

الفصل الرابع

التباديل (permutations)

التبديل : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهما .

مثال : لدينا 4 كليات في الجامعة أحد الترتيبات لهذه الكليات هو الهندسة ،العلوم،
التربية ،الطب

وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد 24 ترتيبا مختلفا ناتجة كالتالي $4.3.2.1=24$
ويمكننا كتابة العبارة 4.3.2.1 لحساب عدد التباديل على الصورة 4! وتقرأ
مضروب 4

$$4!=4.3.2.1=24$$

$$5!=5.4.3.2.1=120$$

المضروب : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ويساوي
حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من أو تساوي n

$$\text{ويعرف } 0!=1$$

$$n!=n(n-1).(n-2).....2.1$$

التباديل : يرمز الى عدد تباديل n من العناصر المختلفه مأخوذه r في كل مرة
بالرمز ${}_n P_r$ حيث :

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : عدد تباديل 6 مأخوذا 4 في كل مرة يساوي

$${}_6 P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6.5.4.3 = 360$$

تمرين : أحسب عدد تباديل 5 مأخوذة 3 في كل مرة

ملاحظة : عند كتابة التباديل على الصورة ${}_nP_r$

تدل r على عدد العوامل المتتالية المضروبة في بعضها

وتدل n على العامل الأول فمثلا الرمز ${}_5P_3$ يدل على أخذ 3 عوامل متتالية فنبدأ بالعدد 5 وهي :

$5.4.3=60$ وهو الناتج نفسه من تطبيق قانون التباديل وللاختصار نكتب

$p(n,r)$ بدلا عن ${}_nP_r$

مثال : أوجد قيمة ${}_5P_2$

الحل : طريقة (1)

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$$

طريقة (2)

$${}_5P_2 = 5.4 = 20$$

ملاحظات :

$${}_np_n = n!$$

$${}_np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$\text{مثال : } {}_5P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

تمرين : بكم طريقة يمكن اختيار 3 كتب من مجموعة مكونة من 10 كتب ؟

التوافيق (Combinations)

التوافيق هي تنظيم العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم لحضور اجتماع فإن الترتيب في اختيارهم غير مهم

بفرض أنك تريد اختيار 3 موظفين من بين 7 موظفين في إحدى الإدارات وعليه فيمكنك استخدام التوافيق

الرمز ${}_nC_r$ يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{ويمكن أن تكتب على الصورة} \quad \binom{n}{r}$$

مثال : عدد توافيق 6 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة

$${}_6C_2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6!}{48} = 15$$

مثال : يريد مدير شركة اختيار 5 محاسبين من بين 8 محاسبين لعمل حسابات معينة للشركة ، بكم طريقة يمكن للمدير اختيار المحاسبين محمد، أحمد، خالد ، فهد ، سعد ؟

الحل : الترتيب غير مهم فالناتج يساوي توافيق 8 مأخوذة 5 في كل مرة أي أن

$${}_8C_5 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8!}{3!5!} = 8 \cdot 7 = 56$$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \quad \text{ملاحظات :}$$

مثال : أوجد ${}_6C_4$

$${}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15 \quad \text{الحل :}$$

تمرين : أوجد ${}_5C_2$

$${}_nC_n = 1$$

$${}_nC_0 = 1 \quad \text{ملاحظات :}$$

$${}_nC_1 = n$$

$${}_3C_3 = 1$$

$${}_5C_0 = 1 \quad \text{مثال :}$$

$${}_7C_1 = 7$$

مثال : يتكون مجلس إدارة شركة كبرى من 8 أعضاء فإذا كان عبدالله ، حسان ، محمد هم أعضاء في مجلس الإدارة فبكم طريقة يمكن أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسا ، نائبا للرئيس ، وأميناً للسر على الترتيب مع العلم أن الاختيار يتم عشوائياً .

الحل : بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء المجلس فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جداً ممكن تطبيق التباديل

$${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

ملاحظة : لو كان الترتيب غير مهم ممكن نطبق التوافيق كما يلي :

$${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = 8 \cdot 7 = 56$$

$${}_8C_3 = \frac{{}_8P_3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad \text{أيضا بالطريقة الأخرى}$$

نظرية ذات الحدين

$$(x + a)^n = {}_n C_0 a^0 x^n + {}_n C_1 a^1 x^{n-1} + {}_n C_2 a^2 x^{n-2} + \dots + {}_n C_n a^n x^0$$

مثال : أوجد مفكوك $(x + 5)^2$

الحل :

$$(x + 5)^2 = {}_2 C_0 5^0 x^2 + {}_2 C_1 5^1 x^1 + {}_2 C_2 5^2 x^0 = x^2 + 10x + 25$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو $H_{r+1} = {}_n C_r (s \text{ term})^r (f \text{ term})^{n-r}$

ملاحظة : r أقل من رتبة الحد بواحد

مثال : أوجد الحد الرابع في مفكوك $(x + 2)^6$

الحل : بما أن $n = 6$ و $r = 3$ فإن :

$$H_4 = {}_6 C_3 (2)^3 x^4 = 20(8)x^4 = 160x^4$$

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $(x + 3)^8$

الحل : بما أن $n = 8$ و $r = 4$ فإن :

$$H_5 = {}_8 C_4 (3)^4 x^5 = 70(81)x^5 = 5670x^5$$

تمرين : أوجد الحد الثالث في مفكوك $(x + 5)^7$

تمرين : أوجد الحد الرابع في مفكوك $(x + 1)^5$