quad \bar{f}\times 360$$

نوع السيارة — عدد السيارات — $f/\sum f$

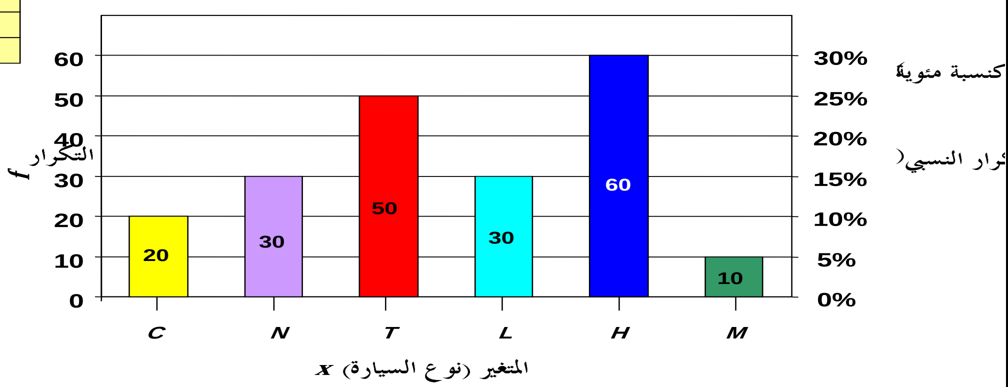
المتغير x	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f}$	الزاوية المركزية
C	20	0.10 or 10%	36°
N	30	0.15 or 15%	54°
T	50	0.25 or 25%	90°
L	30	0.15 or 15%	54°
H	60	0.30 or 30%	108°
M	10	0.05 or 5%	18°
	200	1 or 100%	360°

$\sum f$ — $\sum \bar{f}$ — مجموع الزوايا المركزية

تماماً مثل آخر مثال في المحاضرة السابقة

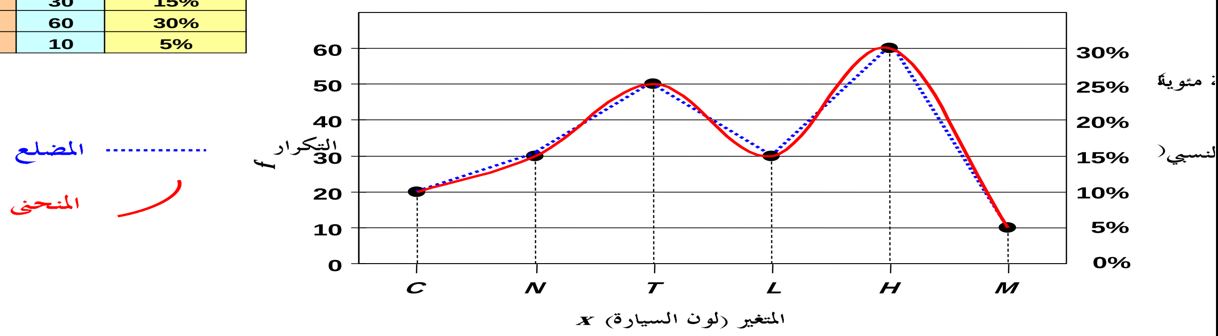
طريقة الأعمدة البسيطة

x	التكرار	التكرار النسبي
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%



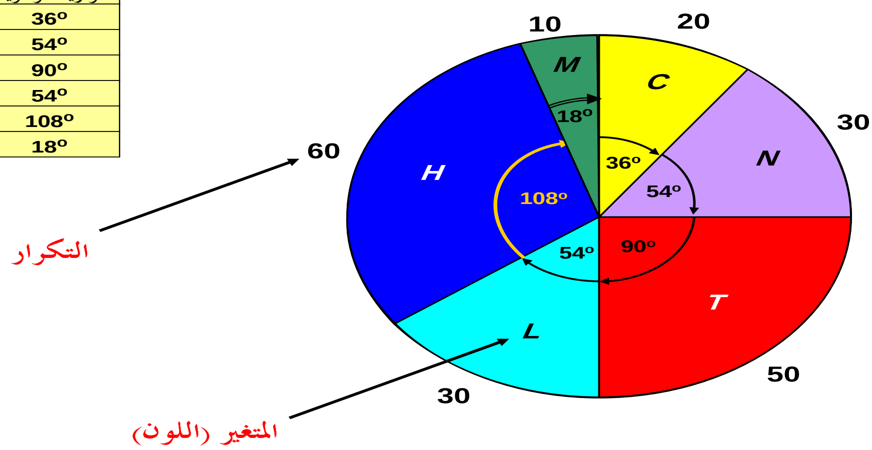
طريقة المضلع أو المنحنى التكراري (التكراري النسبي)

x	التكرار	التكرار النسبي
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%



طريقة الدائرة

x	التكرار	الزاوية المركزية
C	20	36°
N	30	54°
T	50	90°
L	30	54°
H	60	108°
M	10	18°



س ٢ : المدى لمجموعة من البيانات المنفصلة هو :

- ○ أكثر القيم تكراراً في البيانات
- ○ أكبر قيمة في البيانات
- ○ أصغر قيمة في البيانات
- ● الفرق بين أكبر وأصغر قيمتين في البيانات

س ٣ : الجدول المرافق يبين درجات ٢٠ طالباً في أحد المقررات الدراسية :

الدرجة	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار	2	2	3	6	1	1	1	3	1

(أ) عدد الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هو :

○ 3 ○ 0.15 ○ 4 ● 7

(ب) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 94 هو :

○ 3 ○ 0.15 ● 4 ○ 7

(ج) نسبة الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

● 0.35 ○ 35% ○ 4 ○ 7

(د) النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

○ 0.35 ● 35% ○ 4 ○ 7

هامش للإجابة

(٣–أ) 7 = 3 + 2 + 2

(٣–ب) 4 = 2 + 2

(٣–ج) $\frac{7}{20} = 0.35$

خد بالك : المطلوب نسبة (وليس نسبة مئوية)

(٣–د) 0.35 x 100 = 35%

أيوه .. ، ده بقى نسبة مئوية

س ٤ : الجدول المقابل يبين الجدول التكراري لأعمار عدد من الممرضات (لأقرب سنة) اللاتي تعملن في أحد أقسام إحدى المستشفيات ، من هذا الجدول أجب على الأسئلة التالية :

المتغير (العمر) x	التكرار (العدد) f	الزاوية المركزية
20	20	72°
25	?	36°
30	30	?
35	?	?
	$\sum f$	

(أ) عدد الممرضات ذات العمر 25 سنة هو :

10 ○ 20 ○ 30 ○ 40

(ب) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 30 سنة هي :

36° ○ 72° ○ 108° ○ 144°

(ج) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 35 سنة هي :

36° ○ 72° ○ 108° ○ 144°

(د) عدد الممرضات الكلي [أي مجموع التكرارات $\sum f$] هو :

95 ○ 100 ○ 105 ○ 110

هامش للإجابة

(٤–أ) هناك تناسب بين التكرار والزاوية المركزية ، إذن :

20	72°
?	36°

72 x ? = 36 x 20 , ∴ ? = 10

(٤–ب) بنفس الأسلوب السابق

20	72°
30	?

72 x 30 = ? x 20 , ∴ ? =108°

(٤–ج) مجموع الزوايا المركزية يجب أن يكون 360°

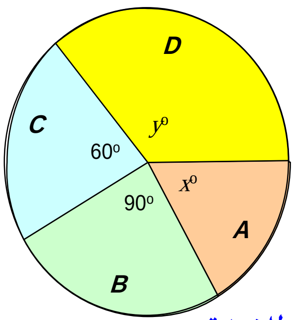
∴ 72 + 36 + 108 + ? = 360 , ∴ ? = 144°

(٤–د) هناك أكثر من طريقة أميزها الأسلوب المتبع في الجزئين (أ) ، (ب) :

20	72°
$\sum f$	360°

$360 \times 20 = 72 \times \sum f$, $\therefore \sum f = 100$

س ٥ : الشكل المقابل يبين مبيعات أربع شركات *A , B , C , D* (لبيع لعب الأطفال) وذلك خلال عيد الفطر المبارك ، فإذا كان عدد اللعب الكلي التي تم بيعها بواسطة هذه الشركات هو 5400 لعبة ، أجب على الأسئلة التالية :



(أ) النسبة المئوية لمبيعات الشركة *B* هي :

25% ○ 30% ○ 40% ○ 60%

(ب) عدد اللعب التي باعتها الشركة *B* هو :

2700 ○ 2250 ○ 900 ○ 1350

(ج) عدد اللعب التي باعتها الشركتان *A , D* معاً هو :

900 ○ 2250 ○ 3150 ○ 1350

(د) وإذا كانت النسبة بين مبيعات الشركتين *A , D* هي 8 : 13 ، فإن قيمة x تكون :

150° ○ 80° ○ 90° ○ 60°

إيه رأيك نخلي الجزء (د) واجب ، والحل هو …………

هامش للإجابة

(٥–أ)

100%	360°
?	90°

360 x ? = 90 x 100

? = 25%

(٥–ب)

$\frac{25}{100} \times 5400 = 1350 \rightarrow \sum f$

(٥–ج)

الزاوية المركزية المناظرة لمبيعات الشركتين معاً تساوي

360 – (90 + 60) = 210°

5400	360°
?	210°

360 x ? = 210 x 5400

? = 3150

عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهرة

في بعض الأحيان نحتاج لدراسة ظاهرتين أو أكثر ، في هذه الحالة يمكن عرض البيانات بالطرق السابقة وطرق أخري كما يتضح من المثال التالي :

مثال توضيحي (٢-٣) : في دراسة قامت بها عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بُعد بجامعة الملك فيصل عن أعداد الطلاب والطالبات الذين تقدموا لاختبارات نهاية الفصل الدراسي الثاني للعام الجامعي 1431/1430 في تخصصات إدارة الأعمال والآداب والتربية الخاصة كانت البيانات كالتالي :

تخصص إدارة أعمال : 480 (طالبة) ، 1480 (طالب)

تخصص آداب : 2000 (طالبة) ، 3000 (طالب)

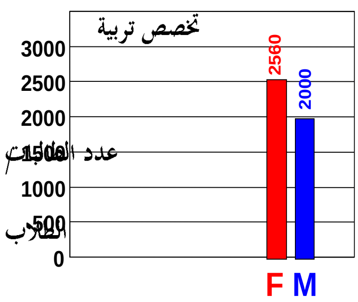
تخصص تربية خاصة : 2560 (طالبة) ، 2000 (طالب)

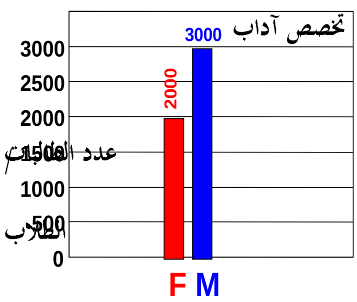
المطلوب عرض هذه البيانات بيانياً .

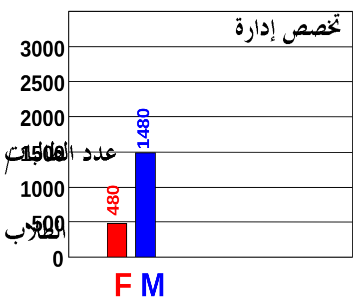
قبل أن نبدأ بعرض البيانات ، من المناسب أن نضع البيانات المرصودة في صورة جدول مناسب يسمح لنا بعرض هذه البيانات وأيضاً يسمح لنا بالمقارنات المختلفة .فإذا رمزنا للطالبات بالرمز F (Female) وللطلبة بالرمز M (Male) يمكننا تكوين الجدول التالي :

	طالبات F	طلاب M
إدارة أعمال	480	1480
آداب	2000	3000
تربية خاصة	2560	2000

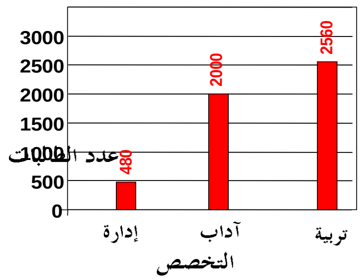
وبعد ذلك يمكن أن نقوم بعرض هذه البيانات بيانياً بطرق مختلفة منها أن نقوم بعرض أعداد الطالبات والطلاب لكل تخصص من التخصصات على حدى في ثلاثة رسومات منفصلة باستخدام طريقة الأعمدة البسيطة (مثلاً) كما هو مبين :



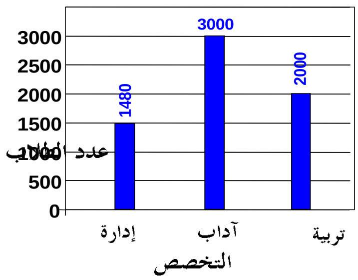




كما يمكننا أيضاً عرض بيانات الطالبات في كل التخصصات على رسمة ، وبيانات الطلاب على رسمة أخرى كما هو مبين بالشكل التالي :



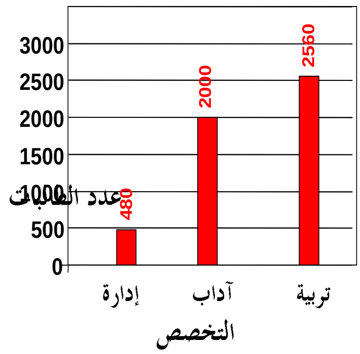
	طالبات F	طلاب M
إدارة أعمال	480	1480
آداب	2000	3000
تربية خاصة	2560	2000

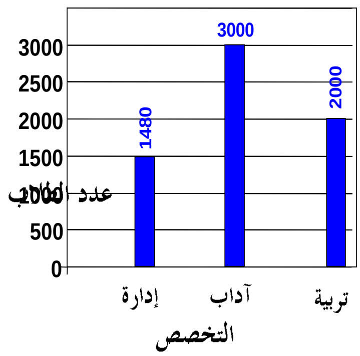


وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي

أليس من الممكن تجميع الرسومات السابقة في رسمة واحدة ؟

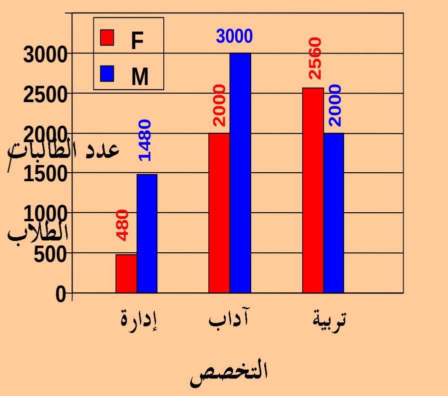
الإجابة : نعم ، وذلك عن طريق **الأعمدة المزدوجة** أو **الأعمدة المجزأة** كما هو مبين



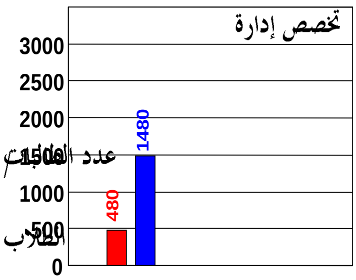


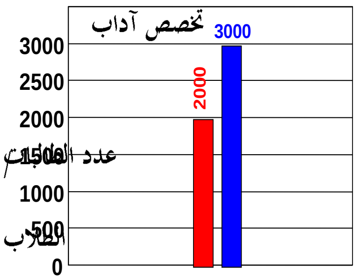
	F	M
إدارة أعمال	480	1480
آداب	2000	3000
تربية خاصة	2560	2000

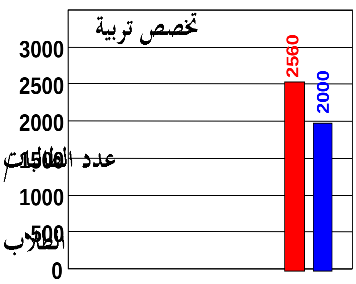
طريقة الأعمدة المزدوجة



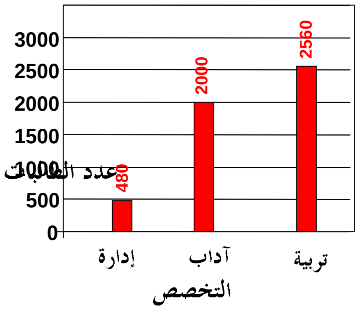
أي أن كل تخصص يُمثل بعمود مزدوج
مكون من عمودين بسيطين متلاصقين

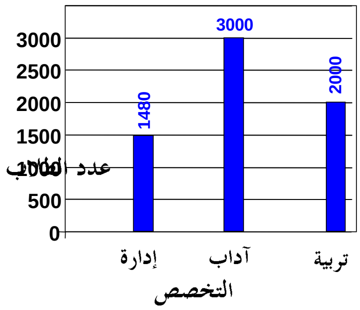


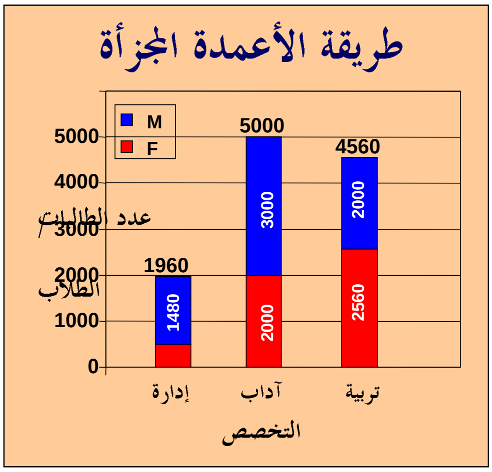


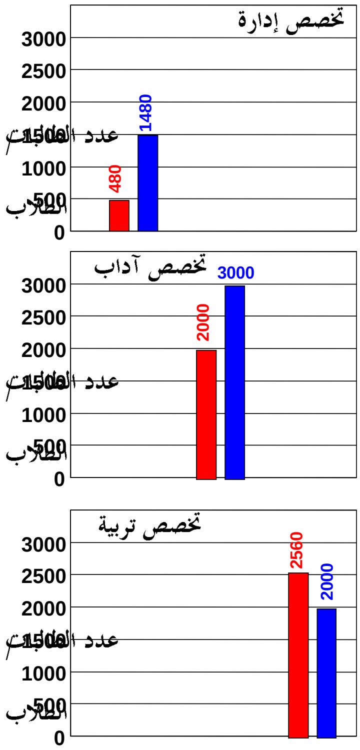


	F	M	المجموع
إدارة أعمال	480	1480	1960
آداب	2000	3000	5000
تربية خاصة	2560	2000	4560





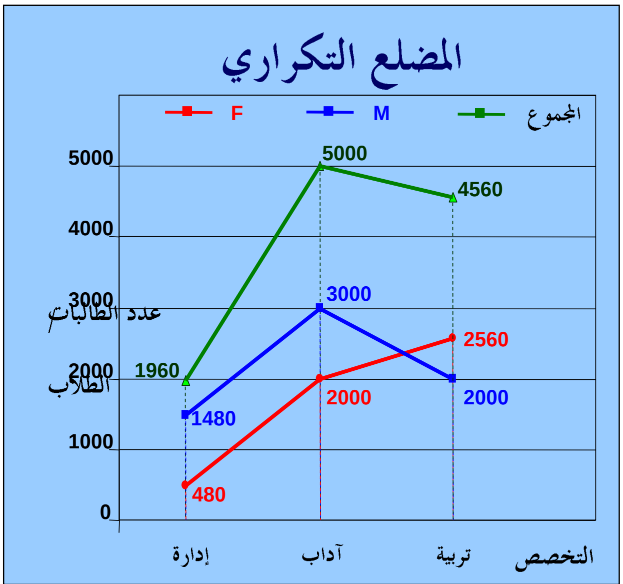


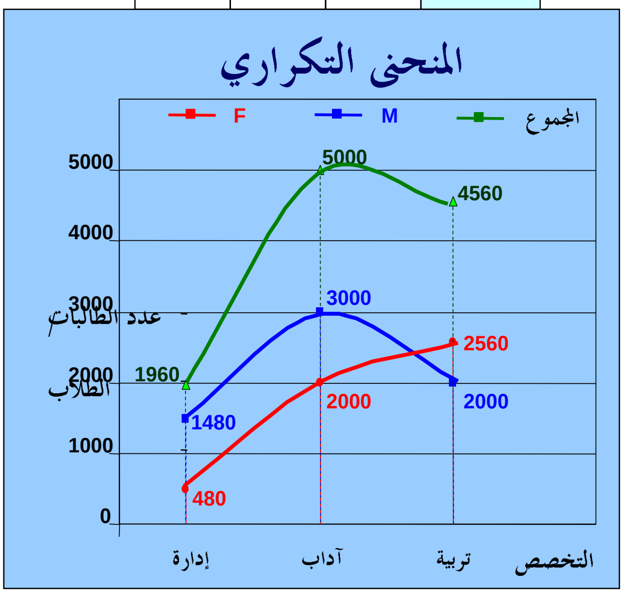


أي أن كل تخصص يُمثل بعمود طوله يُعبر عن مجموع عدد طالباته وطلابه معاً ثم يتم **تجزئته** إلى عمودين كل منهما يمثل فئة من الفئات

أيضاً نود التنويه أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة المضلع التكراري أو المنحنى التكراري كما هو مبين

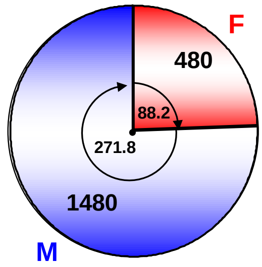
	F	M	المجموع
إدارة أعمال	480	1480	1960
آداب	2000	3000	5000
تربية خاصة	2560	2000	4560





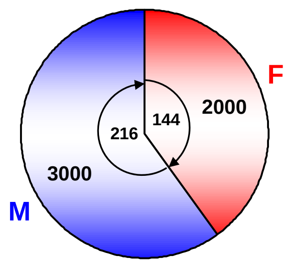
كما نود أن ننبه أيضاً إلى أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة الدائرة ، وهنا يمكن أن نتعامل مع العرض بأكثر من طريقة [كما في حالة الأعمدة] . من هذه الطرق أن نقوم برسم دائرة لكل تخصص على حده كما هو موضح

تخصص إدارة	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	480	1480	1960
الزاوية المركزية	88.2°	271.8°	360°



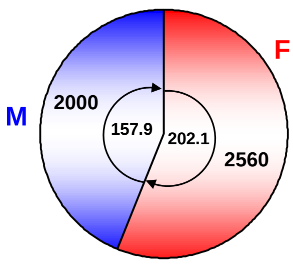
لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص إدارة أعمال

تخصص آداب	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2000	3000	5000
الزاوية المركزية	144°	216°	360°



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص آداب

تخصص تربية	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2560	2000	4560
الزاوية المركزية	202.1°	157.9°	360°

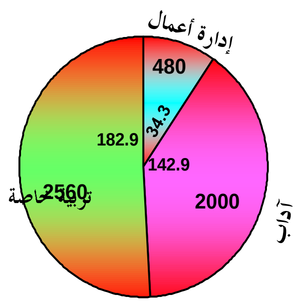


لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص تربية خاصة

أيضاً يمكن العرض باستخدام طريقة الدائرة وذلك برسم دائرتين : الأولى خاصة بطالبات جميع التخصصات والأخرى خاصة بطلاب جميع التخصصات كما هو موضح

الطالبات F	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	480	34.3°
تخصص آداب	2000	142.9°
تخصص تربية	2560	182.9°
المجموع	5040	≅ 360°

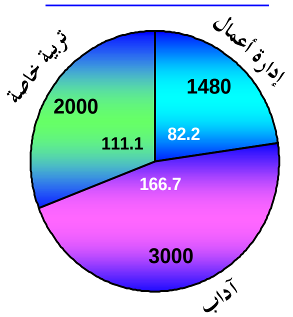
طالبات التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطالبات جميع التخصصات

الطلاب M	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	1480	82.2°
تخصص آداب	3000	166.7°
تخصص تربية	2000	111.1°
المجموع	6480	360°

طلاب التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلاب جميع التخصصات

وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي [وهو مشابه للسؤال الذي سألناه عند تعرضنا لطرق الأعمدة المزدوجة والمجزأة]

أليس من الممكن تجميع الرسومات السابقة في دائرة واحدة

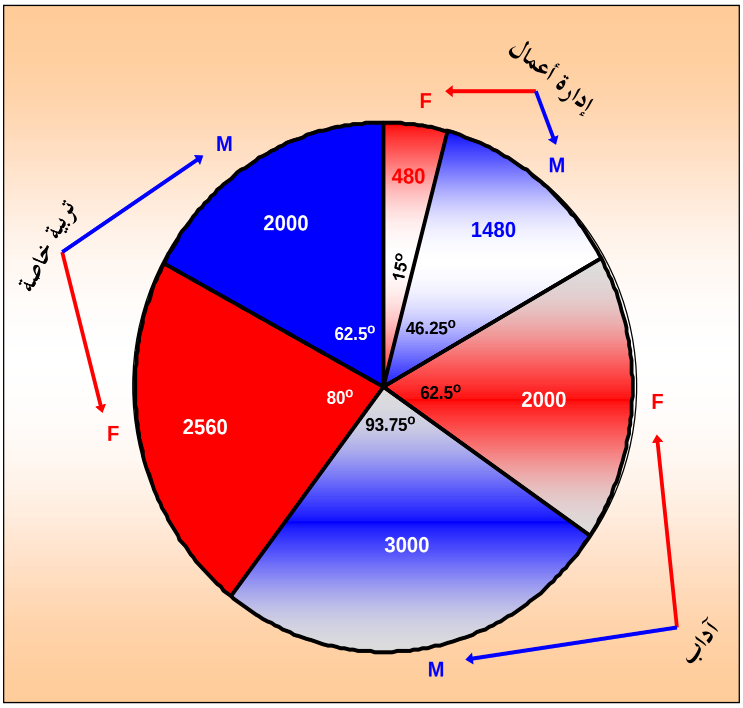
الإجابة نعم ، لكن لابد أن ننتبه إلى أن الزوايا المركزية هنا يجب أن تُحسب على أساس العدد الكلي للطلبة (طالبات + طلاب كل التخصصات) ، وبالتالي يجب تكوين الجدول المبين أولاً

	F	M	العدد الكلي في كل تخصص
إدارة أعمال	480 (15°)	1480 (46.25°)	1960 (61.25°)
آداب	2000 (62.5°)	3000 (93.75°)	5000 (156.25°)
تربية خاصة	2560 (80°)	2000 (62.5°)	4560 (142.5°)
العدد الكلي لكل جنس	5040 (157.5°)	6480 (202.5°)	11520 (360°)

▭ يمثل عدد الطالبات أو الطلاب (أي التكرار)، أما العدد الموجود داخل ◯ فيمثل الزاوية المركزية المناظرة لهذا التكرار

المجموع الكلي للطلبة (طالبات + طلاب) المتقدمين للاختبار في نهاية الفصل الثاني 1430 / 1431

والآن نقوم بعرض البيانات بالطريقة التقليدية التي تعلمناها :



ونهي هذه المحاضرة بالسؤال التالي لأبنائي الطلاب والطالبات ومتروك إجابته لهم ، لكن قبل أن نسأل السؤال نود التنويه للملحوظة التالية :

ملحوظة : سنستخدم اللفظ "**طالبات**" للتدليل على الطلبة **الإناث** ، واللفظ "**طلاب**" للتدليل على الطلبة **الذكور** ، واللفظ "**طلبة**" للتدليل على الطالبات والطلاب معاً .

السؤال : بالاسترشاد بالجدول المبين في الصفحة السابقة ، ما هي النسبة المئوية لطلاب (ذكور) تخصص آداب بالنسبة :

(أ) لجميع الطلبة (طالبات + طلاب) في كل التخصصات

26% تقريباً

(ب) لجميع الطلاب (ذكور فقط) في كل التخصصات

46.3% تقريباً

(ج) لطلبة (طالبات + طلاب) تخصصهم 60%

المحاضرة الرابعة

تابع التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

عرض البيانات الكمية المتصلة

(١) تمهيد

(٢) العرض بطريقة الجداول

- الجداول التكرارية (أو التكرارية النسبية)
- الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة)

(٣) العرض البياني للبيانات المتصلة

تمهيد

كما ذكرنا سابقاً، فإن البيانات المتصلة هي تلك البيانات التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) أية قيمة بين قيمتين محددتين [مثل الأطوال، الأوزان، درجات الحرارة، الدخل الشهري أو السنوي، وغيرها]. ويمكن عرض هذه البيانات أيضا عن طريق الجداول أو بيانيا. ولتوضيح ذلك دعنا ننظر للمثال التوضيحي التالي :

مثال توضيحي (٢-٤) : في تجربة على أطوال سيقان زهور معينة في أحد المعامل البحثية بكلية الزراعة بجامعة الملك فيصل، قيست سيقان 50 زهرة فكانت البيانات كالتالي :

x0≤	x< 20 20≤	x< 303x≤x<	35 35≤x<x0x	0≤x< 50 50≤	x< 60	
f4	16	12	1062			

حيث x هو طول الساق (بوحدات السنتيمتر)، f هو عدد الأزهار .

المطلوب عرض هذه البيانات بطرق مختلفة .

قبل أن نبدأ في عرض البيانات لابد من التذكير والتنويه للتالي :

١. البيانات هنا بيانات كمية متصلة فيها المتغير x (طول الزهرة) متغير كمي متصل .

٢. عدد الأزهار f هو تكرار المتغير x [وهذا واضح] .

٣. قيم المتغير x هنا معطاة على صورة ٦فترات أو ما يُسمى بـــ **الفئات** حيث :

الفئة		
الفئة الأولى :	$0 \le x < 20$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 0 إلى ما قبل 20
الفئة الثانية :	$20 \le x < 30$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 20 إلى ما قبل 30
الفئة الثالثة :	$30 \le x < 35$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي x0 إلى ما قبل x5
الفئة الرابعة :	$35 \le x < 40$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 35 إلى ما قبل 40
الفئة الخامسة :	$40 \le x < 50$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 40 إلى ما قبل 50
الفئة السادسة :	$50 \le x < 60$	يكون المتغير أكبر من أو يساوي 50 إلى ما قبل 60

الفئة	المتغير x(الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le X < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

انتبه للفرق بين المتباينات ،وطريقة قراءتها وأيضاً معناها

المتباينة	$x < 10$	$x \le 10$	$x > 10$	$x \ge x0$
طريقة القراءة	x أقل من 10	x أقل من أو تساوي 10	x أكبر من 10	x أكبر من أو تساوي 10
معناها	أي أن x لاتأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 1x وأيضاً تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x لاتأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأكبر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأكبر من 10

٤. لكل فئة حدان : **حد أدنى** ، **وحد أعلى**

- فالفئة الأولى : حدها الأدنى 0 وحدها الأعلى 20 [وهو الحد الأدنى للفئة الثانية]
- والفئة الثانية : حدها الأدنى 20 [الحد الأعلى للفئة الأولى] وحدها الأعلى 30 [وهو الحد الأدنى للفئة الثالثة]
- والفئة الثالثة : حدها الأدنى 30 [الحد الأعلى للفئة الثانية] وحدها الأعلى 35 [وهو الحد الأدنى للفئة الرابعة]

وهكذا .

الفئة	المتغير x(الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le X < 60$

أي أن الفئات متصلة ولا فراغات بينها ،والحد الأدنى لكل فئة من الفئات الوسطى [غير الأولى والأخيرة] هو الحد الأعلى للفئة السابقة ،والحد الأعلى لها هو الحد الأدنى للفئة التالية لها .

وعليه ،يمكن كتابة الفئات كما هو مبين

الفئة	المتغير x(الطول)	
الأولى	0-	من 0إلى ما قبل 20
الثانية	20-	من 2xإلى ما قبل 30
الثالثة	30-	من 30 إلى ما قبل 35
الرابعة	35-	من 35 إلى ما قبل 40
الخامسة	40-	من 40 إلى ما قبل 50
السادسة	50-6x	من 50 إلى ما قبل 60

٥. لكل فئة طول وهو يساوي الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى

• فالفئة الأولى طولها يساوي 20 والثانية طولها يساوي 10
والثالثة طولها يساوي 5 والرابعة طولها يساوي x
والخامسة طولها يساوي 10 ،أما السادسة (والأخيرة) فطولها يساوي 1x. أي أن الفئات [في هذا المثال] ليست متساوية في الطول

الفئه	المتغير x (الطول)	طول الفئه c
الأولى	x ≤ x< 20	20–0= 20
الثانية	20 ≤ x< 30	30– 20= 10
الثالثة	30 ≤ x< 35	35– 30=5
الرابعة	35 ≤ x< 40	40–3x=5
الخامسة	40 ≤ xx 50	x0– 40= 10
السادسة	50 ≤ x< 60	60– 50= 10

٦. لكل فئة مركز [وسنرمز له بالرمز x_0] وهي قيمة المتغير x الواقعة في منتصف تلك الفئة ،وتحسب ببساطة على أنها متوسط حديها الأدنى والأعلى ،أي أن :

$$\text{مركز أي فئة X} = \frac{\text{حد الفئة الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$$

الفئه	المتغير x (الطول)	مركز الفئه x_0
الأولى	x ≤ x< 20	(0+ 20) ÷ x= 10
الثانية	20 ≤ x< 30	(20+3x) ÷2= 25
الثالثة	30 ≤ x< 35	(30+ 35) x 2= 32.5
الرابعة	3x ≤ xx 40	(35+ 40) ÷ 2= 37.5
الخامسة	40 ≤ x< 50	(40+ 50) ÷ xx 45
السادسة	50 ≤ x< 60	(50+ 60) ÷2= 55

ومن ثم يكون مركز الفئة الأولى 10 ،والثانية 25 والثالثة 32.5 ،والرابعة 37.5 والخامسة 45 ،ومركز الفئة الأخيرة (السادسة) 55

ويمكن تجميع كل ما تقدم في جدول واحد كالتالي

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0
الأولى	x ≤ x< 20	20–0= 20	(0+ 20) ÷ 2= 10
الثانية	20 ≤ x< 30	30– 20= 10	(2x+ 30) ÷ 2= 25
الثالثة	30 ≤ x< 35	35– 30=x	(30+3x) ÷2= 32.5
الرابعة	35 ≤ x< 40	40– 35=5	(35+ 40) ÷ 2= 37.5
الخامسة	40 ≤ x< 50	50x 40= 10	(40+ 50) ÷ 2= 45
السادسة	50 ≤ x< 60	60–x0= 10	(50+ 60) ÷ 2= 55

وبعد هذا التمهيد الضروري ،نعود إلى مثالنا ،حيث يمكن عرض البيانات (الكمية المتصلة) إما عن طريق جداول (تكرارية أو تكرارية نسبية) أو بيانيا كما في حالة البيانات المنفصلة التي سبق وتعرضنا لها من قبل

١.الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) :

يُعتبر الجدول الأخير [بعد إضافة عمود التكرار أو عمود التكرار النسبي له] إحدى طرق عرض البيانات وبالتالي يمكننا الحصول على الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) للبيانات

المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	التكرار (العدد) f	التكرار النسبي $\bar{f}$
$0 \le x < 20$	x0	10	4	4 ÷ 50= 0.08 or 8%
$20 \le x < 30$	10	25	16	16 ÷ x0= 0.32ox 32%
$30 \le x < 35$	5	32.5	12	12 ÷ 50= 0.24 or 24%
$35 \le x < 40$	5	37.5	10	10 ÷ 50= 0.20 or 20%
$40 \le x < 50$	10	45	6	6 ÷ 50= 0.12 or 12%
$50 \le x < 60$	10	55	2	2 ÷ x0= 0.04 or 4%
			$\sum f = 50$	$\sum \bar{f} =$ 1 or 100%

يمكن الاستغناء عنهما هنا

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

٢.الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع :

وفي حالة البيانات المتصلة قد يكون من المفيد تكوين ما يُسمى بالتوزيع التكراري المتجمع الصاعد الذي يُعطي مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأدنى لكل فئة من الفئات

من الصفحة السابقة

الجدول التكراري	
المتغير x (الطول)	التكرار x
x ≤ x< 20	4
20 ≤ x< 30	16
3x ≤ x< 35	1x
35 ≤ x< 40	10
40 ≤ xx 50	6
50 ≤ x< 60	x
	$\sum f$= 50

	الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد		
	المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
أقل من 0	$x<0$	0	0 ÷ 50=0 [0%]
أقل من 20	xx 20	0+4=4	4 ÷ 50= 0.08 [8%]
أقل من 30	$x<$ 30	4+ 16=x0	20 ÷ 5x=x .40 [40%]
أقل من x5	$x<$ 35	20+ 12= 32	32 ÷ 50x 0.64 [64%]
أقل من 40	$x<$ 40	32+ 10= 42	42 ÷ 50= 0.84 [84%]
أقل من x0	$x<$ 50	x2+6= 48	48 ÷ 50= 0.9x [96%]
أقل من 60	$x<$ 60	48x2= 50	50 ÷ 50=x [100%]

$\sum f$ $\sum f$

0

دل السهم بدال على البداية وينتهي بدال على المجموع الكلي للتكرارات

$\sum f$

وفي أحيان أخرى قد يكون من المرغوب فيه الحصول على **التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى لكل فئة**. عندئذ يُسمى التوزيع **بالتوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط (أو النازل)** .

من الصفحة السابقة

الجدول التكراري	
التكرار f	المتغير x(الطول)
4	$0 \le x < 2x$
16	$20 \le x < 30$
12	$30 \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < x0$
$\sum f = 50$	

$\sum f$ $\sum f$ $\sum f$

الجدول (التوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط			
التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x(الطول)	
50 ÷ 50=1 [100%]	46+4= 50	$x \ge 0$	0أو أكثر
46 ÷ 50= 0.92 [92%]	30x 16= 46	$x \ge 20$	20 أو أكثر
30 ÷ 5x= 0.60 [60%]	18+ 12= 30	$x \ge 30$	30 أو أكثر
18 ÷ 50= 0.36 [36%]	8+ 10= 18	$x \ge 35$	35 أو أكثر
x ÷ 50= 0.16 [16x]	2+6=8	$x \ge 40$	40 أو أكثر
2 ÷ 50= 0.04 [4%]	0+2=2	$x \ge 50$	50 أو أكثر
0 ÷ 50=0 [0%]	0	$x \ge 60$	60 أو أكثر

0

هل لاحظت الفارق بين التوزيعين
المتجمع **الصاعد**
والمتجمع **الهابط**

الجدول التكراري	
التكرار	المتغير x
4	$0 \le x < 20$
16	$20 \le x < 30$
12	$3x \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < 60$
$\sum f = x0$	

التوزيع التكراري المتجمع **الصاعد**	
التكرار المتجمع	المتغير x(الطول)
0	أقل من x
0+4=4	أقل من 20
4+ 16= 20	أقل من 30
x0+ 12= 32	أقل من 35
32+ 10= 42	أقل من 40
42x6= 48	أقل من 50
48+2= 50	أقل من 60

الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

0 $\sum f$ $\sum f$

التوزيع التكراري المتجمع **الهابط**	
التكرار المتجمع	المتغير x(الطول)
46+4= 50	0أو أكثر
30+ 16= 46	20 أو أكثر
18+ 12= 30	30 أو أكثر
8+ 10= 18	35 أو أكثر
2+6=8	40 أو أكثر
0x2=2	50 أو أكثر
0	60 أو أكثر

$\sum f$ $\sum f$

الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

0

عرض البيانات الكمية المتصلة بيانيا

يمكن عرض البيانات المتصلة بطرق مختلفة وكل طريقة لها مزاياها ويمكن أن ترد على بعض الأسئلة بأسلوب أسرع من نظيرها. لذا سنستعرض بعضا من هذه الطرق. وكما ذكرنا سابقا (عند تعاملنا مع البيانات المنفصلة) أنه من أساسيات عرض أي بيانات بيانيا هو وضوح وبساطة طريقة العرض ولا مانع من أن تكون أيضا جاذبة. ولعرض للبيانات المعطاة في المثال التوضيحي (٢-٤) السابق يجب القيام أولا بتنظيم البيانات [إن كانت على صورة بيانات خام] ووضعها في صورة جدول تكراري أو جدول تكراري نسبي [كما سبق] ثم نقوم بعرضها بيانيا بطرق مختلفة منها :

- الدائرة : مشابهة تماما لطريقة الدائرة في عرض البيانات المنفصلة. لذا سنبدأ بها .
- المدرج التكراري : وهي تناظر طريقة الأعمدة البسيطة في حالة البيانات المنفصلة .
- المضلع (أو المنحنى) التكراري : وهي تناظر طريقة المضلع (أو المنحنى) التكراري للبيانات المنفصلة .
- المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد (أو الهابط) :

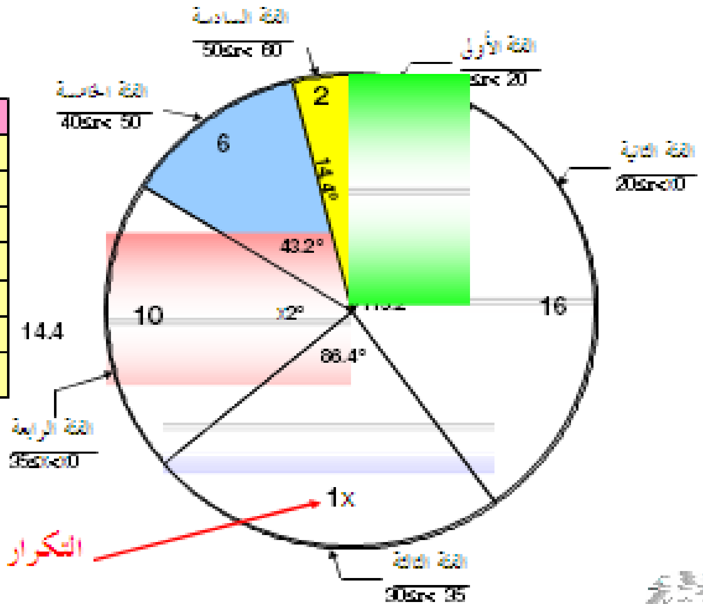
وهي طريقة ذات أهمية كبيرة في حالة البيانات الكمية المتصلة

طريقة الدائرة لعرض البيانات الكمية المتصلة

تمثل كل فئة بقطاع دائري طبقا للزاوية المركزية لهذه الفئة. إذن لابد من تحديد الزوايا المركزية أولا ثم تمثيل البيانات بنفس الطريقة التي اتبعناها مع البيانات المنفصلة .

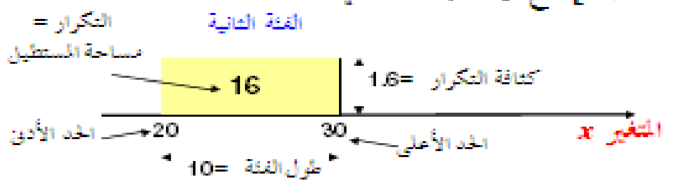
الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	الزاوية المركزية
0 ≤ x< 20	4	(4 ÷ 50)x 360= 28.8°
20 ≤ x< 30	16	(16 ÷ 50)xx60= 115.2 °
30 ≤ x< 35	12	(12 ÷ 50)x 360= 86.4°
35 ≤ x< 40	10	(x0 ÷ 50)x 360= 72°
40 ≤ x< 50	6	(6 ÷ 50)x 360= 43.2°
50 ≤ x< 60	2	(2 ÷ x 0)x 360= x
	∑ f=x0	مجموع الزوايا =360



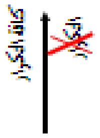
طريقة المدرج التكراري لتمثيل البيانات الكمية المتصلة

هو أسلوب مشابه لطريقة الأعمدة البسيطة [للبيانات المنفصلة] مع الاختلافات التالية :



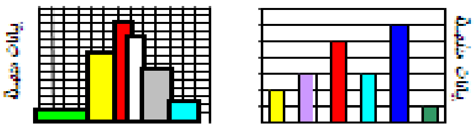
١. تمثل كل فئة بمستطيل قاعدته تقع على المحور الأفقي [الذي يمثل المتغير x] وعرضه يساوي طول الفئة ومساحته تساوي تكرار الفئة .

وحيث أن مساحة أي مستطيل تساوي عرض المستطيل مضروبا في ارتفاعه ,فإن ارتفاع أي مستطيل يكون مساويا لـ "تكرار الفئة مقسوما على طول الفئة" . سنسمي خارج القسمة هذا بـ "كثافة التكرار" .



٢. المحور الرأسي هنا يمثل كثافة التكرار [وليس التكرار كما في حالة الأعمدة البسيطة] .

٣.لا فراغات موجودة بين المستطيلات [حيث أن البيانات هنا بيانات متصلة] بخلاف طريقة الأعمدة في حالة البيانات المنفصلة حيث يجب ألا تكون الأعمدة متلاصقة .



الجدول التكراري

الفئة	المتغير x(الطول)
الأولى	0 ≤ x< 20
الثانية	20 ≤ x< 30
الثالثة	30 ≤ x< 35
الرابعة	35 ≤ x< 40
الخامسة	40 ≤ x< 50
السادسة	50 ≤ x< 60

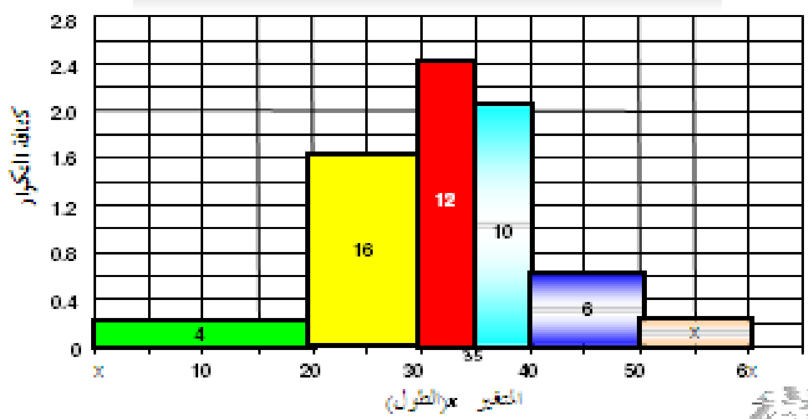
وبالتالي لرسم المدرج التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها

إضافة للجدول

المتغير x(الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	كثافة التكرار X÷c
x ≤ x<x0	x	20	4 ÷ 20= 0.2
x0 ≤ x<3x	16	10	16 ÷ 10= 1.6
30 ≤ x< 35	12	5	12 ÷ 5= 2.4
35 ≤ x< 40	10	5	10 ÷ 5=2
40 ≤ x< 50	6	10	6 ÷ 10= 0.6
50 ≤ x< 60	2	10	2 ÷ 10= 0.2

والآن يمكن رسم المدرج التكراري بأخذ محورين متعامدين: الأفقي ويمثل المتغير x [وهنا مقياس الرسم له أو تدريجه مهم] والرأسي يمثل كثافة التكرار ونقوم بتمثيل كل فئة بمستطيل قاعدته على المحور الأفقي (وطولها = طول الفئة) وارتفاعه يمثل كثافة تكرار الفئة (وبالتالي مساحته تساوي تكرار الفئة).

المتغير x	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	1.x
$30 \le x < 35$	12	5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	2
$40 \le x < 50$	6	10	0.x
$50 \le x < 60$	2	10	0.2



المضلع (المنحنى) التكراري للبيانات الكمية المتصلة

وهو أسلوب مشابه لطريقة المضلع التكراري للبيانات المنفصلة، إلا أن كل فئة تمثل بنقطة: إحداثيها الأفقي هو مركز الفئة، وإحداثيها الرأسي هو كثافة تكرارها.

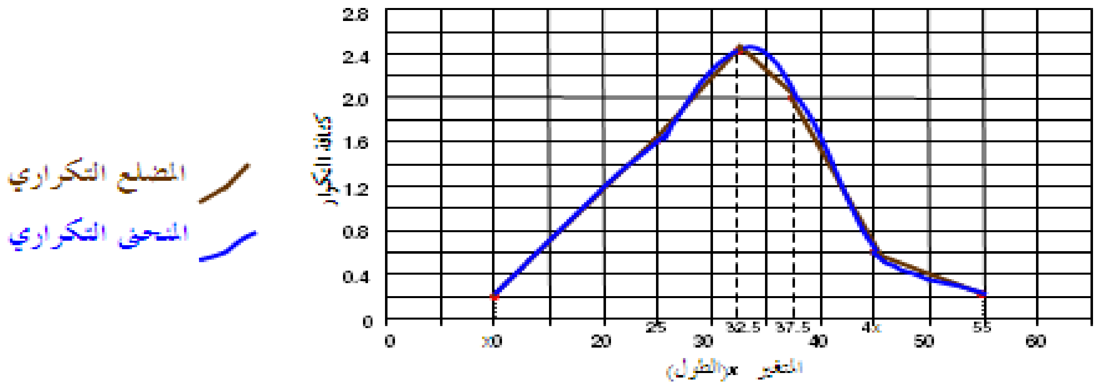
وبالتالي لرسم المضلع التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها [كما في حالة المدرج التكراري] إلى جانب عمود يبين مركز الفئة.

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	2x	1.6
$x0 \le x < 35$	12	5	32.5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	37.5	2
$40 \le x < 50$	6	10	45	0.6
$50 \le x < 60$	2	10	55	0.2

وبأخذ محورين متعامدين : الأفقي (ويمثل المتغير x) والرأسي (ويمثل كثافة التكرار)،نقوم بتمثيل الفئات بالنقاط المبينة بالجدول .
ثمنقوم بتوصيل هذه النقاط بالمسطرة نحصل على خط منكسر هو المضلع التكراري للبيانات .
أما إذا قمنا بتوصيل النقاط باليد وبطريقة ناعمة نحصل على خط ممهد هو المنحنى التكراري لمجموعة البيانات .

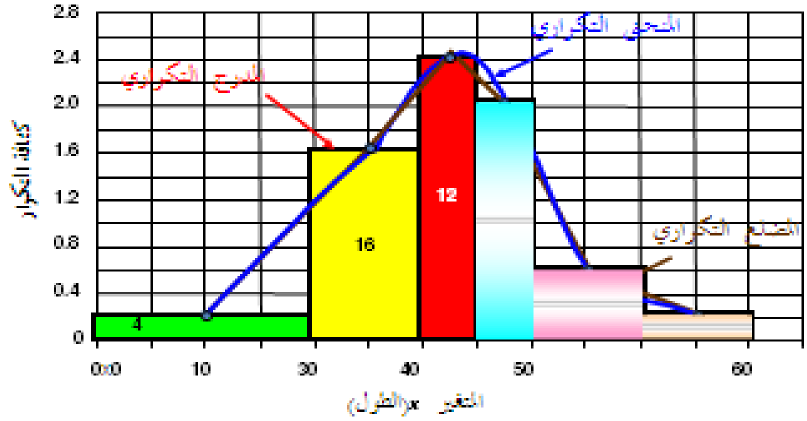
المتغير x(الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
0 ≤ x< 20	10	0.2	(10, 0.2)
20 ≤ x< 30	25	1.6	(25, 1.6)
30 ≤ x< 35	32.5	2.4	(32.5,2.4)
3x ≤ x< 40	37.5	2	(37.5,2)
40 ≤ x< 50	45	0.6	(45, 0.6)
50 ≤ x< 60	55	0.2	(55, 0.2)

أخذنا من الجدول السابق ما يهمنا



المتغير x(الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
0 ≤ x< 20	10	0.2	(10, 0.2)
20 ≤ x< 30	2x	1.6	(25, 1.6)
30 ≤ x< 35	32.5	2.4	(32.5,2.4)
35 ≤ xx 40	37.5	2	(37.5,2)
40 ≤ x< 50	45	0.6	(45, 0.6)
50 ≤ x< 60	55	0.2	(55, 0.2)

لاحظ أنه يمكن رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري على رسمة واحدة ، حيث أن نقطة منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل في المدرج التكراري هي النقطة الممثلة للفئة عند رسم كل من المضلع التكراري والمنحنى التكراري



المحاضرة الخامسة تكملة لما سبق

عناصر المحاضرة

تابع العرض البياني للبيانات الكمية المتصلة

(١) ملخص لما سبق شرحه في المحاضرة السابقة (المحاضرة الرابعة)

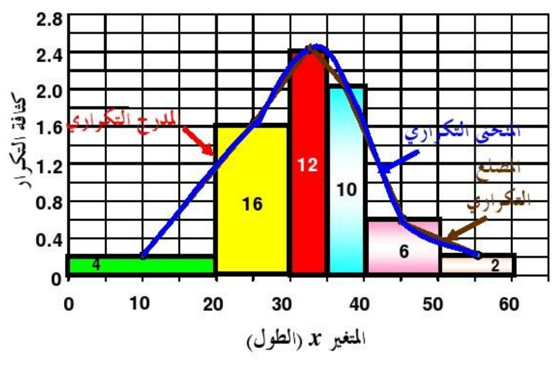
(٢) المضلع (المنحنى) التكراري المتجمع

مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]

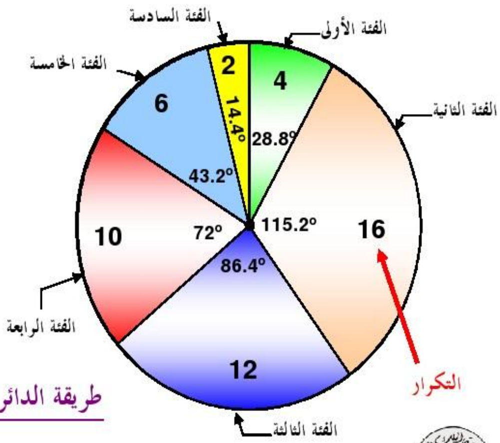
ملخص لما سبق

الجدول التكراري

النقطة الممثلة للفئة	كثافة التكرار	مركز الفئة x_0	طول الفئة c	الزاوية المركزية	التكرار f	المتغير x	
(10 , 0.2)	0.2	10	20	28.8°	4	$0 \le x < 20$	الفئة لأولى
(25 , 1.6)	1.6	25	10	115.2°	16	$20 \le x < 30$	الفئة الثانية
(32.5 , 2.4)	2.4	32.5	5	86.4°	12	$30 \le x < 35$	الفئة الثالثة
(37.5 , 2)	2	37.5	5	72°	10	$35 \le x < 40$	الفئة الرابعة
(45 , 0.6)	0.6	45	10	43.2°	6	$40 \le x < 50$	الفئة الخامسة
(55 , 0.2)	0.2	55	10	14.4°	2	$50 \le x < 60$	الفئة السادسة
				المجموع = 360°	$\sum f = 50$		



طرق عرض مختلفة للبيانات الكمية المتصلة



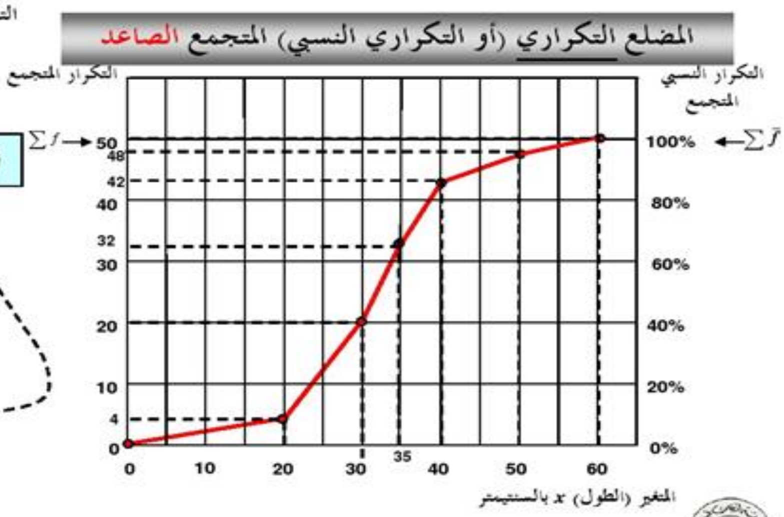
طريقة الدائرة

المضلع التكراري [أو التكراري النسبي] المتجمع الصاعد

ذكرنا سابقاً عند عرضنا للبيانات عن طريق الجداول أنه يمكن عرض البيانات عن طريق التوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد ، ويمكن الاستفادة من هذه الجداول في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :

التوزيع التكراري الأصلي	
المتغير x	التكرار f
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

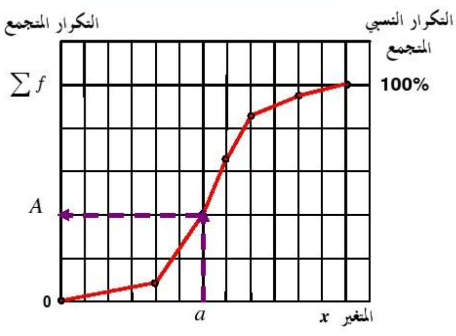
التوزيع التكراري المتجمع الصاعد			
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
< 0	0	0%	(0 , 0)
< 20	4	8%	(20 , 4)
< 30	20	40%	(30 , 20)
< 35	32	64%	(35 , 32)
< 40	42	84%	(40 , 42)
< 50	48	96%	(50 , 48)
< 60	50	100%	(60 , 50)



ويفيد المضلع التكراري المتجمع الصاعد في الرد على العديد من الأسئلة نستعرض بعضها في التالي :

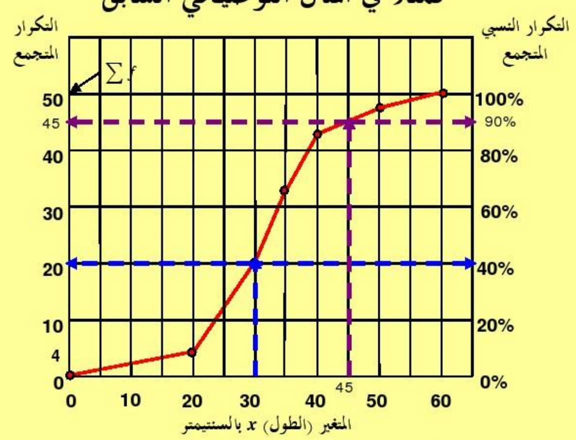
- تحديد التكرار المتجمع المناظر لــ :

"x أقل من قيمة معينة"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لــ "$x < a$" نحدد قيمة a على المحور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المضلع في نقطة ، فيكون التكرار المتجمع المطلوب هي القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] المناظرة لنقطة التقاطع

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق

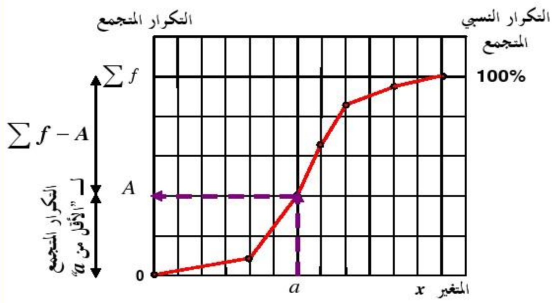


عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 30 هو 20 ونسبتهم المئوية هي 40%

عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 45 هو 45 ونسبتهم المئوية هي 90%

- تحديد التكرار المتجمع المناظر لــ :

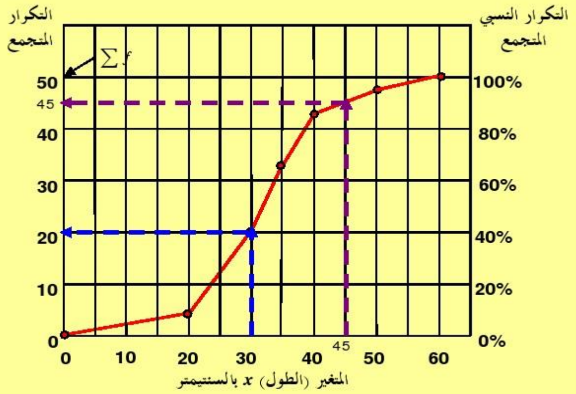
"x أكبر من أو تساوي قيمة معينة"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لــ "$x \geq a$" نحدد قيمة a على المحور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المضلع في نقطة ونحدد القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] ، ويكون الحل المطلوب هو

"المجموع الكلي للتكرارات – القيمة A"

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو :

50 – 20 = 30

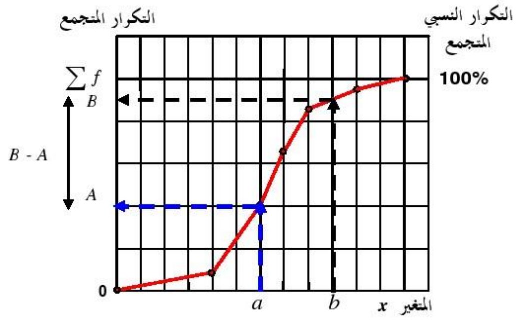
عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو :

50 – 45 = 5

المحاضرة الخامسة
مبادئ الإحصاء

- تحديد التكرار المتجمع المناظر لــ :

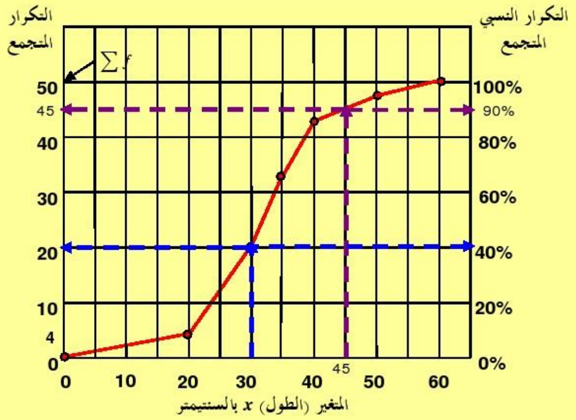
"x محصورة بين قيمتين"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لــ "$a \leq x < b$" نحدد قيمتي a , b على المحور الأفقي [محور المتغير] ونحدد قيم التكرارات المتجمعة المناظرة [لتكن A , B على الترتيب] ، فيكون الحل المطلوب هو :

الفرق بين القيمتين A , B

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 30 ، 45 هو :

45 – 20 = 25

ونسبتهم المئوية تساوي : $\frac{25}{50} \times 100 = 50\%$

أو من الرسم : **90 – 40 = 50%**

المضلع التكراري [أو التكراري النسبي] المتجمع الهابط

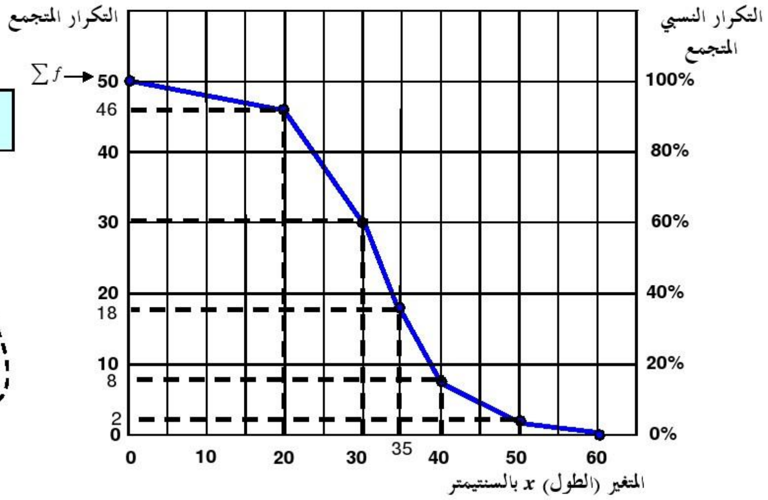
وبنفس طريقة المضلع التكراري المتجمع الصاعد يمكن رسم المضلع التكراري (أو التكـــراري النـــسبي) المتجمع الهابط كالآتي :

التوزيع التكراري الأصلي	
المتغير x	التكرار f
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

الحد الأدنى للفئة
التكرار المتجمع المناظر
(30 , 30)

التوزيع التكراري المتجمع الهابط			
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
≥ 0	50	100%	(0 , 50)
≥ 20	46	92%	(20 , 46)
≥ 30	30	60%	(30 , 30)
≥ 35	18	36%	(35 , 18)
≥ 40	8	16%	(40 , 8)
≥ 50	2	4%	(50 , 2)
≥ 60	0	0%	(60 , 0)

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط

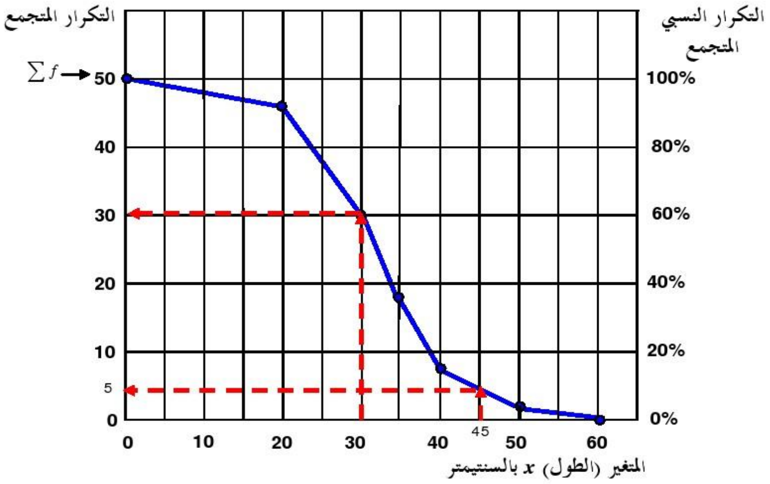


ويفيد المضلع التكراري المتجمع الهابط في الرد على نفس الأسئلة التي يرد عليها المضلع التكراري المتجمع الـــصاعد مع الأخذ في الاعتبار أن التدريج الرأسي [التكرار المتجمع] يمثل التكرار المناظر لـــ " x أكبر من أو تساوي"

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق

- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو 30 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 30 هو : 50 – 30 = 20
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو 5 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 45 هو : 50 – 5 = 45
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 45 , 30 هو : 30 – 5 = 25

قارن النتائج السابقة بالنتائج التي سبق وحصلنا عليها باستخدام المضلع التكراري المتجمع المتصاعد



أي أن المضلعان التكراريان المتجمعان الصاعد والهابط يؤديان نفس الغرض ، لذا سنوجه اهتمامنا لأحدهما فقط [وليكن الصاعد]

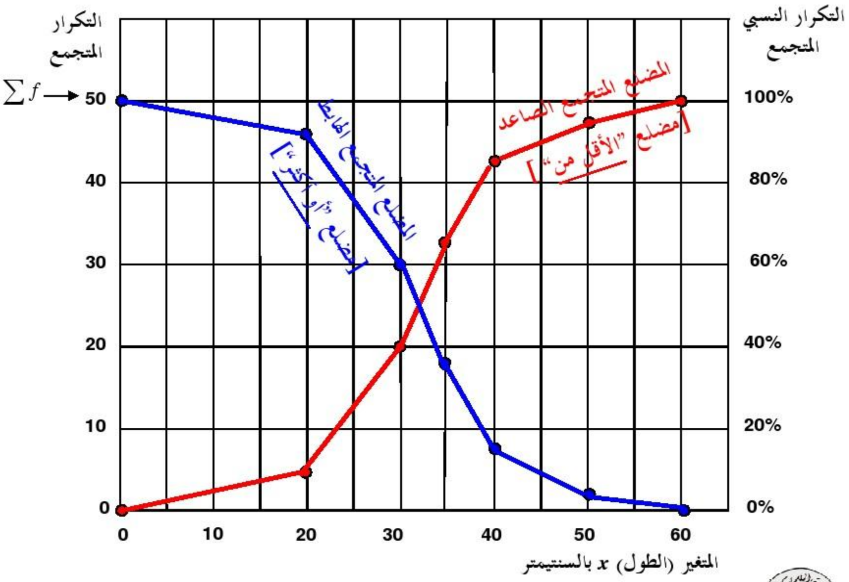
ويمكن رسم المضلعين التكراريين المتجمعين : **الصاعد** و**الهابط** على رسمة واحدة كما هو مبين :

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

النقطة الموقعة على الرسم	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x
(0 , 0)	0%	0	< 0
(20 , 4)	8%	4	< 20
(30 , 20)	40%	20	< 30
(35 , 32)	64%	32	< 35
(40 , 42)	84%	42	< 40
(50 , 48)	96%	48	< 50
(60 , 50)	100%	50	< 60

التوزيع التكراري المتجمع الهابط

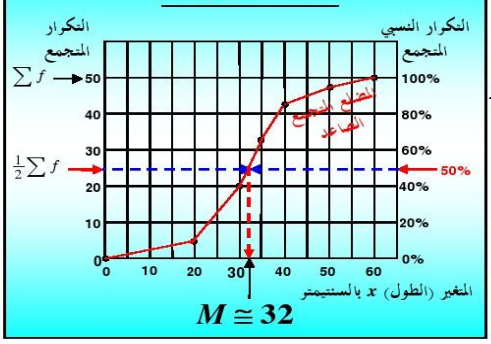
النقطة الموقعة على الرسم	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x
(0 , 50)	100%	50	≥ 0
(20 , 46)	92%	46	≥ 20
(30 , 30)	60%	30	≥ 30
(35 , 18)	36%	18	≥ 35
(40 , 8)	16%	8	≥ 40
(50 , 2)	4%	2	≥ 50
(60 , 0)	0%	0	≥ 60

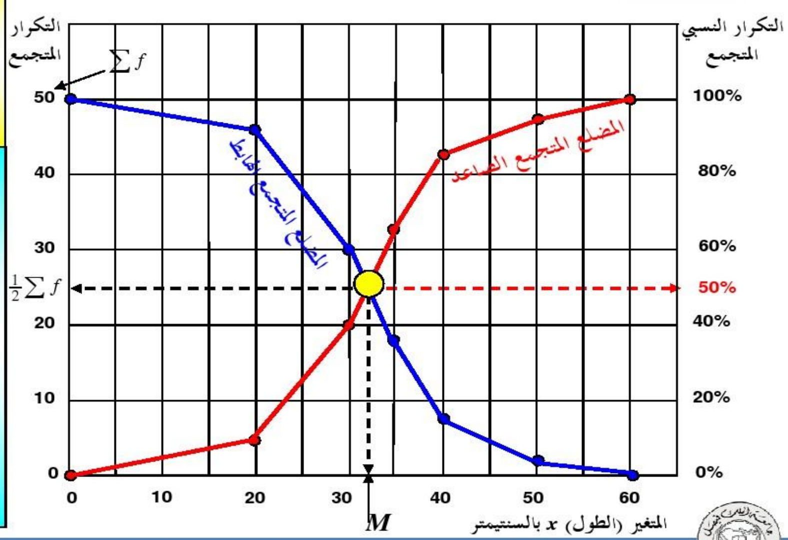


ويُلاحظ أن المضلعين يتقاطعان في نقطة ، قيمة المتغير x عندها تساوي M (مثلاً) ، هذه القيمة يناظرها تكرار متجمع يساوي $\frac{1}{2}\sum f$ [= 25 في مثالنا التوضيحي] **وتكرار متجمع نسبي قدره 50%** . هذه القيمة M تُسمى **بالوسيط**

أي أن وسيط مجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هي قيمة في وسط مجموعة القيم تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد

كيفية تحديد الوسيط





مراجعة عامة على الباب الثاني

في الجزء القادم [بإذن الله] ستقوم بعمل مراجعة عامة على كل ما تقدم من موضوعات في هذا الباب :

[الباب الثاني : التوزيعات التكرارية]

وذلك من خلال مثالين : مثال (٢-٥) والذي يلخص عرض البيانات المنفصلة ، ومثال (٢-٦) والذي يلخص عرض البيانات الكمية المتصلة .
أأمل من الله عز وجل أن أوفق في ذلك

مراجعة لكل ما تم شرحه ويخص البيانات المنفصلة

مثال (٢-٥) على البيانات المنفصلة [ص ٤٦ بالمرجع الأساسي] : تم سؤال عدد من طلاب كليتي الآداب والتربية عن عدد حوادث السيارات التي تعرضوا لها خلال العام الماضي فكانت إجاباتهم كما يلي :

3 2 2 1 0 1 2 1 1 1 0 0 1 2 2

1 3 1 0 0 1 2 1 0 2 3 0 0 0 1

المطلوب عرض البيانات السابقة بطرق مختلفة .

الجدول التكراري

المتغير x (عدد الحوادث)	تفريغ البيانات (العلامات)	التكرار f (عدد الطلاب)	التكرار النسبي $\bar{f} = f / \sum f$
0	𝍸 ||||	9	0.3 or 30%
1	𝍸 𝍸 |	11	0.37 or 37%
2	𝍸 ||	7	0.23 or 23%
3	|||	3	0.1 or 10%
		$\sum f = 30$	1 or 100%

الجدول التكراري النسبي

$\sum \bar{f}$

أكتب　اضغط　أكتب　اضغط　الناتج

9 ÷ 30 = 0.3

11 ÷ 30 = 0.366666666 ≅ 0.37

7 ÷ 30 = 0.233333333 ≅ 0.23

3 ÷ 30 = 0.1

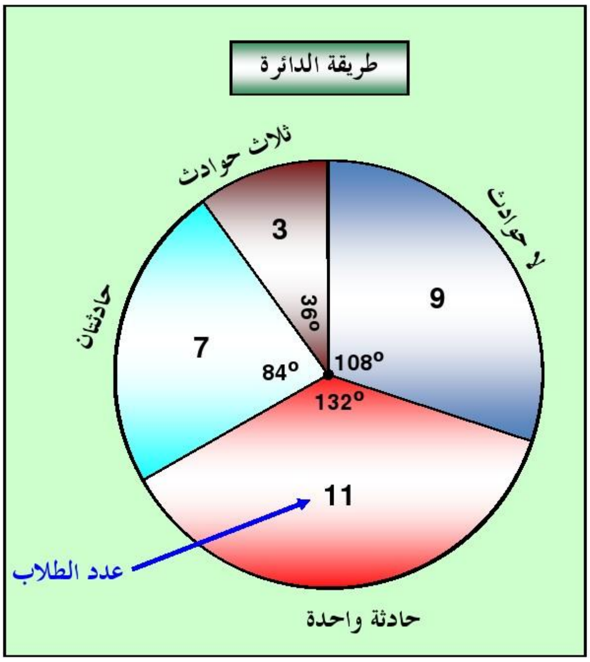
0.3 + 0.37 + 0.23 + 0.1 = 1

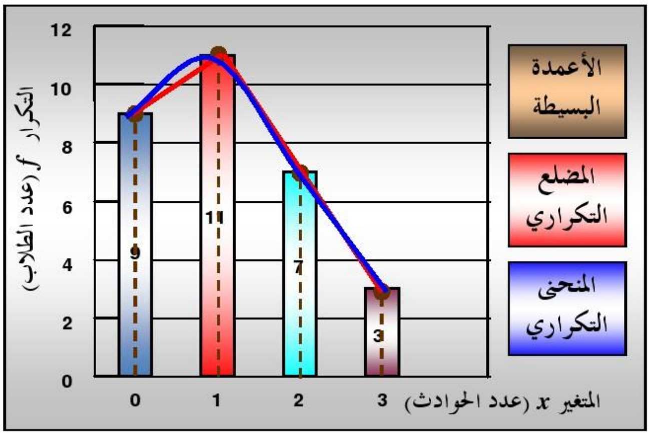
0.36**6**666666 ≅ 0.37

0.23**3**333333 ≅ 0.23

x	f	$\bar{f}$	الزاوية المركزية
0	9	30%	(9 ÷ 30) x 360 = 108°
1	11	37%	(11 ÷ 30) x 360 = 132°
2	7	23%	(7 ÷ 30) x 360 = 84°
3	3	10%	(3 ÷ 30) x 360 = 36°
	30	100%	360°

$\sum f$ $\sum \bar{f}$ مجموع الزوايا





مراجعة لكل ما تم شرحه ويخص البيانات المتصلة

مثال (٢–٦) : الجدول التالي يبين الأجر السنوي [بآلاف الريالات السعودية] لـ 60 عاملاً في إحدى الشركات :

الدخل x (بالآلف)	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	100 -	120 - 180
عدد العمال f	6	9	15	12	9	6	3

(أ) أوجد المدى R للأجور .

(ب) اعرض البيانات السابقة باستخدام طريقة الدائرة ، المدرج التكراري ، المضلع التكراري .

(ج) كون كلاً من الجدولين التكراري المتجمع الصاعد والتكراري المتجمع الهابط .

(د) ارسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه قدر عدد العاملين الذين يحصلون على أجر :

(١) أقل من 88 ألف سنوياً (٢) 96 ألف سنوياً أو أكثر
(٣) لا يقل عن 63 ألف سنوياً ولا يزيد عن 75 ألف سنوياً

(هـ) قدر قيمة الوسيط M للأجور .

(أ) المدى R للأجور : ذكرنا في حالة البيانات الكمية المتقطعة أن المدى هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأصغر قيمة فيها . نفس الشيء في حالة البيانات الكمية المتصلة ، ولكن هنا [في حالة البيانات الكمية المتصلة] : تكون أكبر قيمة هي الحد الأعلى للفئة الأخيرة [= 180] ، وأصغر قيمة هي الحد الأدنى للفئة الأولى [= 50] .

$$\boxed{\begin{aligned} R &= 180 - 50 \\ &= 130 \end{aligned}}$$

والمعلومات التالية هي التي يمكن أن نحتاجها للرد على الجزء (ب) بالكامل

الجدول التكراري النسبي

	الجدول التكراري							
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	التكرار النسبي	الزاوية المركزية	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
الأولى	$50 \le x < 60$	6	10%	36°	10	55	0.6	(55 , 0.6)
الثانية	$60 \le x < 70$	9	15%	54°	10	65	0.9	(65 , 0.9)
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	25%	90°	10	75	1.5	(75 , 1.5)
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	20%	72°	10	85	1.2	(85 , 1.2)
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	15%	54°	10	95	0.9	(95 , 0.9)
السادسة	$100 \le x < 120$	6	10%	36°	20	110	0.3	(110 , 0.3)
السابعة	$120 \le x < 180$	3	5%	18°	60	150	0.05	(150 , 0.05)
		$\sum f = 60$	$\sum \bar{f} = 100\%$	المجموع = 360°				

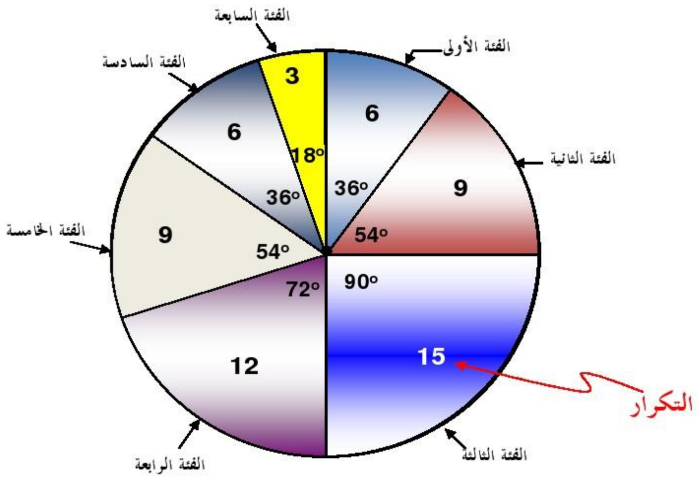
نحتاجه في طريقة الدائرة

نحتاجه في المضلع التكراري

نحتاج إليهما في المدرج التكراري

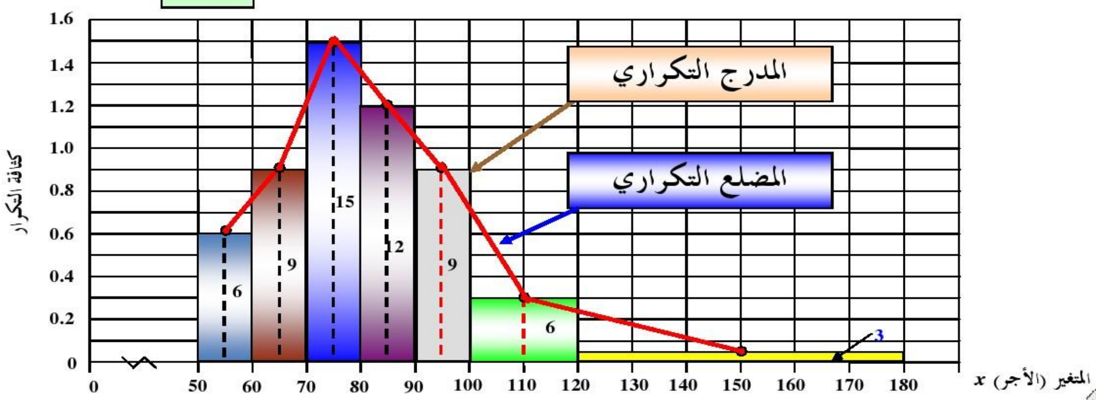
(ب) عرض البيانات بطريقة الدائرة :

	الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	الزاوية المركزية
الأولى	$50 \le x < 60$	6	36°
الثانية	$60 \le x < 70$	9	54°
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	90°
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	72°
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	54°
السادسة	$100 \le x < 120$	6	36°
السابعة	$120 \le x < 180$	3	18°
		$\sum f = 60$	المجموع = 360°



المدرج التكراري والمضلع التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة	كثافة التكرار	النقطة
الأولى	$50 \le x < 60$	6	10	55	0.6	(55 , 0.6)
الثانية	$60 \le x < 70$	9	10	65	0.9	(65 , 0.9)
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	10	75	1.5	(75 , 1.5)
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	10	85	1.2	(85 , 1.2)
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	10	95	0.9	(95 , 0.9)
السادسة	$100 \le x < 120$	6	20	110	0.3	(110 , 0.3)
السابعة	$120 \le x < 180$	3	60	150	0.05	(150 , 0.05)
		$\sum f = 60$				



ج) الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع الهابط

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f
الأولى	$50 \le x < 60$	6
الثانية	$60 \le x < 70$	9
الثالثة	$70 \le x < 80$	15
الرابعة	$80 \le x < 90$	12
الخامسة	$90 \le x < 100$	9
السادسة	$100 \le x < 120$	6
السابعة	$120 \le x < 180$	3
		$\sum f = 60$

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
< 50	0	0%
< 60	6	10%
< 70	15	25%
< 80	30	50%
< 90	42	70%
< 100	51	85%
< 120	57	95%
< 180	60	100%

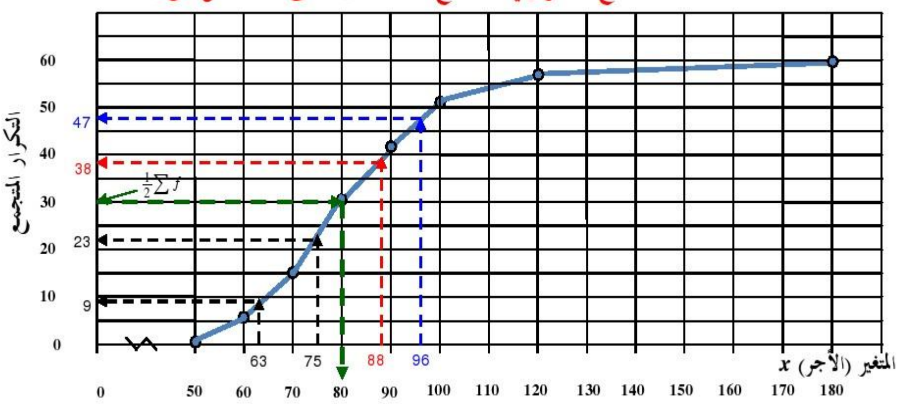
مجموعها $= \sum f = 60$ (لكل سطر)

التوزيع التكراري المتجمع الهابط

المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
≥ 50	60	100%
≥ 60	54	90%
≥ 70	45	75%
≥ 80	30	50%
≥ 90	18	30%
≥ 100	9	15%
≥ 120	3	5%
≥ 180	0	0%

(د) المضلع التكراري المتجمع الصاعد

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة
< 50	0	(50 , 0)
< 60	6	(60 , 6)
< 70	15	(70 , 15)
< 80	30	(80 , 30)
< 90	42	(90 , 42)
< 100	51	(100 , 51)
< 120	57	(120 , 57)
< 180	60	(180 , 60)



(١) عدد العاملين الذين يحصلون على أقل من **88** ألف سنوياً حوالي : **38**

(٢) عدد العاملين الذين يحصلون على **96** ألف سنوياً أو أكثر حوالي : **60 – 47 = 13**

(٣) عدد العاملين الذين يحصلون على أجر لا يقل عن **63** ألف ولا يزيد عن **75** ألف سنوياً حوالي :

23 – 9 = 14

(هـــ) الوسيط M : هي قيمة x المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{2}\sum f$ [أي **30**] : $M = 80$

عناصر المحاضرة

تابع مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]

حيث نتابع المراجعة العامة التي بدأناها في المحاضرة الماضية [المحاضرة الخامسة] وذلك بعرض عدد من التمرينات المحلولة والتي روعي في أسئلتها أن تكون موضوعية [إختيارات متعددة] وبنفس الأسلوب التي ستوضع بها أسئلة إختبارات نهاية الفصل الدراسي وأيضاً أسئلة الواجبات حتى يألف كل طالب وطالبة على كلٍ من أسئلة الاختبار النهائي وأسئلة الواجبات

لكن ما أنصح به ألا نهمل الأسئلة التقليدية [مثل المثالين السابقين (٢-٥) ، (٢-٦)] حيث أن هذا النوع من الأمثلة التقليدية هو الأساس الذي بدونه لا نستطيع التعامل مع أسئلة الاختيار المتعدد

س ١ : التكرار النسبي لفئة من الفئات هو :

- ○ النسبة بين الحد الأعلى للفئة ومجموع التكرارات
- ○ خارج قسمة تكرار الفئة على طولها
- ● نسبة تكرار الفئة إلى مجموع التكرارات
- ○ النسبة بين الحد الأدنى للفئة ومجموع التكرارات

ملحوظات :

- تكرار الفئة النسبي والذي نرمز له بالرمز $\bar{f}$ هو $\bar{f} = \frac{f}{\sum f}$
- كثافة التكرار هو التكرار مقسوماً على طول الفئة .
- لا معنى للإجابتين الأولى والأخيرة .

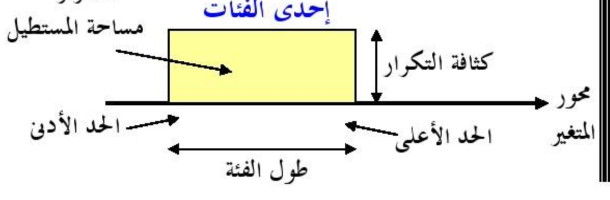
س ٢ : في المدرج التكراري تكون مساحة أي مستطيل من المستطيلات هي :

- ● تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ التكرار النسبي للفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ كثافة تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ طول الفئة التي يمثلها المستطيل

ملحوظة : تكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الثالثة إذا كان السؤال عن ارتفاع المستطيل وليس مساحته ، وتكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الرابعة إذا كان السؤال عن طول قاعدة المستطيل وليس مساحته ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثانية .

تذكر :

أنه في المدرج التكراري تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته مرسومة على المحور الأفقي (محور المتغير) بين الحدين الأدنى والأعلى للفئة [أي طول القاعدة = طول الفئة] ، ومساحته تمثل تكرار الفئة ، وارتفاعه يساوي كثافة تكرار الفئة [تكرار الفئة مقسوماً على طولها] . لمزيد من التفاصيل ، أنظر شريحة ١٥ من المحاضرة الرابعة .

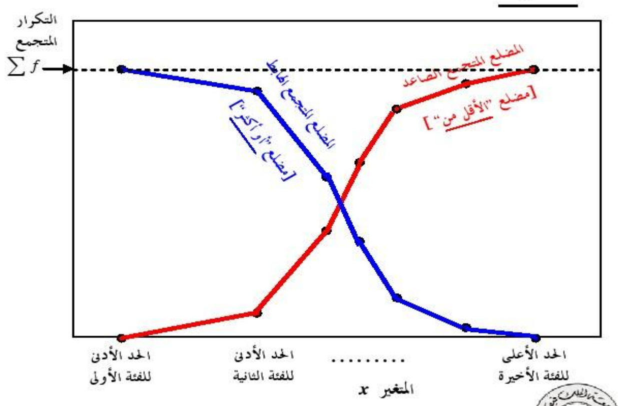


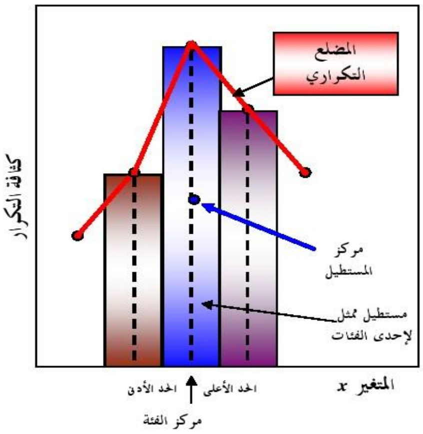
س ٣ : في المضلع التكراري تُمثل كل فئة بنقطة إحداثياها :

- ○ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأقل من هذا الحد .
- ○ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأكبر من أو تساوي هذا الحد .
- ○ مركز المستطيل الممثل لتلك الفئة في المدرج التكراري .
- ● مركز الفئة وكثافة تكرارها .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشرائح ١٨ ، ١٩ [المحاضرة الرابعة] ، والشرائح ٦ ، ١٠ [المحاضرة الخامسة]

تذكر :





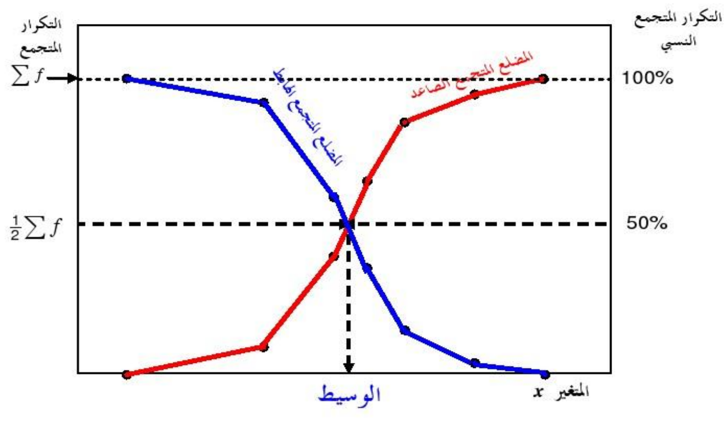
ملحوظة : تكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الأولى إذا كان السؤال عن المضلع التكراري المتجمع الصاعد وليس عن المضلع التكراري ، وتكون الإجابة الصحيحة هي الإجابة الثانية إذا كان السؤال عن المضلع التكراري المتجمع الهابط وليس عن المضلع التكراري ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثالثة .

س ٤ : الوسيط لمجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هو :

- ● قيمة للمتغير يناظرها تكرار متجمع قدره $\frac{1}{2}\sum f$ حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات
- ● قيمة للمتغير يناظرها تكرار نسبي قدره 50% .
- ● نقطة تقاطع المضلعين التكراريين المتجمعين الصاعد والهابط .
- ● قيمة للمتغير تقسم مجموعة البيانات إلى مجموعتين متساويتين في العدد .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشريحة ١٣ [المحاضرة الخامسة]

تذكر :



ملحوظة : مثل هذا النوع من الأسئلة [حيث من الممكن أن تكون هناك أكثر من إجابة صحيحة] ~~مرفوض~~ ، وبالتالي لن يكون هناك مثل هذا النوع من الأسئلة في اختبار نهاية الفصل . ولكن ميزة هذا السؤال الوحيدة هي أنه يُعطي أكثر من تعريف للوسيط

س ٥ : في التوزيع التكراري المبين للمتغير الكمي المتصل x

الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \le x < 20$	10
الثانية	$... \le x < ...$	15
الثالثة	$30 \le x < ...$	20
الرابعة	$50 \le x < 60$	5

(أ) مجموع التكرارات $\sum f$ يساوي :

100 ○ — 200 ○ — 1 ○ — **50** ●

(ب) التكرار النسبي للفئة الرابعة يساوي :

0.2 ○ — 0.3 ○ — **0.1** ● — 0.4 ○

(ج) مركز الفئة الأولى عند x تساوي :

0 ○ — **10** ● — 15 ○ — 20 ○

(د) كثافة تكرار الفئة الرابعة تساوي :

0.1 ○ — **0.5** ● — 5 ○ — 55 ○

(هـ) الحد الأعلى للفئة الثالثة هو :

20 ○ — 30 ○ — 40 ○ — **50** ●

(و) مركز الفئة الثانية عند x تساوي :

25 ● — 30 ○ — 35 ○ — 15 ○

هامش للإجابة :

(أ) $\sum f = 10+15+20+5 = 50$

(ب) $\bar{f} = \frac{f}{\sum f} = \frac{5}{50} = 0.1$

(ج) مركز الفئة الأولى = $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$

$\frac{0+20}{2} = \frac{20}{2} = 10$

(د) طول الفئة الرابعة = حدها الأعلى − حدها الأدنى

$60 - 50 = 10$

∴ كثافة تكرار الفئة الرابعة = $\frac{\text{تكرارها}}{\text{طولها}} = \frac{5}{10} = 0.5$

(هـ) الحد الأعلى للفئة الثالثة = الحد الأدنى للفئة الرابعة = 50

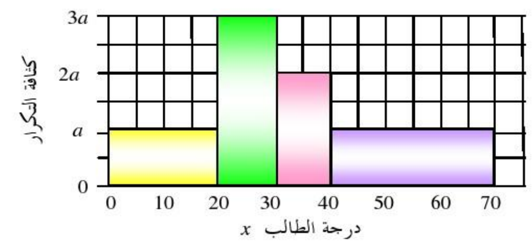
(و) الحد الأدنى للفئة الثانية = الحد الأعلى للفئة الأولى = 20

الحد الأعلى للفئة الثانية = الحد الأدنى للفئة الثالثة = 30

∴ مركز الفئة الثانية = $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$

$\frac{20+30}{2} = \frac{50}{2} = 25$

س ٦ : في المدرج التكراري المبين للمتغير المتصل x [الذي يمثل درجة مجموعة من الطلاب في مقرر الإحصاء] :



(أ) إذا كانت $a = 0.5$ فإن العدد الكلي للطلاب يساوي :

50 ● — 75 ○

100 ○ — 125 ○

(ب) وإذا كان عدد الطلاب يساوي 150 فإن قيمة a تساوي :

0.5 ○ — 1 ○

1.5 ● — 2 ○

هامش للإجابة :

(أ) مساحة أي مستطيل تمثل تكرار الفئة ، وبالتالي مجموع المساحات = مجموع التكرارات [أي المجموع الكلي للطلاب] . مع مراعاة أن مساحة أي مستطيل تساوي حاصل ضرب **طول قاعدته × ارتفاعه** ، يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$\underbrace{20 \times a}_{\text{الفئة الأولى}} + \underbrace{10 \times 3a}_{\text{الفئة الثانية}} + \underbrace{10 \times 2a}_{\text{الفئة الثالثة}} + \underbrace{30 \times a}_{\text{الفئة الرابعة}}$$

أي : $20a + 30a + 20a + 30a = 100a$

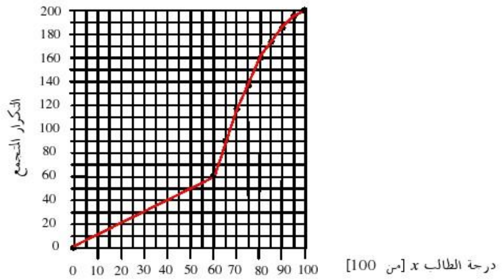
وبالتعويض عن $a = 0.5$ يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$100a = 100 \times 0.5 = 50$$

(ب) بنفس الأسلوب السابق ، نحسب مجموع مساحات المستطيلات [بدلالة a (وسبق حسابها فكان الناتج $100a$)] ونساوي الناتج بـــ 150 [عدد الطلاب] فنحصل على قيمة a :

$100a = 150 \qquad \therefore \; a = \frac{150}{100} = 1.5$

س ٧ : الشكل المرافق يبين المضلع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات 200 طالب في مقرر الإحصاء ، بالاسترشاد بهذا المضلع أجب على الآتي :



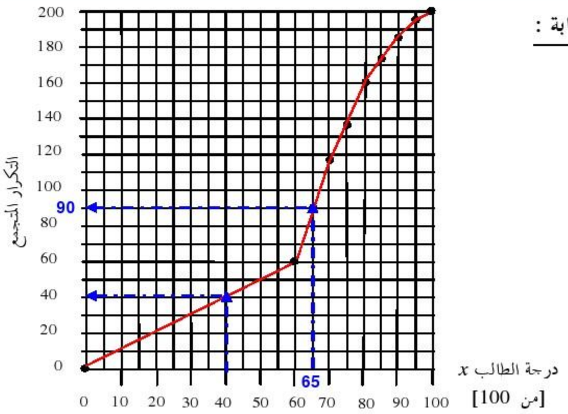
(أ) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 40 يساوي

○ 20% ● 40 ○ 160 ○ 80%

(ب) نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير +D على الأقل هي

● 55% ○ 45 ○ 40% ○ 65%

هامش للإجابة :



(أ) من الدرجة 40 [على المحور الأفقي] نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرار المناظر [وهو 40] . وحيث أن المضلع هو مضلع "الأقل من" والمطلوب "أقل من" يكون التكرار المرصود [40] هو النتيجة المطلوبة .

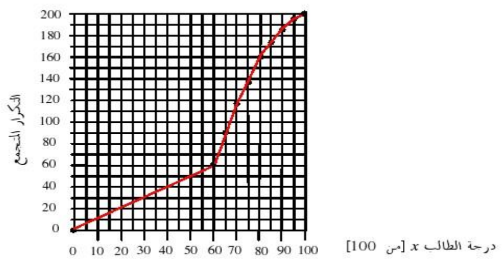
(ب) تقدير +D على الأقل [أي درجة أكبر من أو تساوي 65 من 100] . من الدرجة 65 (على المحور الأفقي) نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً ونرصد التكرار المتجمع [وهو 90] . وحيث أن المضلع هو مضلع "الأقل من" والمطلوب هو "الأكبر من أو تساوي" فيكون العدد المطلوب هو :

$200-90=110$ ونسبتهم المئوية $\frac{110}{200}\times100=55\%$

تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

(ج) عدد الطلاب الناجحين والحاصلين على درجة أقل من 80 هو :

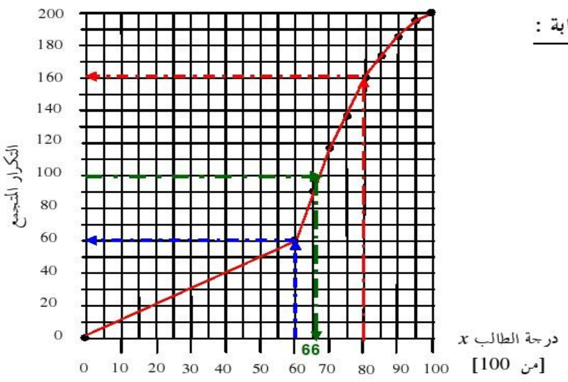
○ 60 ○ 80 ● 100 ○ 120



(د) الوسيط M لدرجات الطلاب هي (تقريباً) الدرجة :

○ 34 ○ 50 ○ 55 ● 66

هامش للإجابة :



(ج) ناجح [أي حاصل على درجة 60 فأكثر] ، إذن من الدرجتين 80 , 60 [على المحور الأفقي] نرسم خطين رأسيين حتى المضلع ثم خطين أفقيين تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرارين المناظرين [وهما 160 , 60] . فيكون العدد المطلوب هو : $160-60=100$

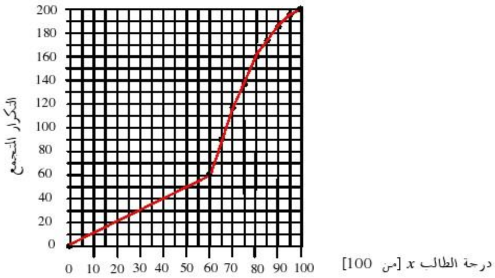
(د) الوسيط M هي قيمة المتغير x التي يناظرها تكرار متجمع قدره :

$$\frac{\sum f}{2}=\frac{200}{2}=100$$

من التكرار المتجمع 100 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي بالتقريب 66] هي وسيط الدرجات .

(هـ) الدرجة Q_1 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع درجات 25% من الطلبة تحتها هي (تقريباً) :

77.5 ○ 75 ○ 50 ● 25 ○

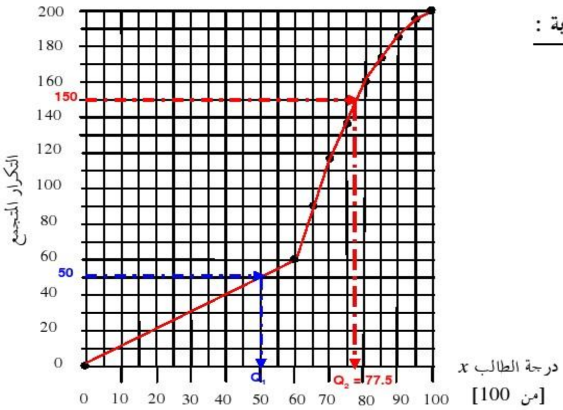


(و) أما الدرجة Q_2 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع درجات 25% من الطلبة فوقها فهي (تقريباً) :

77.5 ● 75 ○ 50 ○ 25 ○

ملحوظة : تُسمى القيمة Q_1 **بالربيع الأول** لمجموعة البيانات ، Q_2 **بالربيع الثالث** للبيانات ، في حين يكون الوسيط M هو **الربيع الثاني** كما سنرى في الباب القادم بإذن الله

هامش للإجابة :



(هـ) 25% من الطلبة تعني عدداً من الطلبه قدره : $\frac{25}{100} \times 200 = 50$

بنفس الطريقة التي اتبعناها مع الوسيط : من التكرار المتجمع 50 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي **50**] هي القيمة Q_1 المطلوبة .

(و) 25% من الطلبة [أي 50 طالب] درجاتهم **أكثر من أو تساوي** الدرجة Q_2 تعني أن 75% من الطلبة [أي 150 طالب] درجاتهم **أقل من** هذه الدرجة .
إذن بنفس الأسلوب السابق [ولكن من تكرار متجمع 150 بدلاً من 50 نحصل على : $Q_2 = \mathbf{77.5}$

عناصر المحاضرة

- التعريف بمقاييس النزعة المركزية
- الوسط الحسابي

التعريف بمقاييس النزعة المركزية

(١) المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو قيمة نموذجية يمكن أن تمثل مجموعة من البيانات بحيث تعطي دلالة معينة لتلك البيانات ، بمعنى أنه عندما ينظر الباحث (أو القارئ لتلك البيانات) ويريد أن يبحث عن شيء يربط هذه البيانات فإن تلك المتوسطات يمكن أن تعطيه بعضاً مما يريده .

وحيث أن مثل هذه القيم (المتوسطات) تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة البيانات (عند ترتيبها حسب قيمها) ، فإن هذه المتوسطات تُسمى أيضاً **بمقاييس النزعة المركزية** .

وهناك صور عديدة من هذه المقاييس وإن كان الأكثر شيوعاً :

- الوسط الحسابي (أو باختصار الوسط) .
- الوسيط
- المنوال (أو الشائع)

وغيرها ، وكل منها له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

التعريف بمقاييس النزعة المركزية

وإلى جانب كونه ممثلاً لمجموعة البيانات يجب أيضاً أن تتوافر في المتوسط عدة شروط ، منها :

- أن يمكن تحديد قيمته بالضبط وتكون عملية حسابه سهلة إلى حد كبير .
- أن يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .

ومن الجدير بالذكر أن بعض هذه المقاييس يمكن تحديدها حسابياً بسهولة ، وبعضها يمكن تحديدها بيانياً بسهولة ، والبعض يمكن تحديده حسابياً وبيانياً بسهولة ، لكننا في هذا المقرر سنكتفي بالطريقة الأبسط (للطالب) عند تحديد هذه المقاييس ، وهذه الطريقة الأبسط ستختلف من مقياس لآخر .

(٢) أهمية حساب مقاييس النزعة المركزية

عند معرفتنا بتلك المتوسطات (مقاييس النزعة المركزية) يصبح أمامنا فرصة كبيرة لأن :

- ننظر لمتوسط مجموعة من البيانات لنعرف الكثير عن خصائص تلك المجموعة .
- نعقد مقارنة بين عدة مجموعات من البيانات في وقت واحد وذلك من خلال مقارنة متوسطات تلك المجموعات بعضها ببعض .

الوسط الحسابي

(١) تعريف الوسط الحسابي

يُعرف الوسط الحسابي [وسنرمز له بالرمز $\bar{x}$] لمجموعة من البيانات $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ [قيم المتغير x وعددها n]

كالآتي :

الوسط الحسابي = مجموع قيم البيانات / عددها أي $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

س ١ : درجات خمسة طلاب في مقرر ما [الدرجة العظمى 20] هي : **10 , 12 , 7 , 2 , 9** . أوجد الوسط الحسابي لدرجاتهم .

ج ١ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{9+2+7+12+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

من هذا المثال **البسيط** يمكن ملاحظة **الخصائص العامة** التالية للوسط الحسابي :

- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة .
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .
- لا يتأثر بترتيب البيانات .
- لا يُشترط أن يكون الوسط الحسابي عدداً صحيحاً ولا يُشترط أن يكون إحدى قيم البيانات ولكنه قيمة تقع بين أقل قيمة في البيانات وأكبر قيمة فيها .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [كما يتضح من السؤالين التاليين] .

س ٢ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 9

ج ٢ :

$$\frac{10+15+12+13+9}{5}=\frac{59}{5}=\underline{\underline{11.8}}$$

س ٣ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 900

ج ٣ :

$$\frac{10+15+12+13+900}{5}=\frac{950}{5}=\underline{\underline{190}}$$

- حاصل ضرب قيمة الوسط الحسابي في عدد البيانات = مجموع قيم البيانات

وهذا واضح من تعريف الوسط الحسابي :

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n} \xrightarrow[\text{أن}]{\text{تعني}} n\times\bar{x}=\sum x$$

فمثلاً

9	2	7	12	10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

$$\underbrace{5\times 8}_{=40}=\underbrace{9+2+7+12+10}_{=40}$$

- إذا أضفنا عدد ثابت c لكل قيمة من قيم البيانات ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم + العدد الثابت c

بيانات قديمة: 9 ، 2 ، 7 ، 12 ، 10 — خمس درجات وسطها الحسابي 8

إضافة 1 لكل قيمة →

بيانات جديدة: 10 ، 3 ، 8 ، 13 ، 11 — خمس درجات وسطها الحسابي 9 [= 1 + 8]

- إذا ضربنا كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت c ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم x العدد الثابت c

بيانات قديمة: 9 ، 2 ، 7 ، 12 ، 10 — خمس درجات وسطها الحسابي 8

ضرب كل قيمة في 1.1 →

بيانات جديدة: 9.9 ، 2.2 ، 7.7 ، 13.2 ، 11 — خمس درجات وسطها الحسابي 8.8 [= 8 x 1.1]

سلي نفسك بهذا السؤال : اعتبر نفسك مدرساً للطلاب الخمسة المذكورين في س ١ [كانت درجاتهم (من 20) كالتالي : 10 , 12 , 7 , 2 , 9] وأردت أن تحسن من الوسط الحسابي لدرجاتهم ، أيهما أفضل : أن نزيد درجة كل طالب 5 درجات أم نزيد درجة كل طالب 50% من قيمتها ؟ علل إجابتك .

أضف إجابتك هنا واحتفظ بهذه الصفحة كصفحة من صفحات المحاضرة :

(٢) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متقطعة ذات تكرارت

س : أوجد الوسط الحسابي للأرقام :

5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 3 , 3 , 6 , 6 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 2 , 2 , 8 , 8 , 8

ج : بتطبيق مباشر للتعريف :

$$\bar{x} = \frac{(5+5+5+5+5+5)+(3+3)+(6+6)+(4+4+4+4+4)+(2+2)+(8+8+8)}{20} = \frac{96}{20} = 4.8$$

لاحظ أن الرقم **5** متكرر **6** مرات ، الرقم **3** مرتان ، والرقم **6** مرتان ، والرقم **4** متكرر **5** مرات ، والرقم **2** مرتان ، والرقم **8** ثلاث مرات ، وبالتالي يمكن عمل العملية الحسابية السابقة كالآتي :

$$\bar{x} = \frac{(6 \times 5) + (2 \times 3) + (2 \times 6) + (5 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 8)}{6 + 2 + 2 + 5 + 2 + 3}$$

$$= \frac{30+6+12+20+4+24}{20} = \frac{96}{20} = \underline{\underline{4.8}}$$

وهذا يمكن إنجازه بيسر من خلال الجدول التكراري للبيانات كالتالي :

$$\frac{30+6+12+20+4+24}{20}=\frac{96}{20}$$

نعمل هذا العمود : حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها

المتغير x	التكرار f	fx
5	6	30
3	2	6
6	2	12
4	5	20
2	2	4
8	3	24
	20	96
	$\sum f=20$	$\sum fx=96$

ده الجدول التكراري بتاعنا [مُعطى أو نعمله]

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{96}{20}=4.8$$

أي أنه في حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات يمكن حساب الوسط الحسابي من العلاقة :

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات

$\sum fx$ هو مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها

س : من مائة رقم يتكرر الرقم 4 عشرون مرة ، والرقم 5 أربعون مرة ، والرقم 6 ثلاثون مرة ، والباقي كانوا الرقم 7 . احسب الوسط الحسابي للمائة رقم .

ج : بتكوين الجدول التكراري للأرقام المذكورة ، ثم بضرب كل قيمة في تكرارها والتجميع [عمود fx] يكون الوسط الحسابي للأرقام المذكورة هو :

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{530}{100}=\underline{\underline{5.3}}$$

الجدول التكراري		
المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530
	$\sum f=100$	$\sum fx=530$

(٣) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متصلة

عندما نتعامل مع بيانات متصلة تُعطى فيها قيم المتغير على صورة فترات ، فيمكن اعتبار أن جميع القيم داخل الفترة مطابقة لمركز الفئة ، وبالتالي يمكن استخدام الصيغة السابقة لحساب الوسط الحسابي :

$$\bar{x}=\frac{\sum f\,x_0}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات ، $\sum f\,x_0$ هو مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرار الفئة

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢-٤) [شريحة ٤ – المحاضرة الرابعة] يكون الوسط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار (بوحدات السنتيمتر) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = \underline{31.7}$$

الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110
		$\sum f = 50$		$\sum f x_0 = 1585$

وفي مثال (٢-٦) [شريحة ١٦ – المحاضرة الخامسة] يكون الوسط الحسابي للأجر السنوي للعاملين (بآلاف الريالات) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = \underline{83.75}$$

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450
		$\sum f = 60$		$\sum f x_0 = 5025$

من كل ما سبق يمكن استعراض مزايا وعيوب الوسط الحسابي كالتالي :

- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة [ميزة].
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات [ميزة] .
- لا يتأثر بترتيب البيانات [ميزة] .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [عيب] .
- لا يمكن حسابه بالرسم ، أي بيانياً [عيب] .

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

(١) درجات طالب في ست امتحانات هي : 78 , 87 , 68 , 72 , 91 , 84 . أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات . [الإجابة : 80]

(٢) أوجد الوسط الحسابي للقياسات : 40.6 , 39.8 , 39.2 , 40.3 , 39.5 , 40.2 , 39.7 , 39.2 , 40.9 , 38.8 . [الإجابة : 39.82]

(٣) (أ) الأجر الشهري لأربعة موظفين (بالريال) هو : 30000 , 6500 , 6000 , 5000 . أوجد الوسط الحسابي للأجور [الإجابة 11875 ريال]

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الأجر ممثل للأجور ؟ . علل إجابتك . [الإجابة : لا] . علل أنت بقى . .

(٤) مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات ، سبع سبعات ، ثماني ثمانيات ، وتسع تسعات ، وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابي للأرقام ؟
[الإجابة : 8.25]

(٥) الجدول المرافق يعطي التوزيع التكراري لأوزان 100 طالب بوحدات الكيلوجرام . أوجد الوسط الحسابي للوزن ..

الوزن x (بالكيلو)	60 -	62 -	66 -	68 -	72 - 74
عدد الطلاب f	5	18	42	27	8

[الإجابة : 67.45]

تعريف الوسيط :

(ببساطة) يُعرف الوسيط [وسنرمز له بالرمز M] لمجموعة من القيم (المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً حسب قيمها) على أنه القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد ، أو بتعبير آخر هي القيمة التي في المنتصف

فمثلاً لمجموعة القيم : 13 , 14 , 19 , 16 , 20 , 15 , 18 , 14 , 19 [عددها ٩ قيم] ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

ترتيب تصاعدي (من الأصغر للأكبر)

13 14 14 15 **16** 18 19 19 20

مجموعتان متساويتان في العدد

ترتيب تنازلي (من الأكبر للأصغر)

20 19 19 18 **16** 15 14 14 13

مجموعتان متساويتان في العدد

لاحظ هنا أن عدد القيم n [هنا = ٩] فردي وبالتالي هناك قيمة واحدة في منتصف المجموعة

يكون الوسيط هو العدد الخامس [رتبة الوسيط أي ترتيبه بين القيم] وقيمته 16

هام جداً

فرق بين رتبة الوسيط وقيمته

أما لمجموعة القيم : 12 , 13 , 14 , 19 , 16 , 20 , 15 , 18 , 14 , 19 [عددها ١٠ قيم (أي زوجي) حيث أضفنا القيمة 12 للمجموعة السابقة] ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

ترتيب تصاعدي (من الأصغر للأكبر)

12 13 14 14 **15** **16** 18 19 19 20

الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين بالمنتصف

مجموعتان متساويتان في العدد

ترتيب تنازلي (من الأكبر للأصغر)

20 19 19 18 **16** **15** 14 14 13 12

الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين بالمنتصف

مجموعتان متساويتان في العدد

في هذه الحالة توجد قيمتان بالمنتصف وهما القيمة الخامسة والقيمة السادسة [وهما العددان 16 , 15] ، عندئذ يكون الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين ، أي :

$$\frac{15 + 16}{2} = 15.5$$

إذن من السابق يمكن استنتاج **طريقة حساب الوسيط لمجموعة من القيم** كالآتي :

- قم أولاً بترتيب البيانات **تصاعدياً** أو **تنازلياً** .
- حدد ما إذا كانت هناك قيمة واحدة بالمنتصف أم قيمتين ، وهذا يتوقف على قيمة n حيث n عدد القيم

فإذا كانت n فردية
كانت هناك قيمة **واحدة** في المنتصف رتبتها
$$\frac{n+1}{2}$$
وتكون هذه القيمة هي **الوسيط**

وإذا كانت n زوجية
كانت هناك **قيمتان** في المنتصف رتبتهما
$$\frac{n}{2} \quad , \quad \frac{n}{2}+1$$
ويكون الوسط الحسابي لهاتين القيمتين هو **الوسيط**

فمثلاً

$n = 5$

9 2 7 12 10

ترتيب تصاعدي

2 7 **9** 10 12

هناك قيمة **واحدة** في المنتصف رتبتها :
$$\frac{n+1}{2}=\frac{5+1}{2}=3$$
أي القيمة **الثالثة** . وتكون تلك القيمة هي الوسيط . أي أن :
الوسيط = 9

تذكر :
الوسط الحسابي لهذه القيم هو :
$$\frac{9+2+7+12+10}{5}=8$$

فمثلاً

$n = 6$

9 2 7 12 10 500

ترتيب تصاعدي

2 7 **9** **10** 12 500

هناك قيمتان في المنتصف رتبتهما :
$$\frac{n}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad , \quad 3+1=4$$
أي القيمتان **الثالثة** و**الرابعة** ، وتكون قيمة **الوسيط** هي الوسط الحسابي لهاتين القيمتين ، أي :
$$\frac{9+10}{2}=9.5$$

الوسط الحسابي لهذه القيم هو
$$\frac{9+2+7+12+10+500}{6}=90$$
وواضح تأثره كثيراً بالقيمة المتطرفة 500

هل لاحظت أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة 500

مثال : مجموعة الأرقام 9 7 6 6 **5** 4 3 3 2 وسيطها هو **5** [عدد القيم n = 9 (فردي)]

تذكر : الوسط الحسابي لهذه القيم هو : $\bar{x}=\frac{2+3+3+4+5+6+6+7+9}{9}=5$

مثال آخر : مجموعة الأرقام 18 15 12 **11** **9** 7 5 5 وسيطها هو $\frac{9+11}{2}=10$ [n = 8 (زوجي)]

تذكر : الوسط الحسابي لهذه القيم هو : $\bar{x}=\frac{5+5+7+9+11+12+15+18}{8}=10.25$

في السؤال [سلي نفسك – المحاضرة السابعة – شريحة ١٤ – س١] : كانت درجات طالب في ٦ اختبارات هي :
84 , 91 , 72 , 68 , 87 , 78
وطلبنا حساب الوسط الحسابي للدرجات ، أضف لهذا حساب وسيط هذه الدرجات ، وحدد أيهما تفضل (كمتوسط) ولماذا ؟

الوسط الحسابي لدرجات الطالب هو : $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{84+91+72+68+87+78}{6}=\frac{480}{6}=80$

ولتحديد الوسيط لابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) : **68 , 72 , 78 , 84 , 87 , 91**

وحيث أن عدد القيم زوجي ، إذن هناك قيمتان في المنتصف [هما 84 , 78] وسطهما الحسابي $81 = \frac{78+84}{2}$ = **الوسيط**

لاحظ في السؤال السابق أن كلاً من المتوسطين : **الوسط الحسابي** و **الوسيط** من السهل حسابهما ومن الممكن أن يمثل كل منهما مقياساً للنزعة المركزية للبيانات ، لكن الأفضل (نسبياً هنا) أن نستخدم الوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية للبيانات حيث أنه يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات ، بينما يهتم الوسيط بقيم البيانات في المنتصف (وذلك بعد ترتيبها) .

مثال : الأجر (بالريال) في الساعة لخمسة عاملين في مكتب هو : **37 , 92 , 32 , 39 , 25** . احسب الوسط الحسابي للأجور ووسيط هذه الأجور . أيهما تفضل كمقياس لمتوسط أجر الساعة ؟ ولماذا ؟

الوسط الحسابي للأجور هو : $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25+39+32+92+37}{5} = \frac{225}{5} = 45$

أما لتحديد الوسيط ، فلابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) : **25 , 32 , 37 , 39 , 92**

وحيث أن عدد القيم فردي ، إذن هناك قيمة واحدة في المنتصف [هي 37] وهي **الوسيط**

لاحظ في السؤال السابق أن الوسط الحسابي (بالرغم من عدم احتياجه لترتيب القيم وفي نفس الوقت يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات) إلا أنه تأثر جداً بالقيمة المتطرفة **92** ، في حين لم يتأثر بها الوسيط لأنه يعتمد على البيانات في المنتصف . لذا يُفضل هنا استخدام الوسيط كمقياس للنزعة المركزية حيث يعطي دلالة أفضل لمتوسط الأجور من الوسط الحسابي .

والآن ماذا عن الوسيط لبيانات كمية متصلة

أعتقد أننا نستطيع تحديده بسهولة [حيث نوهنا لذلك في الباب الثاني] فهو :

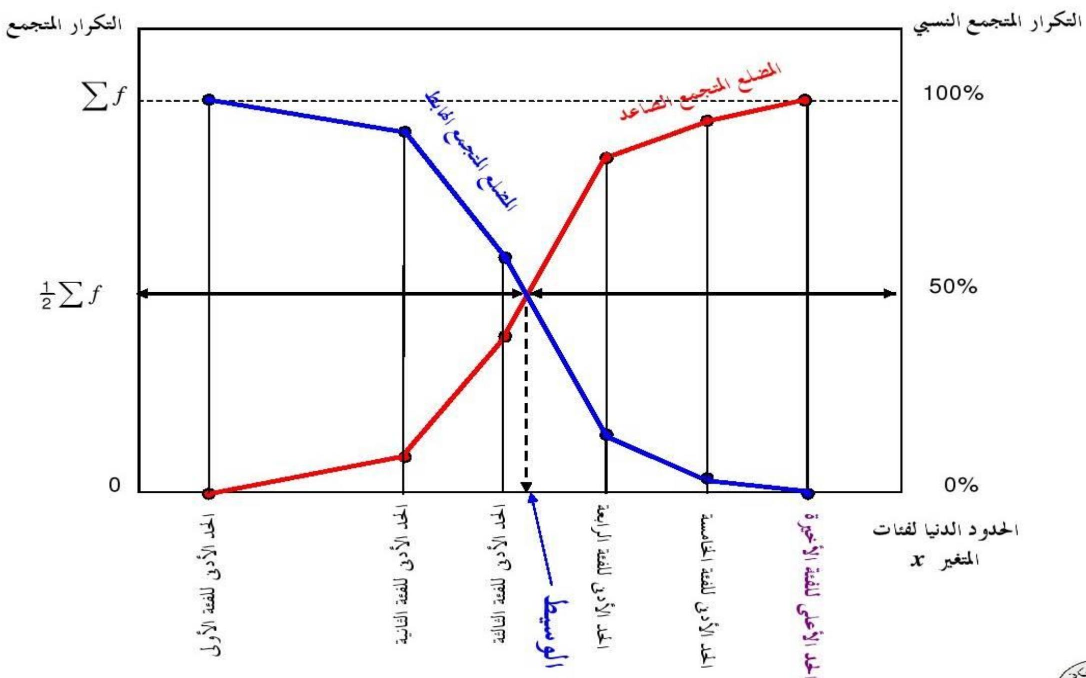
- قيمة المتغير المناظرة لنقطة تقاطع المضلعين : المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط للبيانات .

أو

- القيمة التي يناظرها تكرار متجمع = نصف مجموع التكرارات

أو

- القيمة التي يناظرها تكرار نسبي متجمع = **50%**



طريقة تحديد الوسيط من :

* من المضلع المتجمع الصاعد فقط
* من المضلع المتجمع الهابط فقط .
* من المضلعين معاً

مثال : في دراسة جغرافية لعدد من مساحات مجموعة من الأراضي لمنطقة سكنية بالرياض تبين أن التوزيع التكراري لها كما هو مبين .

المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط لمساحة الأراضي .

المساحة (بالفدان)	عدد قطع الأراضي
1 -	14
3 -	29
5 -	18
7 - 10	9

المتغير x هنا هو مساحة الأرض (بالفدان) ، في حين يمثل عدد قطع الأراضي التكرار f .

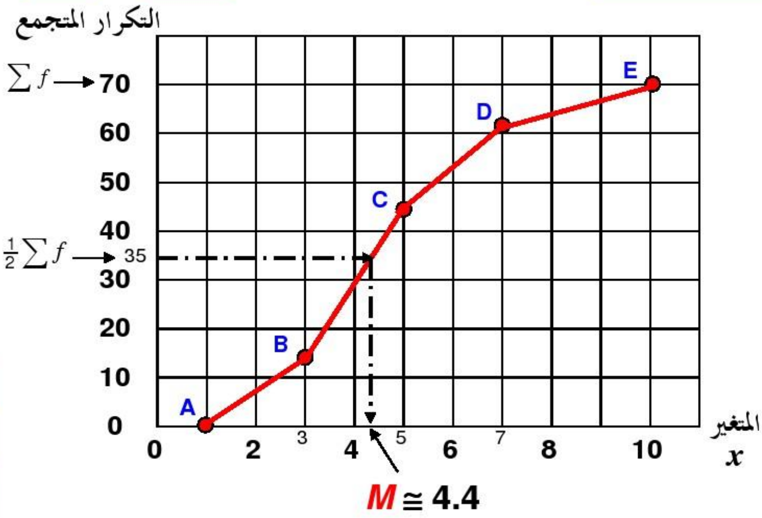
أولاً : الوسط الحسابي : نستكمل الجدول التكراري كما هو مبين :

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f	المركز x_0	$f\,x_0$
الأولى	$1 \le x < 3$	14	2	28
الثانية	$3 \le x < 5$	29	4	116
الثالثة	$5 \le x < 7$	18	6	108
الرابعة	$7 \le x < 10$	9	8.5	76.5
		$\sum f = 70$		$\sum f\,x_0 = 328.5$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum f\,x_0}{\sum f} = \frac{328.5}{70} = 4.692857143 \cong \underline{4.7}$$

ثانياً : الوسيط : نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد [أو الهابط]



الجدول التكراري

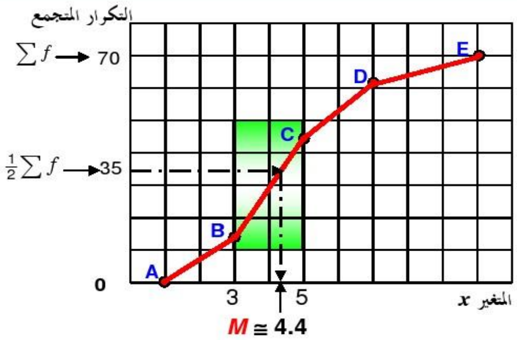
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

كده انتهى السؤال ، أي أن الوسط الحسابي للمساحة ≅ **4.7**
والوسيط ≅ **4.4**

لكن هناك ملحوظة هامة جداً مش عارف أنت لاحظتها أم لا



الوسيط يقع بين النقطتين B(3 , 14) , C(5 , 43) [أي داخل الفئة $3 \le x < 5$] هذه الفئة تُسمى بـــ **الفئة الوسيطية**

أي أن الفئة الوسيطية هي تلك الفئة التي يقع داخلها الوسيط

وهنا يتبادر إلى الذهن سؤالان هامان :

السؤال الأول : هل من الممكن تحديد الفئة الوسيطية من الجدول التكراري مباشرةً أم لازم نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد ونرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

السؤال الثاني : هل من الممكن [بعد تحديد الفئة الوسيطية] تحديد الوسيط من الجدول التكراري مباشرة دون الحاجة للجدول التكراري المتجمع الصاعد أو المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

والإجابة على السؤالين : نعم يمكن تحديد الفئة الوسيطية من الجدول التكراري مباشرةً ، ثم بعد ذلك يمكن أيضاً من هذا الجدول التكراري تحديد قيمة الوسيط دون أن نحتاج لعمل جدول تكراري متجمع صاعد ورسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ، **وتعالي نشوف إزاي**

بالنسبة للسؤال الأول [تحديد الفئة الوسيطية]

(١) احسب أولاً نصف مجموع التكرارات .

(٢) ابدأ بالرقم صفر في ذهنك وزود تكرارات الفئات على التوالي وكل مرة قارن بنصف مجموع التكرارات السابق . أول ما يزيد الناتج عن نصف المجموع السابق أو يساويه يبقى آخر فئة زودنا تكرارها تكون هي الفئة الوسيطية .

ياالله نشوف

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

- احسب $\frac{1}{2}\sum f$: $\xleftarrow[\text{طلع ..}]{\text{ماشي يا عم}}$ $\frac{1}{2}\sum f = \frac{70}{2} = 35$
- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر السابق تكرار الفئة الأولى [14] ينتج **14**

14 أقل من 35 ، يبقى الفئة الأولى ليست الفئة الوسيطية

- نزود على الـــ 14 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [29] ينتج **43**

43 أكبر من 35 ، يبقى الفئة الثانية هي الفئة الوسيطية

مع تحيات اخوكم المعتقل

وبالنسبة للسؤال الثاني [تحديد الوسيط (بعد ما حددنا الفئة الوسيطية)]

(١) حدد الحد الأدنى للفئة الوسيطية وأيضاً طولها .
(٢) احسب ما يُسمى بـــ "التكرار المتجمع السابق" = مجموع تكرار الفئات السابقة للفئة الوسيطية
(٣) احسب الوسيط من العلاقة :

الوسيط M = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + $\left[\dfrac{\text{(نصف مجموع التكرارات − التكرار المتجمع السابق)}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة الوسيطية} \right]$

يالله نشوف

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

الفئة الوسيطية ← الثانية

- الفئة الوسيطية هي الفئة الثانية :

حدها الأدنى 3 وطولها 2 [= 3 − 5] وتكرارها 29

- التكرار المتجمع السابق :

يساوي مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطية [أي تكرار الفئة الأولى فقط] = 14

- بالتعويض في القانون السابق : [ونعمل الحسابات واحدة واحدة الله يسترها معاكم]

$$M = 3 + \left[\frac{35 - 14}{29} \times 2\right] = 3 + \left[\frac{21}{29} \times 2\right] = 3 + 1.44827 = 4.44827 \cong 4.4$$

تُسمى الطريقة الحسابية السابقة (لحساب الوسيط) بـــ "طريقة الاستكمال"

مثال جميل : طُلب من ٣ مشرفين بإحدى المدارس تقسيم طلبة المدرسة إلى ٣ مجموعات متساوية على أن يقوم كل مشرف بتقديم بيان عن فئات العمر المختلفة لطلبة مجموعته وعدد الطلبة في كل فئة من فئات العمر ، فكانت الجداول التكرارية المبينة :

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

هل يمكن من خلال البيانات السابقة حساب الوسط الحسابي لعمر الطلبة في كل مجموعة ؟ علل إجابتك . وإذا كانت الإجابة بـــ "لا" احسب مقياساً مناسباً يُعطي دلالة لمتوسط العمر في كل مجموعة .

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

الإجابة هي " **لا** " للمجموعات الثلاث [أي لا يمكن حساب الوسط الحسابي للعمر] ، وها هي الأسباب :

- في المجموعة الأولى : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من أسفل]
- في المجموعة الثانية : الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من أعلى]
- في المجموعة الثالثة : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف وأيضاً الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من الطرفين]

مثل هذه الجداول تُسمى **جداول تكرارية مفتوحة** :

- من أسفل [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف]
- من أعلى [إذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف]
- من الطرفين [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروفين]

وحيث أن الوسيط لأي مجموعة من البيانات يعتمد في حسابه على البيانات الموجودة في المنتصف ، إذن يمكن استخدام **الوسيط** كمتوسط للدلالة على متوسط العمر في كل مجموعة :

بالنسبة للمجموعة الأولى من الطلبة :

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

تحديد الفئة الوسيطية :

- احسب $\frac{1}{2}\sum f$: $\frac{1}{2}\sum f = \frac{98}{2} = 49$
- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر تكرار الفئة الأولى [20] ينتج 20 [أقل من 49]
- نزود على الـــ 20 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [25] ينتج 45 [أيضاً أقل من 49]
- نزود على الـــ 45 الأخيرة تكرار الفئة الثالثة [35] ينتج 80 [أكبر من 49]

إذن الفئة الثالثة هي الفئة الوسيطية

تحديد الوسيط :

- الحد الأدنى للفئة الوسيطة = 12
- طول الفئة الوسيطة = 3 [= 12 – 15]
- تكرار الفئة الوسيطة = 35
- التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطة

[أي الفئتين الأولى والثانية] = 25 + 20 = 45 . إذن

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطة ←

$$M = 12 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] = 12 + \left[\frac{4}{35} \times 3\right] = 12 + 0.342857 = 12.342857 \cong \underline{12.3}$$

وبنفس الطريقة يمكن التعامل مع المجموعتين (٢) ، (٣) ، وعليك التأكد من صحة الحل

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطة ←

$$M = 15 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] \cong \underline{15.3}$$

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطة ←

$$M = 12 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] \cong \underline{12.3}$$

سلي نفسك بهذا السؤال : سبق وحسبنا الوسط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار [مثال (٢–٤)/محاضرة ٧/ص١٣] وكان 31.7 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأطوال وكان 32 تقريباً . أيضاً سبق وحسبنا الوسط الحسابي للأجر السنوي لمجموعة من العمال [مثال (٢–٦)/محاضرة ٧/ص١٣] وكان 83.75 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأجور وكان 80 تقريباً . والآن مطلوب من سعادتك حساب الوسيط للمثالين بطريقة الاستكمال السابقة ومقارنة الحلول ببعضها .

لمساعدتك على الحل وتنظيم تفكيرك قم باستكمال البيانات الناقصة في المثالين

مثال (٢–٤)

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \le x < 20$	4
الثانية	$20 \le x < 30$	16
الثالثة	$30 \le x < 35$	12
الرابعة	$35 \le x < 40$	10
الخامسة	$40 \le x < 50$	6
السادسة	$50 \le x < 60$	2
		$\sum f = 50$

الفئة الوسيطة هي : ....

حدها الأدنى .... وطولها هو .... وتكرارها ....

التكرار المتجمع السابق = ...

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 32.1 تقريباً

مثال (٢–٦)

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f
الأولى	$50 \le x < 60$	6
الثانية	$60 \le x < 70$	9
الثالثة	$70 \le x < 80$	15
الرابعة	$80 \le x < 90$	12
الخامسة	$90 \le x < 100$	9
السادسة	$100 \le x < 120$	6
السابعة	$120 \le x < 180$	3
		$\sum f = 60$

الفئة الوسيطة هي : ....

حدها الأدنى .... وطولها هو .... وتكرارها ....

التكرار المتجمع السابق = ...

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 80 بالضبط

مع تحيات اخوكم المعتقل