الباب الأول
مدخل لمادة الإحصاء

الإحصاء

الإحصاء:

هو علم جمع البيانات وتصنيفها في صورة جداول ثم تمثيلها بيانياً على شكل رسومات وتحليلها واستخلاص النتائج منها ثم اتخاذ القرار المناسب، ويستخدم في مجالات عدة منها:

١. علم النفس
٢. علم الاجتماع
٣. دراسة مجتمع السكان
٤. دراسة خطط التعليم
٥. الاقتصاد
٦. علم الأحياء
٧. الزراعة والطب والصيدلة وغيرها.

جمع البيانات :

يقصد بذلك الحصول على بيانات رقمية أو وصفية تتصف بالصحة والدقة عن ظاهرة معينة وهي نوعان :

أ. **بيانات تاريخية :** ويمكن الحصول عليها من البيانات التي تنشرها الإحصائية أو الهيئات المتخصصة في المجلات والكتب .

ب. **بيانات ميدانية :** ويتم جمع هذه البيانات على الاستمارة الإحصائية بإحدى الطرق الآتية :

(١) المقابلة الشخصية (٢) المراسلة بالبريد أو الهاتف.

ويتم جمع البيانات الميدانية بأحد أسلوبين:

- باستخدام الحصر الشامل لجميع أفراد المجتمع .
- أو بأسلوب العينات لبعض أو جزء من المجتمع وتعمم النتائج على المجتمع بالكامل.

التبويب:

بعد جمع البيانات يجب مراجعتها بكتابتها وتلخيصها ثم عرضها بعد ذلك على هيئة جداول أو رسومات.

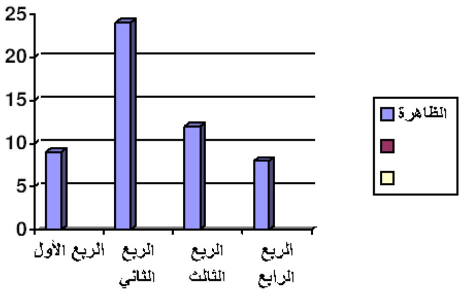
الرسومات البيانية:

تعتبر الرسوم البيانية وسيلة مفيدة لشرح وتوضيح الحقائق الرقمية وإبراز العلاقة بين المتغيرات ..

ومنها الرسوم التالية :

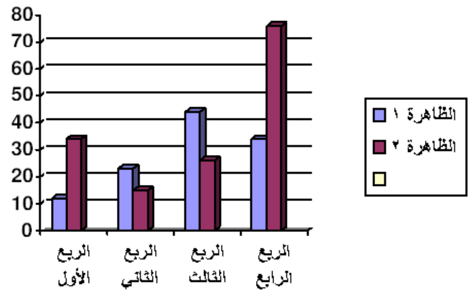
١- الأعمدة البسيطة :

وهي عبارة عن أعمدة رأسية أو مستطيلات متساوية القاعدة تتناسب ارتفاعاتها مع البيانات التي تمثلها .



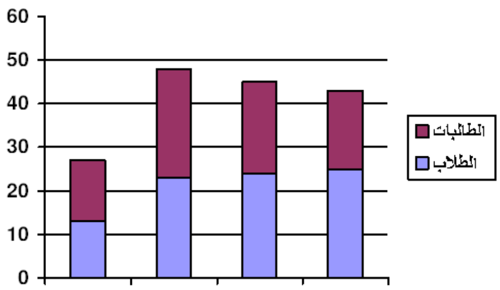
٢- الأعمدة المزدوجة:

وتستخدم لمقارنة ظاهرتين أو أكثر لعدة سنوات أو في حالة بيانات مختلفة مزدوجة لخواص مختلفة .



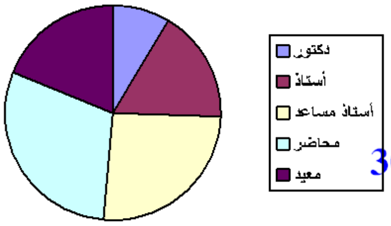
٣-الأعمدة المجزأة:

وتستخدم في حالة مقارنة ظاهرتين بدلاً من الأعمدة المزدوجة ويتم رسمها بعمل عامود واحد يمثل كلا الظاهرتين محل الدراسة في كل سنة.



٤- المنحنى:
ويستخدم لتوضيح الاتجاه العام للظاهرة خلال فترة من الزمن ، ويمكن رسم المنحنى برسم نقط تمثل السنوات كمحور أفقي مقابل قيم الظاهرة كمحور رأسي – ثم توصل هذه النقط .

٥- الرسم الدائري:
ويستخدم الرسم الدائري عندما يكون المجموع الكلي العام لبيانات الظاهرة مقسم إلى عدة أقسام مختلفة، بحيث يُمثل كل قسم بقطاع من الدائرة يتناسب مع حجمه بالنسبة لمجوع الأقسام.
طريقة إجراء الرسم الدائري:
١) نرسم أي دائرة لها نصف قطر نختاره.
٢) نحسب زاوية القطاع من القاعدة:



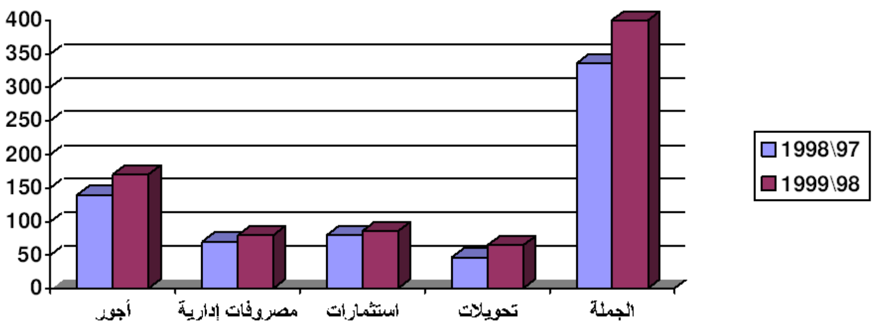
$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة جزء الظاهرة}}{\text{المجموع الكلي}} \times 300$$

مثال (١) : المطلوب عرض البيانات التالية:

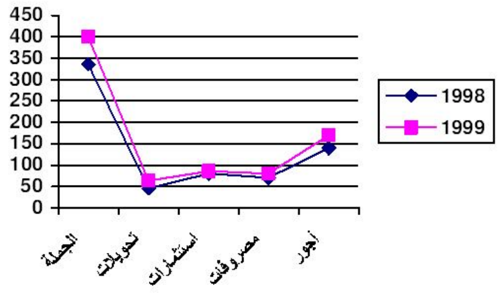
البيان	أجور	مصروفات إدارية	استثمارات	تحويلات	الجملة
١٩٩٨/٩٧	140	70	80	46	336
١٩٩٩/٩٨	170	80	86	64	400

١) بالأعمدة. ٢) بالمنحنى. ٣) الرسم الدائري.

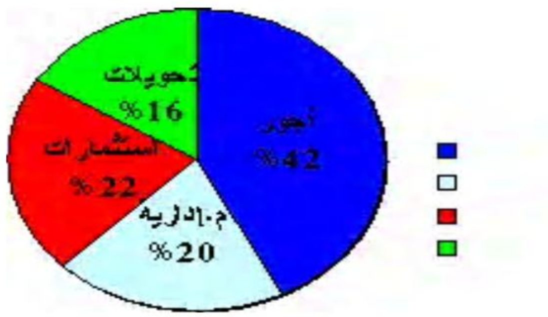
الحل:
١- بالأعمدة:



٢- المنحنى:



٣- الرسم الدائري:



الباب الثاني

التوزيعات التكرارية وتمثيلها بيانياً

أولاً: تبويب البيانات:

تنقسم البيانات إلى نوعين:

أ- البيانات الوصفية (نوعية) ب- البيانات الكمية (رقمية)

أ- البيانات الوصفية (نوعية):
وتكون لها صفات معينة أو أوصاف مثل: الحالة التعليمية – المهنة – النشاط الاقتصادي – الحالة الاجتماعية.

مثال (١) :
الجدول التالي يبين حالة المرتبة الأكاديمية لعينة من 30 عضو هيئة تدريس بإحدى الجامعات:

أ. مشارك	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مساعد
محاضر	أستاذ	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك
أ. مشارك	أ. مساعد	أ. مشارك	أستاذ	أ. مساعد
أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مساعد	أستاذ
أ. مشارك	أ. مساعد	محاضر	أ. مشارك	أ. مشارك
محاضر	أ. مساعد	أ. مشارك	محاضر	أستاذ

والمطلوب وضع البيانات في جدول تكراري.

الحل:
حيث إن البيانات وصفية فيمكننا تبويبها حسب الأوصاف التي تمثل الظاهرة، وهي: أستاذ ، أ.مشارك، أ. مساعد، محاضر.

المرتبة الأكاديمية	العلامات	العدد
أستاذ	IIII	4
أ. مشارك	IIIII IIIII	10
أ. مساعد	IIIII IIII	9
محاضر	IIIII II	7

الجدول التكراري للمرتبة الأكاديمية لأعضاء هيئة التدريس

المرتبة الأكاديمية	العدد
أستاذ	4
أ. مشارك	10
أ. مساعد	9
محاضر	7

ب-البيانات الكمية (الرقمية):

وهي التي تأخذ قيماً رقمية (عددية) عندما تكون الظاهرة قابلة للقياس مثل السن – الدخل – الوزن – عدد أفراد الأسرة.

وتنقسم هذه القيم إلى نوعين:

١- كميات متصلة:

وهي التي تأخذ جميع القيم بين حدي التغير مثل :
الطول – الوزن – العمر.

وطريقة جدولة هذا النوع من البيانات الكمية هي أن نقسم البيانات إلى فئات أو فترات ونضع في كل فئة المفردات التي تنتمي إليها ثم نضعها في جدول تكراري.

ولتنفيذ ذلك نختار طول الفئة بحيث يكون مناسباً ثم نحدد عدد الفئات من خلال القاعدة التالية:

$$\text{عدد الفئات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفئة}}$$

ملاحظة : يجب أن يكون العدد صحيح وإذا لم يكن كذلك نقربه إلى العدد الصحيح التالي بغض النظر عن قيمة الكسر العشري.

حيث المدى = أكبر القيم – أصغر القيم

المدى : هو الفرق بين أكبر وأصفر قيمة.

٢- كميات منفصلة:

هي التي لا تأخذ قيماً رقمية كسرية مثل:
عدد أفراد الأسرة.

مثال (٢) :

البيانات التالية توضح تقدير 40 طالبا في امتحان الإحصاء

جيد	راسب	مقبول	راسب	مقبول	ممتاز	مقبول	راسب
جيد جداً	مقبول	جيد	مقبول	جيد جداً	مقبول	راسب	جيد
راسب	ممتاز	مقبول	راسب	مقبول	راسب	جيد	ممتاز
مقبول	جيد	جيد جداً	مقبول	جيد	راسب	جيد جداً	جيد
جيد	راسب	مقبول	مقبول	مقبول	مقبول	جيد	راسب

والمطلوب وضع البيانات في جدول تكراري وتوصيفها بيانياً .

الحل:

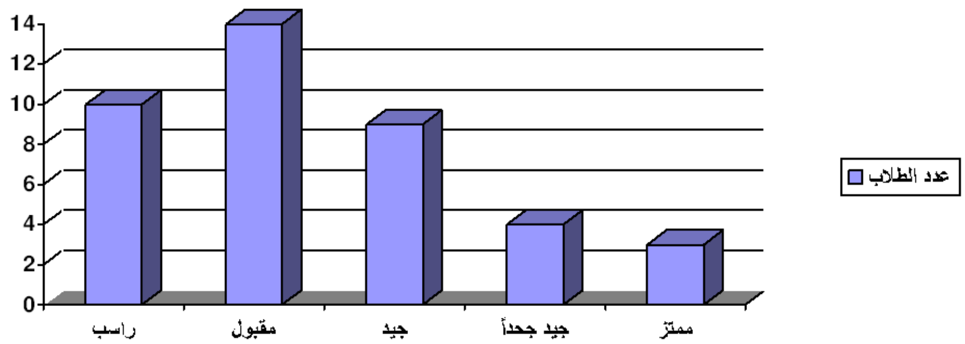
حيث إن البيانات وصفية (نوعية) فيمكن تبويبها حسب التقديرات.

التقدير	العلامات	عدد الطلاب
راسب	IIIII IIIII	10
مقبول	IIIII IIIII IIII	14
جيد	IIIII IIII	9
جيد جداً	IIII	4
ممتاز	III	3

ويكون الجدول التكراري لتقديرات الطلاب هو:

التقدير	عدد الطلاب
راسب	10
مقبول	14
جيد	9
جيد جداً	4
ممتاز	3

ولتمثيل هذه البيانات بيانيا نستخدم الأعمدة البسيطة:



مثال (٣):

الجدول الآتي يوضح أجر 100 عامل في إحدى المصانع بالريالات :

96	78	116	62	110	70	93	80	100	81
128	97	96	93	95	95	94	70	94	83
101	98	118	72	97	82	107	66	84	98
119	73	93	117	125	92	98	99	110	83
71	94	113	108	77	106	65	84	85	99
114	99	74	102	92	111	120	72	90	80
109	122	112	91	67	81	101	85	92	91
75	89	105	72	95	77	88	86	90	86
104	76	69	88	103	103	91	87	102	29
97	105	89	82	79	96	109	87	90	75

والمطلوب تلخيص أجور العمال في جدول تكراري ؟

الحل:

المدى = أكبر القيم - أصغر القيم

المدى = 129 - 62 = 67 ريال

نختار طول الفئة = 10 (يمكن اختيار أي رقم يكون مناسباً)

$$\text{عدد الفئات} = \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفئة}}$$

$$\text{عدد الفئات} = \frac{67}{10} = 6.7$$

ملاحظة: لابد أن يكون عدد الفئات رقما صحيحا ولذلك نحتاج إلى أن نقرب النتيجة إلى العدد الصحيح التالي، وفي مثالنا هذا يصبح عدد الفئات بعد التقريب 7 فئات.

نبدأ الفئة الأولى بالرقم 60 ونستمر حتى آخر فئة والتي تبدأ بـ 120 وتنتهي بـ 130

ويسمى هذا بالجدول التكراري البسيط

فئة الأجور	العلامات	عدد العمال
-60	IIIII	5
-70	IIIII IIIII IIIII	15
-80	IIIII IIIII IIIII IIIII	20
-90	IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII	30
-100	IIIII IIIII IIIII	15
-110	IIIII IIIII	10
130 -120	IIIII	5
المجموع	———	100

الجدول التكراري البسيط لأجور العمال:

فئة الأجور	عدد العمال
-60	5
-70	15
-80	20
-90	30
-100	15
-110	10
130 -120	5
المجموع	100

ملاحظة:

١- يسمى هذا الجدول التكراري بسيطاً لأنه يمثل ظاهرة واحدة فقط وهي أجور العمال.

٢- تظهر في الجدول بداية الفئة فقط أما نهايتها فهي بداية الفئة التي تليها، ومعنى ذلك أن الفئة الأولى مثلاً تحتوي على جميع الأجور ابتداءً من 60 ريالاً وحتى ما قبل الـ 70 ريالاً .

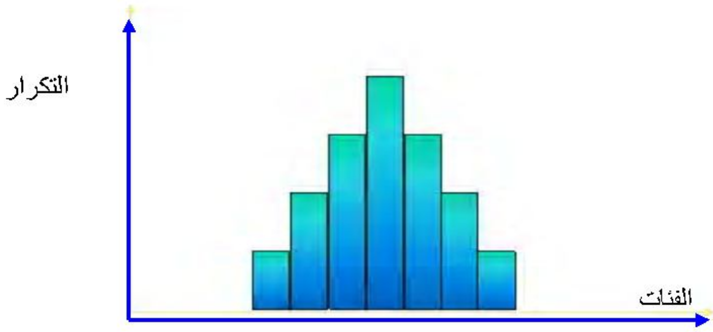
ثانياً: التمثيل البياني للبيانات

يمكن تمثيل البيانات باستخدام الرسومات البيانية الآتية :

١ - المدرج التكراري. ٢ - المضلع التكراري. ٣- المنحنى التكراري.

١ - المدرج التكراري:

نرسم مستطيلات طول قاعدتها هو طول الفئة وارتفاعها هو التكرارات المناظرة لكل فئة.

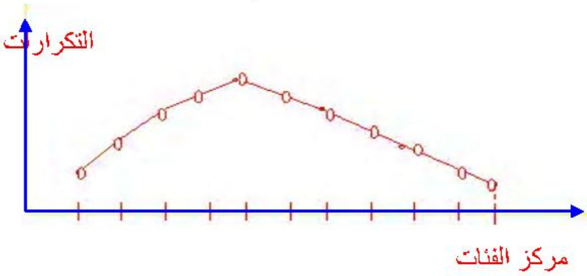


٢ - المضلع التكراري:

١) نحسب مراكز الفئات من القاعدة :

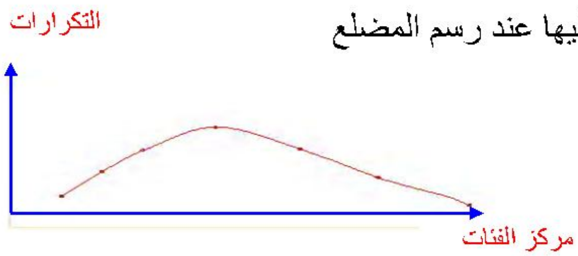
$$\text{مركز الفئة} = \text{بداية الفئة} + \frac{1}{2}\,\text{طول الفئة}$$

٢) نرسم فقط مراكز الفئات في مقابل التكرارات ونصل بينهم بالمسطرة



٣- المنحنى التكراري:

نصل بين النقط التي حصلنا عليها عند رسم المضلع التكراري بمنحنى باليد.



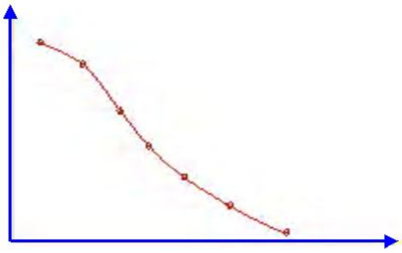
ثالثاً: الجداول التكرارية المتجمعة

الجداول التكرارية المتجمعة نوعان :

١) الجدول المتجمع الصاعد : حيث نجمع التكرارات المناظرة لكل فئة من بداية حتى نصل إلى المجموع الكلي للبيانات، ويكون عنوان العامود الأول في الجدول هو: " أقل من الحد الأعلى للفئة"

٢)) الجدول المتجمع النازل (الهابط) : حيث نبدأ بالمجموع الكلي للبيانات ونطرح من التكرارات المناظرة لكل فئة من بداية الجدول حتى نصل إلى الصفر، ويكون عنوان العامود الأول في الجدول هو: " الحد الأدنى للفئة فأكثر" .

ويمكن تمثيل الجدول المتجمع الصاعد و النازل بيانياً بما يُعرف بالمنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل و اللذان يأخذان الشكلين التاليين:



مثال (٤) :

البيانات الآتية تمثل الأجر اليومي بالريال لـ 100 عامل في إحدى المنشآت

50	37	38	44	32	56	44	43	44	18
46	33	45	26	46	40	23	37	21	60
52	43	49	56	59	51	45	38	42	24
53	38	28	47	29	64	63	49	61	54
34	51	57	31	35	28	27	42	43	30
39	50	32	36	41	58	45	44	25	36
45	57	43	48	39	34	57	22	55	39
53	33	37	56	53	40	46	62	43	48
58	38	58	31	47	52	33	44	31	50
52	37	47	38	41	64	49	26	99	42

والمطلوب هو تكوين الجدول التكراري للعمال حسب فئات الأجر ثم:
أ- تمثيل هذه البيانات باستخدام :
١) المدرج التكراري ٢) المضلع التكراري ٣) المنحنى التكراري

ب - رسم المنحنى المتجمع الصاعد ثم حساب:
(١) عدد العمال الذين يقل أجرهم عن 45 ريالاً.
(٢) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه 70 عاملاً.

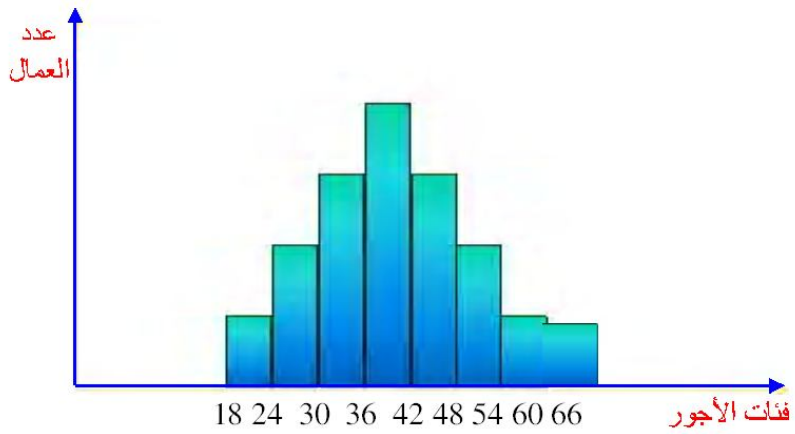
ج- رسم المنحنى المتجمع النازل ثم حساب:
(١) عدد العمال الذين كانت أجورهم 33 فأكثر.
(٢) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه 50 عاملاً.

الحل :
المدى = أكبر القيم - أصغر القيم
المدى = 64 - 18 = 46
وباختيار طول الفئة = 6
يكون عدد الفئات:

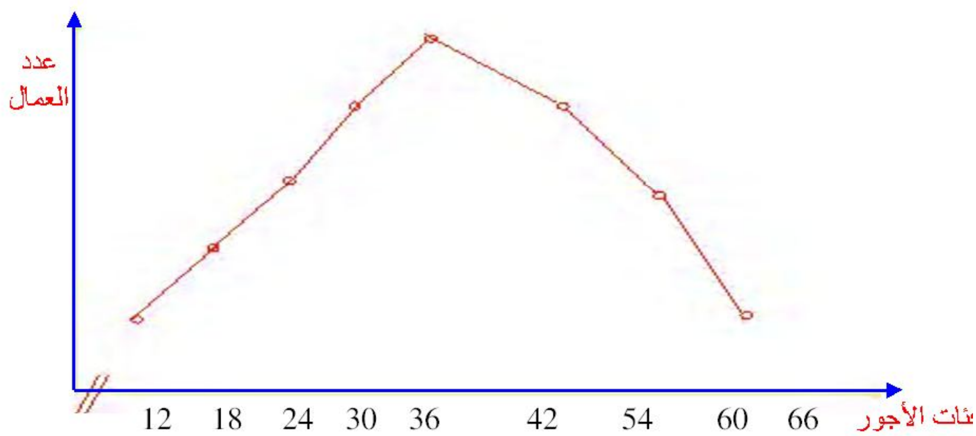
عدد الفئات = $\frac{\text{المدى}}{\text{طول الفئة}} = \frac{46}{6} = 7.66 = 8$ (بعد التقريب)

الفئات	العلامات	التكرار
-18	IIII	4
-24	IIIII III	8
-30	IIIII IIIII II	12
-36	IIIII IIIII IIIII III	18
-37	IIIII IIIII IIIII IIIII IIII	24
-38	IIIII IIIII IIIII I	16
-54	IIIII IIIII II	12
66 – 60	IIIII I	6
المجموع	________	100

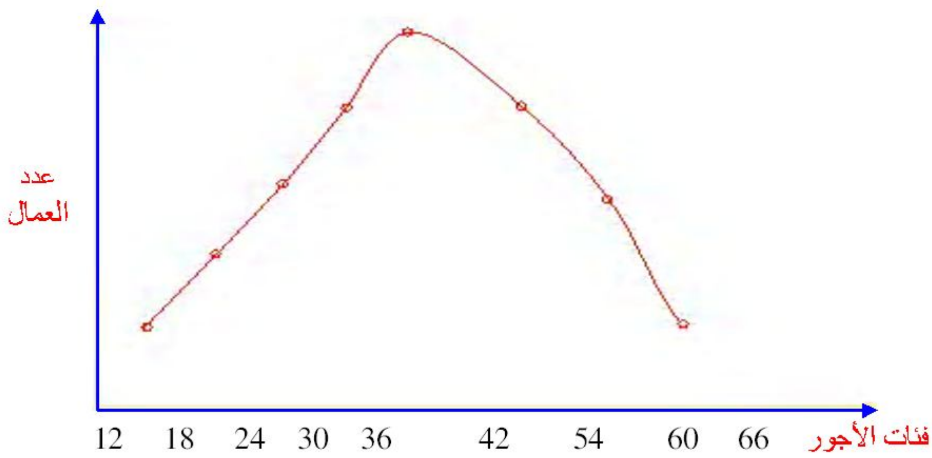
أ – ١ : رسم المدرج التكراري لفئات الأجور:



أ – ٢: رسم المضلع التكراري لفئات الأجور:

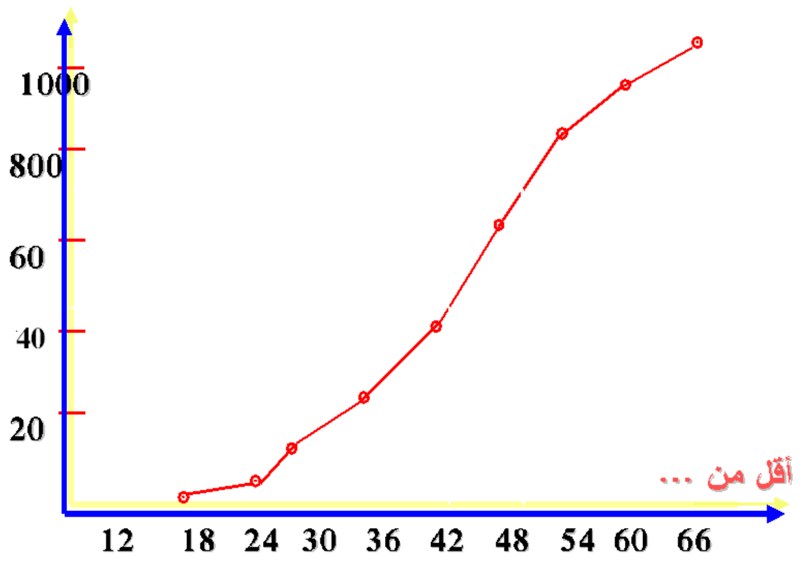


أ- ٣ : رسم المنحنى التكراري لفئات الأجور:



الجدول التكراري البسيط لأجور العمال		الجدول المتجمع الصاعد لأجور العمال	
فئات الأجور	عدد العمال (التكرار)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
18-	4	أقل من 24	4
24-	8	أقل من 30	12
30-	12	أقل من 36	24
36-	18	أقل من 42	42
37-	24	أقل من 48	66
38-	16	أقل من 54	82
54-	12	أقل من 60	94
60 – 66	6	أقل من 66	ــــــــــ
المجموع	100	ــــــــــ	100

ب- ١ : المنحنى المتجمع الصاعد لأجور العمال:



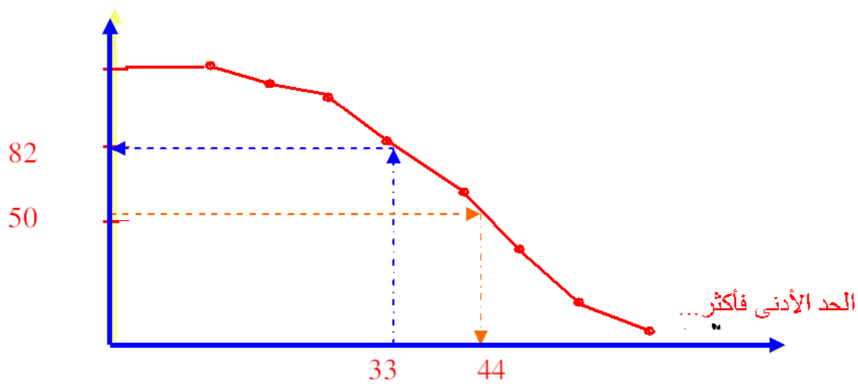
١) عدد العمال الذين يقل أجرهم عن 45 ريالاً = 48 عاملاً

٢) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه 70 عاملاً = 51 ريالاً

الجدول التكراري البسيط لأجور العمال

الجدول المتجمع النازل لأجور العمال

فئات الأجور	عدد العمال (التكرار)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-18	4	18 فأكثر	100
-24	8	24 فأكثر	96
-30	12	30 فأكثر	88
-36	18	36 فأكثر	76
-37	24	42 فأكثر	58
-38	16	48 فأكثر	34
-54	12	54 فأكثر	18
66 – 60	6	60 فأكثر	6
المجموع	100	___________	___________



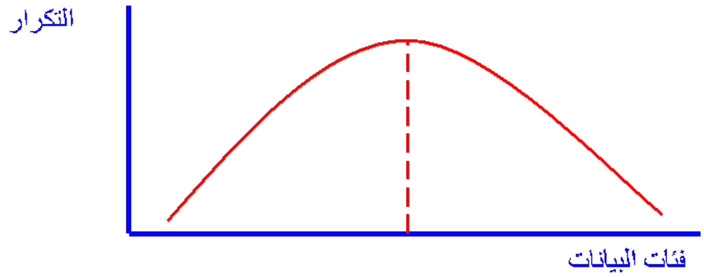
(١) عدد العمال الذين حصلوا على 33 ريالاً فأكثر = 82 عاملاً

(٢) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه 50 عاملاً = 44 ريالاً

رابعاً: بعض أشكال المنحنيات التكرارية

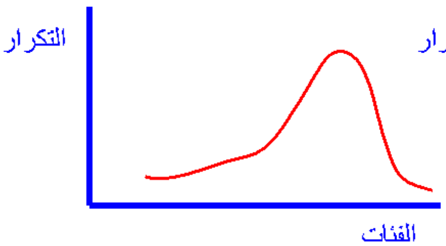
(١) المنحنى المتماثل:

وهو يمثل كثيراً من الظواهر الطبيعية مثل الأوزان والأطوال .. ويسمى متماثلا لأن الخط النازل من قمته إلى قاعدته يقسمه إلى قسمين متماثلين.

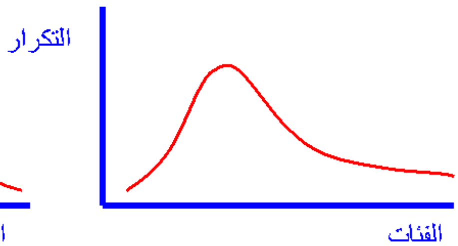


(٢) المنحنى الغير متماثل:

وله قمة واحدة ولكن فرعية غير متماثلين .
فإذا كان الفرع الأطول جهة اليمين سمي ملتوياً لليمين .
وإذا كان الفرع الأطول جهة اليسار سمي ملتوياً لليسار .
ويمثل مرتبات أو دخول الأفراد في بعض الدول .



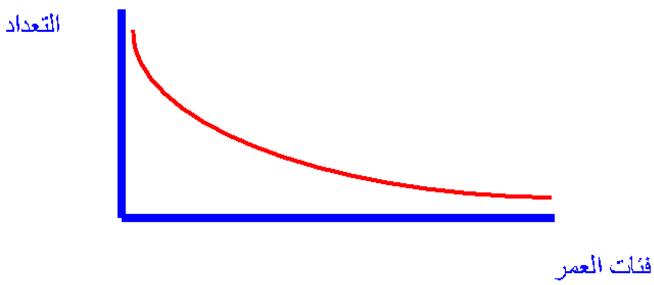
منحنى ملتوي لليمين



منحنى ملتوي لليمين

(٣) المنحنى ذو الفرع الواحد:

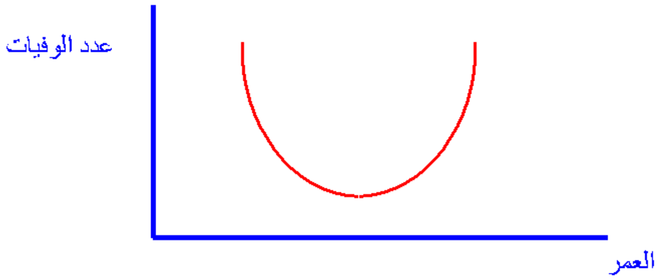
ويتكون من فرع واحد ومن استخداماته تمثيله لتوزيع السكان حسب فئات العمر.



(٤) المنحنى التكراري ذو النهاية الصغرى:

ويسمى "بالمنحنى النوني" ، ويمثل ظاهرة تكون فيها القيم الصغيرة والكبيرة أكثر شيوعاً .

ويستخدم في دراسة الوفيات حسب العمر .



الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

مقاييس النزعة المركزية:
يقصد بمقاييس النزعة المركزية ميل البيانات للتراكم حول قيمة ما تسمى بالمتوسط – وهناك عدد من المقاييس لقياس هذا الميل منها :

١) الوسط الحسابي. **٢) الوسيط.** **٣) المنوال.**

١) الوسط الحسابي:

يُعدُّ الوسط الحسابي أهم مقاييس النزعة المركزية ويُعرَّف بأنه القيمة التي إذا أعطيت لجميع مفردات الظاهرة كان مجموع قيم المفردات مساوياً لمجموع القيم الأصلية لها.

أ- البيانات الغير مبوبة:

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

مثال (١) :
أوجد الوسط الحسابي للبيانات :
15 ، 10 ، 10 ، 15 ، 30

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{80}{5} = 16$$

الوسط الحسابي = 16

ب- البيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

حيث أن $\overline{X}$ ترمز إلى الوسط الحسابي

و $\sum$ ترمز عن مجموع قيم الظاهرة ، أي التي تأتي بعد $\sum$ مثل (X)

و X ترمز إلى قيمة المفردة ، أو الفئات

و f ترمز إلى التكرار.

وفي حالة كون البيانات متصلة (أي مصنفة على شكل فئات) فإننا نعتبر مركز الفئة هو X، حيث:

$$\text{مركز الفئات } X = \frac{\text{بداية الفئة + نهاية الفئة}}{2}$$

مثال(٢) :

من مثال أجور 100 عامل السابق احسب المتوسط الحسابي لهذه الأجور؟

فئات الأجور	تكرار العمال f	مركز الفئة X	X × f
60 -	5	$\frac{70+60}{2} = 65$	325
70 -	15	75	1125
80 -	20	85	1700
90 -	30	95	2850
100 -	15	105	1575
110 -	10	115	1150
120 -	5	125	625
المجموع	100	--------	9350

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{9350}{100} = 93.5$$

المتوسط الحسابي = 93.5 ريالاً.

ميزات الوسط الحسابي:
يمتاز الوسط الحسابي باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:
١- سهولة حسابه.
٢- مشاركة جميع قيم مفردات الظاهرة في حسابه.

عيوب الوسط الحسابي:
ومما يعيب الوسط الحسابي مقارنة مع غيره من مقاييس النزعة المركزية:
١- تأثره بالقيم الشاذة.
٢- عدم إمكانية حسابه في حالة البيانات الوصفية.

٢) الوسيط:

هو القيمة التي تتوسط قيم البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً، بحيث يكون عدد المفردات لتي قبلها مساوياً لعدد المفردات التي بعدها.

أ. البيانات الغير المبوبة:

لحساب قسمة الوسيط نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً:

- فإذا كان عدد المفردات (n) فردياً فيكون :

الوسيط = بعد ترتيب المفردات أو القيم هو القيمة التي تقع في النصف.

- وإذا كان عدد المفردات (n) زوجياً فيكون :

$$\text{الوسيط } M = \frac{\text{مجموع المفردتان الوسطيان}}{2}$$

مثال (٣) :
أوجد وسيط القيم:

(أ)	50	60	80	70	40	100	90

(ب)	40	50	60	70	100	80

الحل:

٣ مفردات ٣ مفردات

(أ) نرتب البيانات تصاعدياً: 40، 50، 60، 70، 80، 90، 100

القيمة الوسطى M

الوسيط M = 70

القيمتان الوسيطان

مفردتان مفردتان

(ب) نرتب البيانات تصاعدياً : 40 ، 50 ، 70 ، 80 ، 90 ، 100

$$M = \frac{70 + 80}{2} = 75$$

ب. البيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة على النحو التالي:

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

حيث M هو الوسيط.

و L هي الفئة المقابلة لأعلى تكرار.

و n مجموع التكرارات.

و $f\,m$ القيمة السابقة للتكرار المتجمع الصاعد لترتيب الوسيط.

و $f\,L$ تكرار فئة الوسيط.

و h طول الفئة.

ترتيب الوسيط = $\frac{n}{2}$

مثال (٤) :

فئات الأجور	3-	5-	7-	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

أوجد الوسيط:

الحل:

الفئة	التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد f m
3-	10	5 فأقل	10
5-	20	7 فأقل	30
7-	40	9 فأقل	70
9-	20	11 فأقل	90
11-	10	13 فأقل	100
∑	100	-------	

50

ترتيب الوسيط

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

أولاً نعين ترتيب الوسيط:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

$$M = 7 + \frac{50 - 30}{40} \times 2 = 8$$

الوسيط M = 8

ميزات الوسيط:

يمتاز الوسيط باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:

١- عدم تأثره بالقيم الشاذة.

٢- ربما أمكن استخدامه في البيانات الوصفية.

عيوب الوسيط:

١. لا يسهم في تحديده سوى مفردة أو مفردتين من البيانات.

٣) ـ المنوال:

هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) في البيانات.
أيضاً هو (الرقم الشائع) أو (الأكثر تكراراً) أو (الأكثر شيوعاً).

أ. البيانات الغير المبوبة:

مثال (٥) :
أوجد المنوال للبيانات :

6 ، 5 ، 8 ، 5 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4

المنوال = 5

ب. البيانات المبوبة:
يحسب المنوال بالعلاقة التالية:

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

حيث D ترمز للمنوال.
و L هي الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار.
و d1 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار السابق له.
و d2 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار اللاحق له.
و h طول الفئة أي مقدار الزيادة من فئة إلى أخرى.

مثال (٦) :

فئات الأجور	3-	5-	7	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

أوجد المنوال:

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

$$D = 7 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

المنوال D = 8

ميزات المنوال:
يمتاز المنوال باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:
١- عدم تأثره بالقيم الشاذة.
٢- صلاحية استخدامه في البيانات الوصفية.

عيوب المنوال:
١- غير دقيق ويمكن وجود أكثر من منوال لنفس المجموعة من البيانات.

مثال عام (١) :
الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرصدة الحسابات في أحد البنوك بآلاف الريالات.

الرصيد	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -
عدد الحسابات	10	15	20	10	5

١- أحسب الوسط الحسابي. ٢- أحسب الوسيط.
٣- المنوال (رقم الرصيد الشائع).

الحل:

فئات الرصيد	تكرار الحسابات f	مركز الفئة X	X × f
4 -	10	$\frac{4+8}{2} = 6$	60
8 -	15	10	150
12 -	20	14	280
16 -	10	18	180
20 -	5	22	110
المجموع	60	--------	780

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{780}{60} = 13$$

١) المتوسط الحسابي = 13 ريالاً.

الفئة	التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد f m
4 -	10	فأقل 8	10
8 -	15	فأقل 12	25
12 -	20	فأقل 16	45
16 -	10	فأقل 20	55
20 -	5	فأقل 24	60
$\sum$	60	--------	

30

أولاً نعين ترتيب الوسيط:

ترتيب الوسيط $= \frac{60}{2} = 30$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

$$M = 12 + \frac{30 - 25}{20} \times 4 = 13$$

٢) الوسيط M = 13

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

$$D = 12 + \frac{5}{5 + 10} \times 4 = 13.33$$

٣) المنوال D = 13.33

الباب الرابع

مقاييس التشتت

تعريف التشتت :

يمثل التشتت مدى انحراف (تقارب أو تباعد) البيانات بعضها عن بعض .

وهناك مقاييس عدة للتشتت منها :

١- المدى.
٢- الانحراف المعياري.

(١) المدى:

المدى = أكبر قيمة في البيانات ــــ أصغر قيمة فيها

(٢) الانحراف المعياري:

هو أهم مقاييس التشتت على الإطلاق، ويقيس مدى تشتت البيانات عن متوسطها.

تعريفه:

حيث إن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لما يسمى بالتباين ، يحسن بنا أن نعرف التباين أولاً ثم نُعرِّج على تعريف الانحراف المعياري.

التباين هو: الوسط الحسابي لمجموع مربع.

انحراف المفردات عن متوسطها، ويعطى بالعلاقة:

أ- في حالة البيانات الغير مبوبة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

ب- في حالة البيانات المبوبة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

مثال عام (٢) :

لديك البيانات التالية:

15 – 20 – 10 – 15 – 30

- أحسب الوسط الحسابي ؟
- الانحراف المعياري ؟
- المنوال الرقم الشائع ؟
- الوسيط ؟
- المجال (المدى) ؟

الحل:

أولاً: نرتب البيانات:

10 – 15 – 15 – 20 – 30

١- الوسط الحسابي =

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{90}{5} = 18$$

٢- الانحراف المعياري =

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

نربع البيانات : $X^2 = 100 – 225 – 225 – 400 – 900$

$\sum x^2 = 1850$

$n = 5$

$$S = \sqrt{\frac{1850}{5} - (18)^2} = 6.78$$

٣- المنوال (الرقم الشائع) = 15

٤- الوسيط = 15

٥- المجال أو المدى = أكبر قيمة ـ أصغر قيمة
= 30 ـ 10 = 20

مثال عام (٣) :

فئة	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -
تكرار	10	20	40	20	10

- أوجد الوسط الحسابي ، والانحراف المعياري ، والمنوال (الرقم الشائع).
- والوسيط .

الحل:

فئة	تكرار f	X	x f	X^2 f
10 -	10	15	150	2250
20 -	20	25	500	12500
30 -	40	35	1400	49000
40 -	20	45	900	40500
50 -	10	55	550	30250
المجموع	100	----------	3500	134500

١- الوسط الحسابي =

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{3500}{100} = 35$$

٢- الانحراف المعياري =

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{134500}{100} - (35)^2} = 10.95$$

٣- المنوال أو الرقم الشائع =

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

$$D = 30 + \frac{20}{20 + 20} \times 10 = 35$$

٤- الوسيط =

الفئة	التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد f m
10 -	10	20 فأقل	10
20 -	20	30 فأقل	30
30 -	40	40 فأقل	70
40 -	20	50 فأقل	90
50 -	10	60 فأقل	100
المجموع	100	--------	----------

50

أولا نعين ترتيب الوسيط:

ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

$$M = 30 + \frac{50 - 30}{40} \times 10 = 72.5$$

الوسيط $M = 72.5$

معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي):

يستخدم معامل الاختلاف في المقارنة بين تشتت مجموعتين أو أكثر من البيانات، حيث لا يمكننا استخدام أحد مقاييس التشتت لعمل هذه المقارنة مباشرة في جميع الأحول وذلك لسببين:

١- اختلاف وحدات القياس المستخدمة في المجموعتين كما لو كنا نقارن بين تشتت درجات مجموعة من الطلاب وتشتت أوزانهم أو أطوالهم.
٢- وجود فرق كبير بين المتوسطين الحسابيين للمجموعتين المراد المقارنة بين تشتتيهما.

$$C\,.\,V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

معامل الالتواء: (أحد مقاييس عدم التماثل)

الالتواء هو بعد المنحنى التكراري للظاهرة عن التماثل ويقاس بمعامل يسمى بـ:- معامل الالتواء، فإما أن يكون المنحنى التكراري :

١. متماثلاً وعندها تكون قيمة معامل الالتواء صفراً،

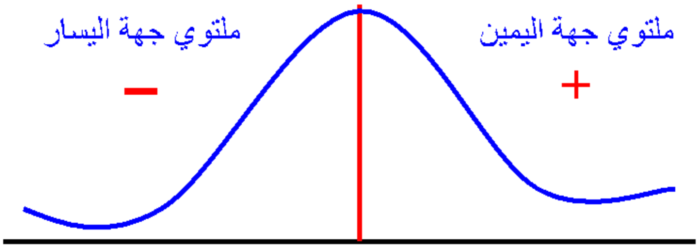
عندما يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ = المنوال D

٢. أو ملتويا إلى جهة اليمين وتكون قيمة معامل الالتواء موجبة،

عندما يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ < المنوال D

٣. أو ملتويا إلى جهة اليسار وتكون قيمة معامل الالتواء سالبة.

عندما يكون الوسط الحسابي $\bar{x}$ > المنوال D



ويمكن إيجاد معامل الالتواء بأحد القانونين التاليين:

معامل الالتواء الأول :

$$S\,K_1 = \frac{\overline{X} - D}{S}$$

معامل الالتواء الثاني :

$$S\,K_2 = \frac{3\,(\overline{X} - M)}{S}$$

يجب أن تعلم :

- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) يساوي صفراً يكون الوسط الحسابي $\overline{X}$ يساوي المنوال D ، وعندما يكون الناتج موجب أي ملتوي جهة اليمين ، فيجب أن يكون $\overline{X}$ (الوسط الحسابي) أكبر من D (المنوال) ، وأيضاً يكون $\overline{X}$ (الوسط الحسابي) أكبر من M (الوسيط).
- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) سالب أي ملتوي جهة اليسار ، يجب أن يكون $\overline{X}$ (الوسط الحسابي) أقل من D (المنوال) ، وأيضاً يكون $\overline{X}$ أقل من M (الوسيط).
- **كما أن معامل الالتواء يعتبر أحد مقاييس عدم التماثل.**

مثال عام (٤) :

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من الشركات بملايين الريالات:

الفئات	3 -	5 -	7 -	9 -	11 -
عدد الشركات	10	20	40	20	10

- احسب معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي).
- أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء).

الحل:

فئة	تكرار F	X	x f	$x^2 f$
3 -	10	4	40	160
5 -	20	6	120	720
7 -	40	8	320	2560
9 -	20	10	200	2000
11 -	10	12	120	1440
المجموع	100	----------	800	6880

أولاً : نوجد الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{800}{100} = 8$$

ثم نوجد الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\,\overline{x}\,)^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{6880}{100} - (\,8\,)^2} = 2.19$$

- نوجد معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي) :

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

$$C.V = \frac{2.19}{8} \times 100 = 27.37\ \%$$

- دراسة تماثل التوزيع (أي معامل الالتواء) :

أولاً : نوجد المنوال :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

$$D = 7 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

معامل الالتواء =

$$S K_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

$$S K_1 = \frac{8 - 8}{2.19} = 0$$

- ❖ بما أن الالتواء يساوي صفر
- ❖ إذاً التوزيع متماثل

مراجعة (١ - ١) :

البيانـات التاليـة توضـح درجـات عينـة مـن 10 طـلاب فـي الاختبـار الـدوري لمـادة الإحصاء:

10 - 8 - 6 - 6 - 7 - 5 - 6 - 9 - 6 - 7

المطلوب :

١ - الوسط الحسابي. ٢- الانحراف المعياري. ٣- المنوال.
٤ - الوسيط. ٥- معامل الاختلاف. ٦- معامل الالتواء الأول.
٧- معامل الالتواء الثاني.

الحل:

أولاً : نرتب البيانات ونعطيها الرمز X

X = 5 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 8 - 9 - 10
n = 10

١) الوسط الحسابي :

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{70}{10} = 7$$

---

٢) الانحراف المعياري:

X^2 = 25 - 36 - 36 - 36 - 36 - 49 - 49 - 64 - 81 - 100

$$\sum x^2 = 512$$

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} \qquad S = \sqrt{\frac{512}{10} - (7)^2} = 1.48$$

٣- المنوال (الرقم الأكثر تكرار أو شيوعاً) D = 6

٤- الوسيط M =

❖ البيانات زوجية

5 - 6 - 6 - 6 - $\boxed{6 - 7}$ - 7 - 8 - 9 - 10

$$M = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

٥- معامل الاختلاف:

$$C \, . \, V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 \ \%$$

$$C \, . \, V = \frac{1.48}{7} \times 100 = 21.14 \ \%$$

٦- معامل الالتواء الأول (باستخدام المنوال) :

$$S \, K_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

$$S \, K_1 = \frac{7 - 6}{1.48} = 0.67$$

❖ ملتوي جهة اليمين.

٧- معامل الالتواء الثاني (باستخدام الوسيط) :

$$S \, K_2 = \frac{3 \, (\bar{X} - M)}{S}$$

$$S \, K_2 = \frac{3 \, (7 - 6.5)}{1.48} = 1.01$$

❖ ملتوي جهة اليمين.

مراجعة (١ – ٢):

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أجور الموظفين بآلاف الريالات.

الأجور	4 -	8 -	12 -	16 -	20 -	المجموع
عدد الموظفين	10	15	20	10	5	60

١) احسب معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي) ؟

٢) إذا علمت أن المصروفات لنفس الموظفين تتبع توزيع تكراري متماثل ، منوال يساوي 5 ، وانحراف معياري يساوي 2 ، فأدرس أي الظاهرتين أكثر تشتت ، الأجور أم المصروفات ؟

٣) أدرس تماثل التوزيع أو (أوجد معامل الالتواء) ؟

الحل :

فئة	تكرار f	مركز الفئة X	X f	X^2 f
4 -	10	6	60	360
8 -	15	10	150	1500
12 -	20	14	280	3920
16 -	10	18	180	3240
20 -	5	22	110	2420
المجموع	60	--------	780	11440

أولاً نوجد الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{780}{60} = 13$$

ثم الانحراف المعياري :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\overline{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{11440}{60} - (13)^2} = 4.65$$

١- ثم نوجد معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي):

$$C . V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 \ \%$$

$$C . V = \frac{4.65}{13} \times 100 = 35.77 \ \%$$

٢- لمقارنة تشتت ، نقارن معامل الاختلاف للأجور ، ومعامل الاختلاف للمصروفات ، ويكون صاحب الناتج أو الرقم الأكبر ، هو الأكثر تشتت:

الأجور	المصروفات
$\bar{X} = 13$	$\bar{X} = 13$
$S = 4.65$	$S = 4.65$
$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 \ \%$	$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100 \ \%$
$C.V = \frac{4.65}{13} \times 100 = 35.77 \ \%$	$C.V = \frac{2}{5} \times 100 = 40 \ \%$

❖ بما أن معامل اختلاف المصروفات أكبر من معامل اختلاف الأجور.

❖ إذاً المصروفات أكثر تشتت.

٣- معامل الالتواء (دراسة التماثل) :

أولاً : نوجد المنوال :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times \ h$$

$$D = 12 + \frac{5}{5 + 10} \times \ 4 \ = \ 13.33$$

ثم نوجد معامل الالتواء (باستخدام المنوال) :

$$S\,K_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

$$S\,K_1 = \frac{13 - 14.4}{4.65} = 9.9$$

❖ ملتوي جهة اليمين.

مراجعة (١ – ٣) :

في عينة من 60 أسرة ، متوسط استهلاكها من المياه ، يتبع توزيع تكراري ، حيث:

$\sum Xf = 900$

$\sum X^2 f = 13840$

- احسب الوسط الحسابي ؟ الانحراف المعياري ؟
- معامل الاختلاف (مقياس التشتت النسبي) ؟

الحل:

أولاً نوجد الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{900}{60} = 15$$

ثم الانحراف المعياري :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{13840}{60} - (15)^2} = 2.25$$

ثم نوجد معامل الاختلاف:

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

$$C.V = \frac{2.25}{15} \times 100 = 15\ \%$$

مراجعة (١ – ٤) :

إذا علمت أن دخل الأسر يتبع توزيع تكراري حيث الوسط الحسابي يساوي 12 وانحراف معياري يساوي 3 ، وكذلك الإنفاق لنفس الأسر يتبع توزيع تكراري حيث الوسط الحسابي يساوي 8 ، وانحراف معياري يساوي 2 ، فأدرس أي الطرفين أكثر تشتتاً ؟

الحل:

الدخل

$\bar{X} = 12$

$S = 3$

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

$$C.V = \frac{12}{3} \times 100 = 25\ \%$$

الإنفاق

$\bar{X} = 8$

$S = 2$

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

$$C.V = \frac{8}{2} \times 100 = 25\ \%$$

❖ تشتت الدخل مساوي لتشتت الإنفاق.

مراجعة (١ – ٥) :

فئات الأجور	3-	5-	7	9-	11-
عدد العمال	10	20	40	20	10

أوجد :

١) الوسط الحسابي ؟ ٢) الانحراف المعياري ؟ ٣) المنوال ؟
٤) الوسيط ؟ ٥) أدرس تماثل التوزيع ، باستخدام المنوال ؟
٦) أدرس تماثل التوزيع (أوجد معامل الالتواء) ، باستخدام الوسيط ؟
٧) أوجد معامل الاختلاف ؟

الحل :

فئة	تكرار f	X	x f	x^2 f
3 -	10	4	40	160
5 -	20	6	120	720
7 -	40	8	320	2560
9 -	20	10	200	2000
11 -	10	12	120	1440
المجموع	100	----------	800	6880

١) الوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

$$\overline{X} = \frac{800}{100} = 8$$

---

٢) الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

٣) المنوال :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

$$D = 7 + \frac{20}{20 + 20} \times 2 = 8$$

---

٤) الوسيط :

الفئة	التكرار f	الحد الأعلى للفئة فأقل	تكرار متجمع صاعد f m
3 -	10	5 فأقل	10
5 -	20	7 فأقل	30
7 -	40	9 فأقل	70
9 -	20	11 فأقل	90
11 -	10	13 فأقل	100
المجموع	100	--------	------------

$\boxed{50}$

أولا نعين ترتيب الوسيط:

ترتيب الوسيط $= \frac{100}{2} = 50$

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

$$M = 7 + \frac{50 - 30}{40} \times 2 = 8$$

٥) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء الأول) باستخدام المنوال :

$$S\,K_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

$$S\,K_1 = \frac{8 - 8}{2.19} = 0$$

❖ التوزيع متماثل.

---

٦) دراسة تماثل التوزيع (معامل الالتواء الثاني) باستخدام الوسيط :

$$S\,K_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

$$S\,K_2 = \frac{3(8 - 8)}{2.19} = 0$$

❖ التوزيع متماثل.

---

٧) معامل الاختلاف :

$$C\,.\,V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

$$C\,.\,V = \frac{2.19}{8} \times 100 = 27.37\ \%$$

يجب أن تعلم :

- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) يساوي صفراً يكون الوسط الحسابي $\bar{X}$ يساوي المنوال D ، وعندما يكون الناتج موجب أي ملتوي جهة اليمين ، فيجب أن يكون $\bar{X}$ (الوسط الحسابي) أكبر من D (المنوال) ، وأيضاً يكون $\bar{X}$ (الوسط الحسابي) أكبر من M (الوسيط).
- إذا كان ناتج SK (معامل الالتواء) سالب أي ملتوي جهة اليسار ، يجب أن يكون $\bar{X}$ (الوسط الحسابي) أقل من D (المنوال) ، وأيضاً يكون $\bar{X}$ أقل من M (الوسيط).
- **كما أن معامل الالتواء يعتبر أحد مقاييس عدم التماثل.**

مراجعة نظري (١) :

١) أحد مقاييس النزعة المركزية ؟

لا شيء	D	الوسيط	**C**	معامل الاختلاف	B	الانحراف المعياري	A

٢) مركز الفئة هو ؟

لا شيء	D	منتصف الفئة	**C**	طول الفئة	B	عرض الفئة	A

٣(القيمة الأكثر تكرار (شيوعا) ؟

الانحراف المعياري	D	الوسط الحسابي	C	الوسيط	B	المنوال	**A**

٤) معامل الاختلاف هو ؟

مقياس التشتت النسبي	**D**	مقياس التماثل	C	مقياس التشتت	B	مقياس الالتواء	A

٥) معامل الاختلاف هو ؟

مقياس التماثل	D	مقياس التشتت	**C**	لا شيء	B	مقياس الالتواء	A

٦) أحد المقابيس التالية هي مقياس التشتت ؟

الانحراف المعياري	**D**	مقياس التماثل	C	مقياس الوسيط	B	مقياس الالتواء	A

٧) مجموعة القيم وسطها الحسابي (4) وعدد بياناتها (10) ، هو ؟

لا شيء	D	40	**C**	0.4	B	25	A

٨) الانحراف المعياري هو ؟

لا شيء	D	الجزر التربيعي للتباين	**C**	مربع التباين	B	التباين	A

٩) التباين هو ؟

لا شيء	D	الانحراف المعياري	C	مربع الانحراف المعياري	**B**	جزر الانحراف المعياري	A

١٠) إذا كان التوزيع متماثل ، والمنوال يساوي 7 فإن الوسط الحسابي يساوي ؟

A	7	B	9.9	C	0.7	D	9

١١) إذا كان التوزيع متماثل فإن قيمة الوسط الحسابي ؟

A	أكبر من المنوال	**B**	تساوي المنوال	C	أقل من المنوال	D	أكبر من الوسيط

١٢) إذا كانت قيمة الوسط الحسابي أكبر من المنوال أو الوسيط ، فإن التوزيع يكون

A	ملتوي جهة اليسار	**B**	ملتوي جهة اليمين	C	متماثل	D	لا شيء

١٣) إذا كان قيمة المنوال أقل من الوسط الحسابي فإن التوزيع يكون ؟

A	ملتوي جهة اليسار	**B**	ملتوي جهة اليمين	C	متماثل	D	لا شيء

١٤) القيمة السالبة لمعامل الاختلاف تعني أن التوزيع ؟

A	ملتوي جهة اليمين	**B**	ملتوي جهة اليسار	C	متماثل	D	لا شيء

١٥) المدى للبيانات 40 – 60 – 90 – 50 – 40 يساوي ؟

A	50	B	40	C	90	D	290

١٦) المنوال للبيانات 50 – 60 – 90 – 50 – 40 يساوي ؟

A	50	B	40	C	90	D	290

١٧) أحد المقاييس التالية هو مقياس التشتت ؟

A	مقياس الوسيط	**B**	معامل الالتواء	C	معامل الوسيط	D	لا شيء

١٨) أحد مقاييس التشتت هو ؟

A	مقياس التماثل	B	مقياس الوسط الحسابي	**C**	معامل الاختلاف	D	لا شيء

١٩) أحد مقاييس النزعة المركزية هو ؟

A	الانحراف المعياري	**B**	الوسط الحسابي	C	مقياس التماثل	D	معامل الاختلاف

٢٠) أحد مقاييس النزعة المركزية هو ؟

معامل الاختلاف D	مقياس التماثل C	المدى **B**	الانحراف المعياري A

٢١) القيمة الموجبة لمعامل الاختلاف تعني أن التوزيع ؟

لا شيء D	متماثل C	ملتوي جهة اليسار B	ملتوي جهة اليمين **A**

٢٢) إذا كان الوسط الحسابي أقل من المنوال ، يعني أن التوزيع ؟

لا شيء D	متماثل C	ملتوي جهة اليسار **B**	ملتوي جهة اليمين A

٢٣) إذا كان الوسط الحسابي أقل من الوسيط ، يعني أن التوزيع ؟

لا شيء D	متماثل C	ملتوي جهة اليسار **B**	ملتوي جهة اليمين A

٢٤) معامل الالتواء يعتبر أحد مقاييس ؟

لا شيء D	التشتت C	عدم التماثل **B**	النزعة المركزية A

٢٥) للمقارنة بين تشتت مجموعتين مختلفتين من القيم نستخدم ؟

لا شيء D	معامل الاختلاف **C**	مربع التباين B	التباين A

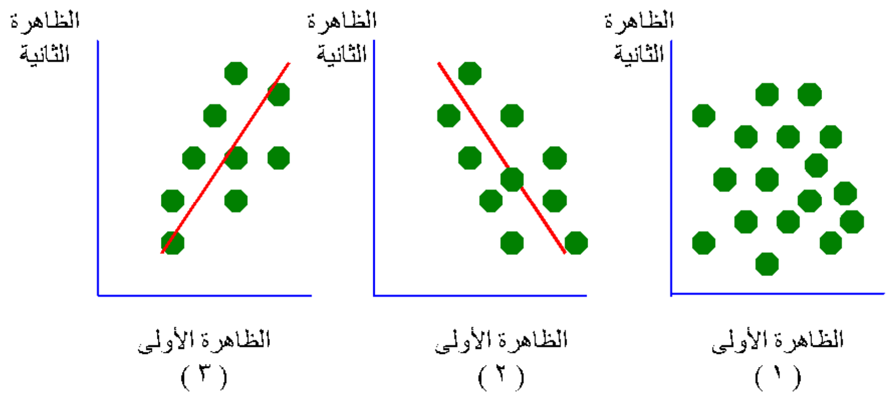
الباب الخامس

الارتباط والانحدار

درسنا فيما سبق من الأبواب كيفية وصف مجموعة من القيم التي تمثل ظاهرة واحدة حيث قمنا بحساب بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف والالتواء .

وسندرس في هذا الباب كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، مثل ظاهرتي الدخل والإنفاق الشهري لمجموعة من الأفراد.

ولنأخذ الأشكال الثلاثة التالية والتي توضح العلاقة بين ظاهرتين:



في الشكل (١) نلاحظ عدم وجود ترابط بين قيم الظاهرتين .
في الشكلين (٢&٣) نلاحظ وجود ترابط ويسمى هذا بالترابط الخطي .

(١) معامل ارتباط بيرسون (الخطي)

وهو مقياس يكشف لنا عن مدى وجود علاقة بين ظاهرتين ما ويمكننا إيجاد قيمته على النحو التالي:

لنفرض أن لدينا الظاهرة **X** والظاهرة **y** بحيث توجد المفردات التالية (n مفردة) لتمثيل كل من الظاهرتين

$$X_1 \text{ ، } X_2 \text{ ، ..... ، } X_n$$

$$y_1 \text{ ، } y_2 \text{ ، ..... ، } y_n$$

فتكون قيمة معامل الارتباط هي:

معامل ارتباط بيرسون
(الخطي)
حالة البيانات المبوبة
والغير مبوبة

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \,.\, Sy}$$

حيث Sx ، Sy = الانحراف المعياري للظاهرتين X ، y

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} \qquad Sy = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

ملاحظة : ويكون **التباين** ، **الناتج** ما قبل الجزر.

ويسمى هذا المقياس بمعامل ارتباط بيرسون

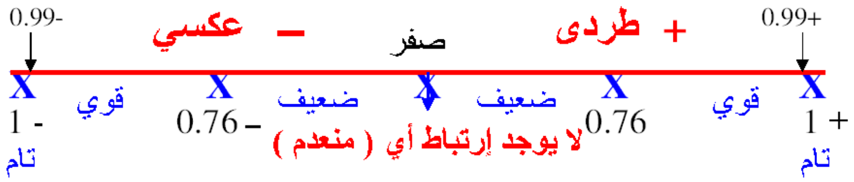
خصائص معامل الارتباط الخطي:

تنحصر قيمة معامل الارتباط (r) دائماً بين 1- و 1+ وتكون العلاقة بين الظاهرتين **طردية** إذا كانت قيمة (r) موجبة بينما تكون العلاقة **عكسية** إذا كانت قيمة (r) سالبة، كما يعني اقتراب القيمة من 1- أو 1+ أن قوية بينما يعني اقتراب قيمة (r) من **الصفر** أن الارتباط (أو العلاقة) **ضعيفة**، وعموماً فإن:

$$-1 \leq r \leq 1$$

r = 1 أو r = -1 ⟸ ارتباط تام

r = صفر ⟸ ارتباط منعدم



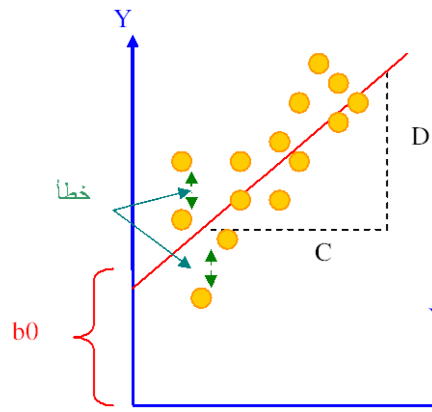
(٢) معادلة خط الانحدار :

تعرضنا فيما سبق لدراسة العلاقة بين ظاهرتين من حيث ترابط مفرداتهما مع بعضهما لبعض ، ونتعرض الآن إلى دراسة شكل هذه العلاقة بين الظاهرتين بافتراض أن أحداهما (X) تمثل متغير **مستقل** بينما تمثل الظاهرة (Y) متغير **تابع**.

يهدف موضوع الانحدار إلى تقدير الخط الذي يمثل العلاقة بين X و Y وذلك عن طريق جعل مجموع مربع الأخطاء (المتمثلة في بعد نقاط الانتشار عن ذلك الخط) أقل ما يمكن، ويحدد خط الانحدار بالميل والذي يرمز له بـ b1 وبالجزء المقطوع من محور Y والذي يرمز له بالرمز b0، وتعطى معادلة هذا الخط بالتالي:

$$Y = b0 + b1\ X$$

وتسمى هذه المعادلة بخط انحدار Y على X



$$b1 = \text{ميل خط الانحدار} = \frac{D}{C}$$

b0 = الجزء المقطوع من محور Y

ويمكننا حساب b1 و b0 بالمعادلتين التاليتين:

$$b1 = \frac{\dfrac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2X}$$

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

حيث :

التباين S^2X
مربع الانحراف المعياري ما قبل الجزر.

الانحراف المعياري Sx
الجزر التربيعي للتباين.

وبالتعويض عن الميل b1 و المقطع b0 ، وقيمة X المعطاة في المعادلة نحصل على قيمة Y

مثال (١) :

في عينة من 10 أسرة كانت (X) تمثل عدد أطفال الأسرة ، و Y تمثل عدد غرف المسكن للأسرة ، وحصلنا على النتائج التالية :

$\sum x = 50$ $\sum y = 80$ $\sum x^2 = 446$

$\sum y^2 = 1040$ $\sum xy = 180$ $n = 10$

١- أحسب قيمة معامل الارتباط الخطي (بيرسون) وعلل على النتيجة ؟
٢- احسب معادلة خط الانحدار ، ثم قدر عدد الغرف عندما يكون عدد أطفال الأسرة يساوي ستة أطفال ؟

الحل:

١) معامل ارتباط بيرسون الخطي :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \;.\; Sy}$$

أولاً نوجد الوسط الحسابي X :

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{50}{10} = 5$$

ثم الانحراف المعياري X :

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$Sx = \sqrt{\frac{446}{10} - (5)^2} = \sqrt{19.6} \qquad Sx = 4.43$$

التباين ، ما قبل الجزر $\longrightarrow$ $S^2x = 19.6$

ثانياً نوجد الوسط الحسابي Y :

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{80}{10} = 8$$

ثم الانحراف المعياري Y :

$$Sy = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

$$Sy = \sqrt{\frac{1040}{10} - (8)^2} = 6.32$$

وهنا لا نحتاج لتباين Sy

ثم نعوض في معادلة "معامل أرتباط بيرسون" :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \cdot Sy}$$

$$r = \frac{\frac{180}{10} - 5 \times 8}{(4.43)(6.32)} = -0.79$$

عكسي قوي.

٢) معادلة خط الانحدار

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

$$b1 = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2x}$$

$$b1 = \frac{\frac{180}{10} - 5 \times 8}{19.6} = -1.12$$

فتكون معادلة خط الانحدار على النحو التالي :

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

$$= 8 + 1.12\,(5) = 13.6$$

ثم نقدر عدد الغرف ، عندما يكون عدد الأطفال 6 :

$$Y = b0 + b1\ X$$

$\hat{Y} = 13.6 - 1.12\ (6) = 6.88 = \underline{\underline{7}}$ غرف

ملاحظة : يجب أن نقرب الناتج إلى اقرب قيمة.

مثال (٢) :

الجدول التالي يبين دخل ثمانية أسر وما تنفقه (بعشرات الريالات) :

الدخل	64	52	84	64	76	56	68	64
الإنفاق	52	40	60	52	60	42	50	52

المطلوب :

١) معامل ارتباط بيرسون ، خط انحدار الإنفاق على الدخل ؟

٢) قدر إنفاق الأسرة التي يبلغ دخلها 700 ريال ؟

الحل:

الدخل X	الإنفاق Y	X Y	X^2	Y^2
64	52	3328	4096	2704
52	40	2080	2704	1600
84	60	5040	7056	3600
64	52	3328	4096	2704
76	60	4560	5776	3600
56	42	2352	3136	1764
68	50	3400	4624	2500
64	52	3328	4096	2704
528	408	27416	35584	21176

) معامل ارتباط بيرسون الخطي :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \ . \ Sy}$$

أولاً نوجد الوسط الحسابي X :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{528}{8} = 66$$

ثم الانحراف المعياري X :

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$Sx = \sqrt{\frac{35584}{8} - (66)^2} = \sqrt{92} \qquad Sx = 9.59$$

$$S^2x = 92 \longleftarrow$$ التباين ، <u>ما قبل الجزر</u>

ثانياً نوجد الوسط الحسابي Y :

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{408}{8} = 51$$

ثم الانحراف المعياري Y :

$$Sy = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

$$Sy = \sqrt{\frac{21176}{8} - (51)^2} = 6.78$$

وهنا لا نحتاج لتباين Sy

ثم نعوض في معادلة "معامل أرتباط بيرسون" :

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \,.\, Sy}$$

$$r = \frac{\frac{27416}{8} - 66 \times 51}{(9.59)(6.78)} = 0.94$$

طردي قوي.

٢) معادلة خط الانحدار

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

$$b1 = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2x}$$

$$b1 = \frac{\frac{27416}{8} - 66 \times 51}{92} = 0.66$$

فتكون معادلة خط الانحدار على النحو التالي :

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

$$= 51 - 0.66\ (66) = 7.44$$

تقدير إنفاق الأسرة التي يبلغ دخلها 700 ريال :

700 = 70 (بعشرات الريالات).

$$Y = b0 + b1\ X$$

$\hat{Y} = 7.44 + 0.66\ (70) = 53.64 = 53.6$ (عشرات الريالات)

❖ إذاً يقدر إنفاق الأسرة 536 ريال.

٣) معامل أرتباط سبيرمان (الرتب)

أحيانا تكون بيانات الظاهرتين أو إحداهما بيانات غير كمية لكنها ذات طبيعة ترتيبية مثل تقديرات الطلاب في مادة من المواد (A, B, C..) أو تكون البيانات كمية لكن لا تتوفر فيها بعض الخصائص المطلوبة، فنلجأ حينئذ لاستبدال قيم البيانات بترتيبها ونستخدم ما يسمى بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان. ويمكن حسابه من خلال الخطوات التالية:

١) نرقم بيانات الظاهرتين في موقعيهما حسب الترتيب التصاعدي ونسمي هذه رتب القيم .

٢) نحسب فروق الرتب ومجموع مربعاتها فيكون معامل ارتباط الرتب:

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

ملاحظة :

- إذا وجد مفردتان أو أكثر لهم نفس القيمة فإن رتبهم ستكون متوسط الرتب التي كانوا سيأخذونها لو لم تكن لهم نفس القيمة.
- لمعامل سبيرمان نفس الخواص السابقة لمعامل بيرسون للارتباط.

مثال (١) :

البيانات التالية توضح تقدير عينة من ثمانية طلاب في مادتي الإحصاء والمحاسبة

B	A	C	C	B	B	F	A	تقدير الإحصاء
60	90	70	80	60	60	90	80	تقدير المحاسبة

- أوجد معامل الأرتباط ، معامل أرتباط سبيرمان (الرتب) ؟

الحل :

X	y	رتبة X	رتبة y	d	d^2
A	80	7.5	5.5	2	4
F	90	1	7.5	-6.5	42.25
B	60	5	2	3	9
B	60	5	2	3	9
C	80	2.5	5.5	-3	9
C	70	2.5	4	1.5	2.25
A	90	7.5	7.5	0	0
B	60	5	2	3	9
n = 8				**0**	**84.5**

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 84.5}{8(64-1)} = 1 - \frac{507}{504}$$

$= 1 - 1.006 = -0.006$

الارتباط عكسي ضعيف

لإيجاد الرتب:

- رتب الأرقام من الأكبر إلى الأصغر x : F ، C ، C ، B ، B ، B ، A ، A
- رتب الأرقام من الأكبر إلى الأصغر y : 60 ، 60 ، 60 ، 70 ، 80 ، 80 ، 90 ، 90
  الرتب d: ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

ثم نضعها في عامود يسمى رتبة x والثانية في عامود يسمى رتبة y .

- في حالة تشابه رقمين أو أكثر:
  نجمع قيم الرتب ونقسمها على عددها ، كما يوضح الجدول أعلاه
  ١ + ٢ + ٣ = ٦ ÷ ٢ = ٢
  ثم نضع ناتج القسمة في كل خانة من خانات الرتب المتساوي أعدادها.

- ولإيجاد d = رتب x – رتب y

الباب السادس

السلاسل الزمنية

١. تعريف السلسلة الزمنية :

هي مجموعة القراءات التي تأخذها ظاهرة ما عند فترات زمنية غالباً تكون متساوية وتختلف هذه الفترات حسب طبيعة الظاهرة .

٢. مكونات السلسلة الزمنية :

تتكون السلسلة الزمنية للظاهرة من العناصر الآتية :

أ. الاتجاه العام :

وهو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية خلال فترة طويلة من الزمن بالرغم من التذبذبات الموجودة بها .

ب. التغيرات الموسمية:

وهي التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترة زمنية أقل من السنة .

ج. التغيرات الدورية :

وهي التغيرات التي تحدث في فترات زمنية أكثر من سنة .

د. التغيرات العرضية :

وهي التغيرات التي تحدث نتيجة حوادث فجائية لا تكون في الحسبان مثل الحروب والأوبئة ... إلخ .

(وسنكتفي في دراستنا بحالة الخط المستقيم " الاتجاه العام ")

٣. معادلة خط الاتجاه العام :

$$Y = b0 + b1\ X$$

حيث :

المقطع = $b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$

الميل = $b1 = \dfrac{\dfrac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2x}$

مثال :

الجدول التالي يبين قيمة الصادرات لأحد الدول بالمليون ريال ، في الفترة من عام 1411 إلى عام 1416 هـ.

السنة	1411	1412	1413	1414	1415	1416
قيمة الصادرات	5	4	7	6	9	10

- احسب معادلة خط الاتجاه العام ، ثم قدر قيمة الصادرات في سنة 1418 هـ ؟
- احسب القيمة النسبية (لاستبعاد أثر الاتجاه العام) عام 1414 هـ ؟

الحل:

السنوات	Y الصادرات	X الرتب	X Y	X^2 تربيع الرتب
1411	5	0	0	0
1412	4	1	4	1
1413	7	2	14	4
1414	6	3	18	9
1415	9	4	36	16
1416	10	5	50	25
$n = 6$	$\sum Y = 41$	$\sum X = 15$	$\sum XY = 122$	$\sum X^2 = 55$

معادلة خط الاتجاه العام :

$$Y = b0 + b1\ X$$

X تمثل السنة المطلوبة ، رتبتها = السنة المطلوبة ـ سنة البداية

= 1418 ـ 1411 = 7 سنوات

الميل b1 :

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{6}$$

$$\bar{X} = 2.5$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{41}{6}$$

$$\bar{Y} = 6.83$$

$$b1 = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2x}$$

$$S^2X = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$S^2X = \frac{55}{6} - (2.5)^2$$

$$S^2X = 2.92$$

وبالتعويض في الميل b1 :

$$b1 = \frac{\frac{122}{6} - 2.5 \times 6.83}{2.92} = 1.12$$

المقطع b0 :

$$b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}$$

$$= 6.83 - 1.12\ (2.5)$$

$$b0 = 4.03$$

- قيمة الصادرات في 1418 هـ :

سنوات x = 7	b1 = 1.12	B0 = 4.03

$$Y = b0 + b1\ X$$

$$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ X$$

$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ (7) = 11.87$ مليون ريال

استبعاد أثر الاتجاه العام للظاهرة :

القيمة النسبية y ، نطبق العلاقة الآتية :

قيمة y الاتجاهية عام ١٤١٤هـ :
(من المعادلة المحسوبة)

$$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ X$$

$$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ (3) = 7.39$$

$$\frac{y}{\hat{Y}} \times 100 = \frac{6}{7.39} \times 100 = 81.19\ \%$$

حيث:

y : القيمة الفعلية للظاهرة عام 1414

$\hat{Y}$: القيمة الاتجاهية للظاهرة عام 1414

الباب السابع

الأرقام القياسية

الأرقام القياسية :
سنكتفي هنا بالرقم القياسي للأسعار ، ويعرف بأنه رقم نسبي يقيس التغير الذي يطرأ على ظاهرة أو أكثر من زمن لآخر وتعرف الفترة التي تنسب إليها فترة الأساس ، والفترة التي ننسبها فترة المقارنة .

ونحصل عليه :
بقسمة أسعار السلع في فترة المقارنة على أسعار السلع في فترة الأساس ونضرب الناتج في 100

الرموز المستخدمة في إيجاد الرقم القياسي :

السعر يرمز له بالرمز	P
الكمية يرمز لها بالرمز	Q
فترة الأساس يرمز لها بالرمز	0
فترة المقارنة يرمز لها	1

وسندرس الأرقام القياسية الأربعة الآتية:

١ ـ الرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$\text{البسيط} = \frac{\sum P1}{\sum P0} \times 100$$

٢ ـ الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير):

$$\text{لاسبير} = \frac{\sum P1 \,.\, Q0}{\sum P0 \,.\, Q0} \times 100$$

٣- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باتش):

$$\text{باتش} = \frac{\sum P1 \cdot Q1}{\sum P0 \cdot Q1} \times 100$$

٤- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر):

$$\text{فيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باتش}}$$

مثال:

الجدول التالي يوضح الكميات لعدد من السلع في سنة 1420 ، 1422

السلعة	P0 السعر	P1	Q0 الكمية	Q1
	1420	1422	1420	1422
السكر	2	4	25	30
الأرز	3	5	20	25

١) احسب الرقم القياسي البسيط ؟
٢) احسب رقم لاسبير ؟
٣) احسب رقم باتش ؟
٤) احسب رقم فيشر (الامثل) ؟

الحل:

١) الرقم القياسي البسيط :

$$\text{البسيط} = \frac{\sum P1}{\sum P0} \times 100$$

$$= \frac{9}{5} \times 100 = 180\ \%$$

٢) الرقم القياسي المرجح بكميات الأساس (لاسبير) :

$$\text{لاسبير} = \frac{\sum P1 . Q0}{\sum P0 . Q0} \times 100$$

P1. Q0	P0 . Q0
4 × 25 = 100	2 × 25 = 50
5 × 20 = 100	3 × 20 = 60
200	110

$$= \frac{200}{110} \times 100$$

$= 181.81\ \%$

٣) الرقم القياسي للاسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باتش) :

$$\text{باتش} = \frac{\sum P1 . Q1}{\sum P0 . Q1} \times 100$$

P1. Q1	P0 . Q1
4 × 30 = 120	2 × 30 = 60
5 × 25 = 125	3 × 25 = 75
245	135

$$= \frac{245}{135} \times 100$$

$= 181.48\ \%$

٤) الرقم القياسي الامثل للاسعار (فيشر) :

$$\text{فيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باتش}}$$

$$\text{فيشر} = \sqrt{181.81 \times 181.48} = 181.64\ \%$$

مراجعة عامة (٢ – ١):

الجدول التالي يبين فيه الصادرات لأحد الدول بالمليون ريال في الفترة من عام 1411 إلى 1416

1416	1415	1414	1413	1412	1411	السنة
10	9	6	7	4	5	قيمة الصادرات

أختار الإجابة الصحيحة :

١) رتبة السنة 1415 هي ؟

A	0	B	3	**C**	4	D	2

٢) قيمة الميل b1 في خط الاتجاه العام ؟

A	1.12	B	3.12	C	1.67	D	2.77

٣) قيمة المقطع ؟

A	5.7	B	6.6	**C**	4.03	D	3.25

٤) تقدير نسبة الصادرات في سنة 1418 ؟

A	12	B	13	**C**	11.87	D	13.5

الحل:

* طريقة حل السؤال السابق:

السنوات	Y الصادرات	X	X Y	X^2
1411	5	0	0	0
1412	4	1	4	1
1413	7	2	14	4
1414	6	3	18	9
1415	9	4	36	16
1416	10	5	50	25
n = 6	$\sum Y = 41$	$\sum X = 15$	$\sum XY = 122$	$\sum X^2 = 55$

معادلة خط الاتجاه العام :

$$Y = b0 + b1\ X$$

X تمثل السنة المطلوبة ، رتبتها = السنة المطلوبة ــ سنة البداية

= 1418 – 1411 = 7 سنوات

الميل b1 :

$$b1 = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2x}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{6}$$

$$\bar{X} = 2.5$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{41}{6}$$

$$\bar{Y} = 6.83$$

$$S^2X = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$S^2X = \frac{55}{6} - (2.5)^2$$

$$S^2X = 2.92$$

وبالتعويض في الميل b1 :

$$\mathbf{b1} = \frac{\frac{122}{6} - 2.5 \times 6.83}{2.92} = \mathbf{1.12}$$

المقطع b0 :

$$\mathbf{b0 = \bar{y} - b1\ \bar{x}}$$

$$= 6.83 - 1.12\ (2.5)$$

$$b0 = 4.03$$

- قيمة الصادرات في 1418 هـ :

$b0 = 4.03$	$b1 = 1.12$	سنوات $x = 7$

$$\mathbf{Y = b0 + b1\ X}$$

$\hat{Y} = 4.03 + 1.12\ (7) = 11.87$ مليون ريال

مراجعة عامة (٢ – ٢) :

	P0	Q0	P1	Q1
السلعة	السعر 1400	الكمية 1400	السعر 1410	الكمية 1410
A	6	50	7	60
B	8	40	10	50
C	7	30	7	40

- ضع علامة على الجواب الصحيح :

١) مجموع أسعار سنة الأساس ؟

A 24	**<u>B</u>** 21	C 120	D 150

٢) مجموع أسعار سنة المقارنة ؟

<u>A</u> 24	B 21	C 120	D 150

٣) الرقم القياسي للأسعار البسيط ؟

A 116.22 %	B 137.33 %	C 141.2 %	**<u>D</u>** 114.28 %

٤) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة الأساس يساوي ؟

A 24	B 21	**<u>C</u>** 960	D 830

٥) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة الأساس ؟

A 24	B 21	C 960	**<u>D</u>** 830

6) رقم لاسبير (القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس) ؟

<u>A</u> 115.66	B 118.77	C 122.33	D 120 %

7) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة المقارنة ؟

A 460	B 830	**<u>C</u>** 1200	D 1040

٨) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة المقارنة؟

A	460	B	830	C	1200	**D**	1040

٩) رقم باتشي ؟

A	116.77 %	**B**	115.38 %	C	130.22 %	D	140 .18 %

١٠) الرقم الأمثل للاسعار (فيشر) ؟

A	115.52 %	B	118.53 %	C	117 %	D	122 %

* طريقة حل السؤال السابق :

١) أسعار سنة الأساس تساوي : $21 = 7 + 8 + 6$

٢) أسعار سنة المقارنة تساوي : $24 = 7 + 10 + 7$

٣) الرقم القياسي للأسعار البسيط يساوي :

$$\text{البسيط} = \frac{\sum \mathbf{P1}}{\sum \mathbf{P0}} \times 100$$

$$= \frac{24}{21} \times 100 = 114.28 \ \%$$

٤) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة الأساس يساوي :

P1 . Q0
7 × 50 = 350
10 × 40 = 400
7 × 30 = 210
960

٥) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة الأساس يساوي :

P0 . Q0
6 × 50 = 350
8 × 40 = 400
7 × 30 = 210
830

٦) رقم لاسبير (القياسي للاسعار المرجح بكميات سنة الأساس) يساوي :

$$\text{لاسبير} = \frac{\sum P1 \cdot Q0}{\sum P0 \cdot Q0} \times 100$$

$$\text{لاسبير} = \frac{960}{830} \times 100 = 115.66\ \%$$

٧) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة المقارنة في كميات سنة المقارنة يساوي :

P1 .		Q1		
7	×	60	=	420
10	×	50	=	500
7	×	40	=	280
				1200

٨) مجموع حاصل ضرب أسعار سنة الأساس في كميات سنة المقارنة يساوي :

P0 .		Q1		
6	×	60	=	360
8	×	50	=	400
7	×	40	=	280
				1040

٩) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باتش) يساوي :

$$\text{باتش} = \frac{\sum P1 \cdot Q1}{\sum P0 \cdot Q1} \times 100$$

$$\text{باتش} = \frac{1200}{1040} \times 100 = 115.38$$

١٠) الرقم الأمثل للأسعار (فيشر) يساوي :

$$\text{فيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باتش}}$$

$$\text{فيشر} = \sqrt{115.38 \times 115.66} = 115.52\ \%$$

الاختبار الدوري الأول

١) عزيزي الطالب : اختر جواباً واحد فقط وظلل الدائرة المرفقة باستخدام القلم الرصاص

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

البيانات 5, 8, 3, 7, 5, 4				
١- الوسط الحسابي يساوي	6	5.33	4	6.5
٢- الوسيط يساوي	5	5.5	6	4.5
٣- المنوال يساوي	7	6	5	4
٤- المدى يساوي	8	5	7	4

التوزيع التكراري للإنفاق لعدد 50 أسرة هو

الفئات	5 -	15 -	25 -	35 -	45 – 55
التكرارات	5	10	11	14	10

٥- الوسط الحسابي للإنفاق يساوي	33.10	39.29	32.80	30.49
٦- المنوال للإنفاق يساوي	39.29	32.80	30.71	35.59
٧- الانحراف المعياري للإنفاق يساوي	13.15	12.66	11.09	14.01
٨- معامل الالتواء للإنفاق يساوي	-0.51	0.43	-0.43	-0.60
٩- التوزيع التكراري للإنفاق	متماثل	ملتو لليمين	ملتو لليسار	لا شيء
١٠- معامل الإنفاق يساوي	38.58%	40.25%	42.90%	37.10%
وجد أن الوسط الحسابي لدخل هذه الأسرة يساوي 75 والانحراف المعياري للدخل يساوي 30				
١١- معامل الاختلاف للدخل يساوي	41.98%	38.33%	33.33%	40.00%
١٢- من حيث التشتت النسبي للدخل والإنفاق	الدخل أكثر تشتت	الإنفاق أكثر تشتت	لهما نفس التشتت	لا شيء مما سبق

١٣- مقياس الموضع (النزعة المركزية) الذي يتأثر بالقيم الشاذة هو	الوسيط	الوسط الحسابي	المنوال	التباين
١٤- عدد حوادث المرور على إحدى الطرق السريعة متغير عشوائي	متصل	وصفي	منفصل	لاشيء مما سبق
١٥- لاختبار تماثل التوزيع نستخدم	معامل الالتواء	معامل الارتباط	معامل الاختلاف	المدى
١٦- أدى مجموعة من الطلاب امتحاناً في مادة الإحصاء ووجد أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال هي 12 ، 11، 9، على الترتيب.فإن التوزيع التكراري للدراجات يكون	ملتوي لليسار	متماثل	ملتوي لليمين	لا يمكن تحديده

تكاليف الدعاية (x) لنوع من السلع وقيمة المبيعات (y) معطاة كما يلي:

x	11	5	12	4	9
y	16	12	10	12	12

الوسط الحسابي للدعاية يساوي 8.2 والوسط الحسابي للمبيعات 12.4 والانحراف المعياري للدعاية يساوي 3.19 والانحراف المعياري للمبيعات يساوي 1.96

-1	0.51	0.89	0.12	١٧- معامل ارتباط بيرسون يساوي
عكسي تام	طردي تام	عكسي	طردي	١٨- الارتباط بين x و y

إذا كان (y) تمثل قيمة صادرات المملكة العربية السعودية لدولة تونس (بعشرات الملايين) خلال الفترة 1999-2003 معطاة بالجدول

السنة	1999	2000	2001	2002	2003
الصادرات	11	16	15	18	14

إذا كان $\bar{y} = 14.80$ ، $S_x = \sqrt{2}$ ، وأخذنا معادلة خط الاتجاه العام لهذه السلسلة الزمنية في الصورة $\hat{y} = b0 + b1\ X$

5	1	2	4	١٩- الوسط الحسابي يساوي
146	160	150	156	٢٠- قيمة $\sum xy$ تساوي
-2.01	0.80	1.90	-0.80	٢١- قيمة b1 تساوي
12.80	15.29	13.20	14.01	٢٢- قيمة b0 تساوي
18.00	21.20	17.56	16.00	٢٣- قيمة الصادرات المتوقعة عام 2005 يساوي
16.96	14.90	17.10	15.60	٢٤- قيمة y الاتجاهية عام 2002 تساوي
115.38	98.79	110.15	116.90	٢٥- قيمة y النسبية (لاستبعاد أثر الاتجاه العام) عام 2002 تساوي

الجدول التالي يوضح أسعار ثلاثة سلع والكميات المستهلك منها عامي 1407 ، 1410

1410		1407		السلع
الكمية	السعر	الكمية	السعر	
40	8	30	5	أ
20	12	10	8	ب
30	10	20	7	ج

160 %	130 %	120 %	150 %	٢٦- الرقم التجميعي البسيط للأسعار
150 %	151.4%	122.4%	124.44%	٢٧- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير)
160 %	150 %	150.9%	151.9%	٢٨- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باش)
150 %	151.1%	120 %	148.44%	٢٩- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)
لم تتغير	زادت	تضاعفت	انخفضت	٣٠- الرقم القياسي الأمثل يشير أن الأسعار

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

٢) أختر جواباً واحداً فقط :

١) مركز الفئة هو ؟

لا شيء	D	منتصف الفئة	**<u>C</u>**	عرض الفئة	B	طول الفئة	A

٢) يسمى الرقم الأكثر تكراراً أو شيوعاً ؟

الانحراف المعياري	D	الوسط الحسابي	C	المنوال	**<u>B</u>**	الوسيط	A

٣) معامل الاختلاف هو ؟

مقياس التشتت النسبي	**<u>D</u>**	مقياس التشتت	C	معامل الاختلاف	B	الوسط الحسابي	A

٤) معامل الاختلاف هو ؟

الانحراف المعياري	D	مقياس التشتت	**<u>C</u>**	معمل الالتواء	B	تماثل التوزيع	A

٥) الآتي أحد مقاييس المركز؟

الوسط الحسابي	**<u>D</u>**	معامل الاختلاف	C	معامل الالتواء	B	الانحراف المعياري	A

٦) الآتي أحد مقاييس النزعة المركزية؟

معامل الاختلاف	D	التباين	C	الانحراف المعياري	B	المنوال	**<u>A</u>**

٧) الآتي أحد مقاييس المركز ؟

معامل الالتواء	D	معامل الاختلاف	C	الوسيط	**<u>B</u>**	الانحراف المعياري	A

٨) التي لا يعتبر من مقاييس المركز ؟

الانحراف المعياري	**<u>D</u>**	منوال	C	وسيط	B	وسط حسابي	A

٩) الآتي هو أحد مقاييس التشتت؟

المنوال	D	الوسيط	C	الوسط الحسابي	B	الانحراف المعياري	**<u>A</u>**

١٠) الآتي هو أحد مقاييس التشتت ؟

D المنوال	C الوسيط	**B** المدى	A الوسط

١١) الآتي هو أحد مقاييس التشتت النسبي ؟

D المنوال	C معامل الالتواء	B الوسيط	**A** معامل الاختلاف

١٢) الآتي لا يعتبر من مقاييس التشتت ؟

D الوسط الحسابي	C معامل الاختلاف	B المدى	A الانحراف

١٣) تدخل جميع قيم المجموعة في حساب ؟

D الانحراف	**C** الوسط الحسابي	B الوسيط	A المنوال

١٤) لا يتأثر بالقيم الشاذة ؟

D الوسط الحسابي	C الانحراف المعياري	B المنوال	**A** المنوال والوسيط

١٥) يتأثر بالقيم الشاذة ؟

D الوسط الحسابي	C الانحراف المعياري	B المنوال	A الوسيط

١٦) لا يدخل في حسابه سوى قراءة واحدة أو قراءتين من المجموعة كلها ؟

D المنوال	C الانحراف	**B** الوسيط	A الوسط الحسابي

١٧) لا يتأثر بالقراءة الشاذة ؟

D معامل الاختلاف	C الوسط	B الانحراف	**A** المنوال

١٨) القيمة الموجبة لمعامل الالتواء تعني أن التوزيع ؟

D لا شيء	C ملتوي جهة اليسار	**B** ملتوي جهة اليمين	A متماثل

١٩) إذا كان الوسط الحسابي أكبر من المنوال فإن التوزيع ؟

D لا شيء	C متماثل	B ملتوي جهة اليسار	**A** ملتوي جهة اليمين

٢٠) إذا كان المنوال أقل من الوسط الحسابي يعني التوزيع ؟

D لا شيء	**C** ملتوي جهة اليمين	B ملتوي جهة اليسار	A متماثل

٢١) إذا كان ناتج الالتواء = صفر ، فإن التوزيع ؟

D لا شيء	C ملتوي جهة اليسار	B ملتوي جهة اليمين	**A** متماثل

٢٢) إذا كان التوزيع متماثل والمنوال يساوي 100 فإن الوسط الحسابي ؟

D 8	C 9	**B** 10	A 12

٢٣) إذا كان التوزيع متماثل والوسط الحسابي = 8 ، فإن الوسيط ؟

D 7	C 9	**B** 8	A 10

٢٤) إذا كان ناتج الالتواء سالب فإن التوزيع ؟

D لا شيء	**C** ملتوي جهة اليسار	B متماثل	A ملتوي جهة اليمين

٢٦) إذا كان التوزيع ملتوي جهة اليسار فإن الوسط الحسابي ؟

D لا شيء	C مساوي للتوسيط	B أكبر من الوسيط	**A** أقل من الوسيط

٢٧) مجموع قيم وسطها الحسابي 8 وعددها 7 هو ؟

D 80	**C** 56	B 60	A 40

٢٨) تنحصر قيمة الارتباط دائماً بين ؟

D لا شيئ	**C** -1 , +1	B -1 , 0	A 0 , 1

٢٩) القيمة السالبة للالتواء تعني أن الارتباط ؟

D لا شيء	C تام	**B** عكسي	A طردي

٣٠) القيمة الموجبة لمعامل الالتواء تعني أن الارتباط ؟

D لا شيء	C تام	B عكسي	**A** طردي

٣١) إذا كانت قيمة معامل الارتباط 1.2 هذا يعني ؟

D هناك خطأ	C طردي تام	B الارتباط عكسي	A الارتباط طردي

٣٢) التباين هو ؟

A الانحراف المعياري	**B** مربع الانحراف	C الجزر الانحراف	D لا شيء

٣٣) الانحراف هو ؟

A مربع التباين	B التباين	**C** جزر التباين	D جزر الانحراف

٣٤) يسمى المتغير المطلوب تقديره في معادلة خط الانحدار دائماً ؟

A المستق	B النائب	**C** التابع	D لا شيء

٣٥) إذا كانت قيمة الانحراف المعياري $\sqrt{6} = S$ ، فإن التباين يساوي ؟

A 36	B 1	**C** 6	D 3

٣٦) إذا كان التباين = (3) فإن الانحراف المعياري يساوي ؟

A 3	**B** $\sqrt{3}$	C 9	D 3

٣٧) يسمى الرقم القياسي للاسعار الخاص بنسبة الأساس ؟

A باتش	B لا سبير	**C** البسيط	D الامثل فشر

٣٨) رقم لا سبير هو الرقم الخاص بكميات ؟

A سنة المقارنة	**B** سنة الأساس	C البسيط	D لا شيء

٣٩) يسمى الرقم القياسي للاسعار الخاص بسنة المقارنة ؟

A لاسبير	**B** باتش	C البسيط	D لا شيء

٤٠) يسمى الرقم الأمثل للأسعار ؟

A باتش	B لاسبيير	**C** فيشر	D لا شيء

الباب الثامن

مبادئ الاحتمـــالات

مقدمة:

تلعب الاحتمالات دوراً هاماً في حياتنا اليومية ، لأننا نستخدمها في قياس عدم التأكد والاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة التجارب العشوائية ، وتسمى التجربة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة ، أي لا نستطيع التنبؤ بها مسبقاً.

وتنقسم نتائج التجارب من وجهة نظر الاحتمالات إلى ثلاث أنواع هي :

أ- نتائج أو حوادث مؤكدة:

وهي نتائج أو حوادث لابد من وقوعها أو حدوثها .

فمثلاً:

إذا ألقيت تفاحة في الهواء ، فإنها لابد وتسقط على الأرض

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإن احتمال وقوعها = 1

ب- نتائج أو حوادث مستحيلة:

وهي نتائج أو حوادث يستحيل وقوعها أو حدوثها.

فمثلاً:

سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء

وإذا كانت الحادثة مستحيلة الوقوع فإن احتمال وقوعها = صفر

ج – نتائج أو حوادث محتملة (ممكنة / غير مؤكدة).

وهي نتائج التجارب العشوائية التي لا نستطيع التنبؤ بوقوعها مسبقاً ، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها .

وإذا كانت الحادثة محتملة فإن احتمال وقوعها ينحصر بين **صفر & 1**

تعريف الاحتمال:

إذا كان لدينا تجربة ما تقع بطرق عددها (n) طريقة وكان من بينها حدث معين (A) مثلاً ، يقع بطرق عددها (X) طريقة $[\, n \geq X \,]$. فإن احتمال وقـوع الحدث (A) ويرمز له بالرمز P(X) هو:

$$P(X) = \frac{X}{n} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث (X)}}{\text{عدد الحالات الكلية (n)}}$$

مبادئ الاحتمالات :

١) قاعدة أو ٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ⟵ اتحاد U

(قاعدة الجمع للحالات المانعة والغير مانعة)

زيد أو عبيد

A U B

مانع غير مانع

عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B	عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B
أو	تقاطع أو
P (A U B) = P (A) + p (B)	P(A U B) = P(A) + p(B) – P(A ∩ B)

مثال (١٣) :

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، فما احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 5

A B

الحل :

احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

A عدد فردي { 1 ، 3 ، 5 } 3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 5 { 6 } احتمال واحد فقط

لا يوجد تكرار مانع

أو

P (A U B) = P (A) + P (B)

$$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

مثال (١٤) :
إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب ، فما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة عليها صورة البنت أو صورة الولد ؟

الحل:
ورقة اللعب 52 ورقة

A صورة البنت (4) احتمالات
أو
B صورة الولد (4) احتمالات

لا تكرار
مانع

أو
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

مثال (١٥) :
إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد فردي أو عدد يقبل القسمة على (3) هو ؟

الحل:
احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

A عدد فردي { 1 ، 3 ، 5 } 3 احتمالات
أو
B عدد أكبر من 5 { 3 ، 6 } احتمالين

يوجد تكرار $\frac{1}{6}$
غير مانع

أو
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

مثال (١٦) :
إذا ألقيت زهرة نرد ، ما احتمال :
١) ظهور عدد زوجي ؟
٢) ظهور عدد أكبر من (2) ؟
٣) ظهور عدد زوجي أو عدد اكبر من (2) ؟

الحل:
احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

١) ظهور عدد زوجي :

{ 2 ، 4 ، 6 } 3 احتمالات = $\frac{3}{6}$

٢) ظهور عدد أكبر من (2) :

{ 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات = $\frac{4}{6}$

٣) ظهور عدد زوجي أو عدد أكبر من (2) :

A عدد زوجي { 2 ، 4 ، 3 } 3 احتمالات
أو
B عدد أكبر من 2 {3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات

يوجد تكرار غير مانع $\frac{2}{6}$

أو

$$P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال (١٧) :
إذا ألقيت عملة معدنية مرة واحدة ، فما هو احتمال ظهور الصورة أو كتابة ؟

ظهور الصورة = $\frac{1}{2}$

ظهور الكتابة = $\frac{1}{2}$

ظهور صورة أو كتابة = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

٢) قاعدة (و) ⟵ تقاطع $\cap$
قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (و) ($\cap$) والقاعدة الضرب

مستقلة غير مستقلة

أولاً : قاعدة الضرب للاحداث المستقلة :

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

مثال (١٨) :
ما احتمال ظهور الصورة والكتابة في رميتين لعملة معدنية ؟

الحل:
رمية أولى صورة A
لا تتأثر و مستقلان
رمية ثانية كتابة B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال (١٩) :
ما احتمال ظهور واحد و واحد و واحد في ثلاث رميات لنرد ؟
ضرب

الحل:
I في الأولى
II في الثانية
III في الثالثة

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

- ملاحظة : في حالة أعطي في المثال نسبتين : أي نسبة تمثل حادثة ، ونسبة تمثل حادثة أخرى ، فعليك أن تعرف أن هذه الأحداث مستقلة.
- لو طلب الاثنين ، كلاهما ، (و) : أي أن تعوض الأول × الثاني .
- لو طلب ايهما أو أحدهما على الأقل : الناتج يكون { 1 - الأول × الثاني }.

نجاح أحدهما على الأقل : 1 – فشل الأول × فشل الثاني

فشل أحدهما على الأقل : 1 – نجاح الأول × نجاح الثاني

مثال (٢٠) :

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء هو 0.8 ، وكان احتمال نجاح الطالب في مادة المحاسبة هو 0.7 ، اخذت أحدى الحادثتين فاحسب احتمال :

١) نجاح الطالب في المادتين ؟
٢) فشل الطالب في المادتين ؟
٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟
٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟

الحل:

إحصاء	محاسبة
نجاح 0.8	نجاح 0.7
فشل 0.2	فشل 0.3

١) نجاح الطالب في المادتين :

$= 0.8 \times 0.7 = 0.56$

٢) فشل الطالب في المادتين :

$= 0.2 \times 0.3 = 0.06$

٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (فشل الأول × فشل الثاني)

$1 - (0.2 \times 0.3)$

$1 - 0.06 = 0.94$

٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (نجاح الأول × نجاح الثاني)

$1 - (0.8 \times 0.7)$

$1 - 0.56 = 0.44$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة :

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

مؤثر

و

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

مثال (٢١)

صندوق به خمسة كرات منها 4 بيضاء و 6 حمراء ، إذا سحبت كرتان ما احتمال :

١) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء ، بدون إرجاع ؟
٢) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء ، مع الإرجاع ؟
٣) أن تكون الكرتان من نفس اللون ، بدون إرجاع ؟
٤) أن تكون الكرتان من نفس اللون ، مع الإرجاع ؟

الحل :

١) كرتان بيضاء وحمراء ، بدون إرجاع :

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

٢) كرتان بيضاء وحمراء ، مع الإرجاع :

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100}$$

٣) كرتان من نفس اللون ، بدون إرجاع :

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90}$$

٤) كرتان من نفس اللون ، مع إرجاع :

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{16}{100} + \frac{36}{100} = \frac{52}{100}$$

الباب التاسع

التوزيعات الاحتمالية

١ ـ المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى "المتغير العشوائي" وهذا المقدار يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية .

فمثلاً:

عند إلقاء زهرة طاولة (نرد) مرة واحدة ، التجربة هنا عشوائية ، ناتج التجربة هي الأرقام التي تظهر على السطح العلوي للزهرة .

المقدار : الذي يرافق نتائج هذه التجربة والذي يسمى المتغير العشوائي ، ويرمز له بالرمز (X)

يمكن أن يكون : 1، 2 ، 3 ، .... ، 6

أي أن س يمكن أن تأخذ : 1، 2 ، 3 ، .... ، 6

(أ) المتغير العشوائي المنفصل :

يقال أن المتغير العشوائي "س" منفصلاً إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة.

مثل:

عدد أفراد الأسرة ، متغير منفصل لأنه يأخذ القيم : 1،2،3

(ب) المتغير العشوائي المستمر :

يقال أن المتغير العشوائي "س" مستمراً إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره ، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة.

مثل:

طول الطالب متغير مستمر لأنه يمكن أن يأخذ قيم صحيحة وكذلك قيم كسرية.

٢ـ التوزيع الاحتمالي

(أ) التوزيع الاحتمالي المنفصل :

يكون فقط في حالة الأحداث المستقلة والغير مستقلة.

إذا كانت (X) متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم

X_1 ، X_2 ، .... ، X_n

$P(X_1)$, $P(X_2)$ …….. $P(X_n)$

الباب العاشر

بعض التوزيعات الاحتمالية

حالة الأحداث المستقلة :

أولاً: توزيع ذي الحدين :

إذا كان لدينا تجربة تتكرر (n) مرة ، وكان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة هو (P) واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة هو (q) [بشرط أن $P + q = 1$]

فان احتمال ظهور الحدث (X) مرة من بين الـ (n) مرة ، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \; . P^{x} \; . q^{n-x}$$

$$X = 0 \; , \; 1 \; , \; 2 \; , \; .... n$$

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً لابد أن يكون :

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \; . P^{x} \; . q^{n-x} \quad = \; 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع منفصل ، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويتوقف على قيمة الاحتمال (P) .

خصائص التوزيع:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي
ميو $\mu = n \times p$

٢) التباين سيجما تربيع $\sigma^2 = n \,.\, p \,.\, q$

٣) الانحراف المعياري سيجما $\sigma = \sqrt{n \,.\, p \,.\, q}$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة ، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي .

أولاً: ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد :

شرح النظرية (بطريقة مبسطة)

أ) النسبة :

أبيض أو أسود أبيض + أسود = 1 = 100%

أبيض	أسود
20%	80%

ذكور	إناث
30%	70%

متزوج	أعزب
40%	60%

النسبة

نسبة مطلوبة P — نسبة غير مطلوبة q

ب) العدد :

عدد محاولات دراسة الظاهرة (n)

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , ... n$

فانه يتبع ذات الحدين بالمعادلة (القانون) :

نسبة (احتمال)

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \, . P^{n} \, . q^{n-x}$$

حيث :

n هي عدد ممارسات دراسة الظاهرة.
X هي الاحتمالات الوارد حدوثها.
P هي النسبة المطلوب دراستها.
q هي النسبة الغير مطلوب دراستها.
C التوافيق.

بشطر أن :

١) أي احتمال $P(X) \geq 0$

٢) مجموع الاحتمالات $\sum P(X) = 1$

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

- **أهم شيء على الإطلاق**

طريقة تحديد القيمة العددية للاحتمال المطلوب (X)

مثال للتوضيح :

لو أن عدد الاحتمالات $n = 7$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2, 3, 4 , 5 , 6 , 7$

١) التوزيع الاحتمالي :

$P(x=0), p(x=1), p(x=2), p(x=3), p(x=4), p(x=5), p(x=6), p(x=7) = 1$

٢) الجميع :

$P(x = 7) \longleftarrow p(x = n)$

٣) بالضبط (3) منهم :

$p(x = 3)$

٤) أقل من (2) :

$p(x < 2) = p(x = 0) + p(x = 1)$

٥) أكبر من (5) :

$P(x > 5) = p(x = 6) + p(x = 7)$

٦) على الأكثر (2): (أي أقل أو يساوي 2)

$P(x \leq 2) = P(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2)$

٧) على الأقل (2) : (أي أكثر أو تساوي 2)

$P(x \geq 2) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) + p(x=7)$

ملاحظة : عندما يكون المطلوب كبير كما هو في المثال رقم (7) أعلاه ، نستخدم قاعدة

المجموع – [البيان السهل]

$1 - [\, p(x = 0) + p(x = 1) \,]$

مثال (١) :

إذا كانت نسبة الطلاب المتزوجين (20%) ، أخذت عينة من (3) طلاب فاحسب احتمال:

١) أن يكون جميع الطلاب عزاب ؟

٢) احتمال وجود (2) من الطلاب عزاب ؟

٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين ؟

٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين ؟

٥) متوسط التوزيع التباين والانحراف المعياري لعدد الطلاب المتزوجين ؟

الحل:

النسبة

عازب | متزوج

80% = **0.8** **q** | **0.2** **P** = 20%

العدد $n = 3$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3$

المعادلة :

$$\mathbf{P (X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x}}$$

$$P (X) = {}^{3}C_{x} \; (0.8)^{x} \, (0.2)^{3-x}$$

١) احتمال جميع الطلاب عزاب :

$$P (X= 3) = {}^{3}C_{3} \; (0.8)^{3} \; (0.2)^{0}$$

$$= 0{,}512$$

٢) احتمال وجود (2) طلاب من العزاب :

$$P (X= 2) = {}^{3}C_{2} \; (0.8)^{2} \; (0.2)^{1}$$

$$= 0{,}384$$

٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين :

$$P(X) = {}^{3}C_{x} \; (0.2)^{x} \, (0.8)^{3-x}$$

$$P(X \leq 1) = p(x=0) + p(x=1)$$

$$= {}^{3}C_{0} \; (0.2)^{0} \, (0.8)^{3} + {}^{3}C_{1} \; (0.2)^{1} \; (0.8)^{2}$$

$$= 0{,}512 + 0.384$$

$$= 0.896$$

٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين :

$$P(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$$

$$= 1 - p(X=0)$$

$$= 1 - 0.512$$

$$= 0.488$$

ملاحظة : في هذه الحالة ، وبما أن لدينا ناتج $P(X=0)$ ، نستخدم قاعدة:

المجموع – [البيان السهل]

$$\mathbf{1 - [\, p(x=0)\,]}$$

٥) متوسط التوزيع ، والتباين ، والانحراف المعياري للمتزوجين :

ميو $\mu = n \times p$

$$= 3\,(0.2) = 0.6$$

سيجما تربيع $\sigma^2 = n \, . \, p \, . \, q$

$$= 3\,(0.2)\,(0.8) = 0.48$$

سيجما $\sigma = \sqrt{n \, . \, p \, . \, q}$

$$= \sqrt{3\,(0.2)\,(0.8)}$$

$$= 0.69$$

مثال (٢) :

إذا كانت نسبة الوحدات الفاخرة في إنتاج أحد المصانع هي $\frac{3}{5}$ ، اختيرت عينة م (4) وحدات ، فاحسب احتمال :

١) عدم وجود أي وحدات من النوع الفاخر؟
٢) وجود وحدة واحدة من النوع الفاخر ؟
٣) وجود وحدة واحدة على الأكثر من النوع الفاخر ؟
٤) أن تكون جميع الوحدات من النوع المعيب ؟
٥) متوسط التوزيع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الفاخرة ؟

الحل:

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد ← ذات الحدين.

النسبة

$\frac{3}{5}$

فاخر 0.6 **P** ، معيب 0.4 **q**

العدد $n = 4$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

المعادلة :

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \;.P^{x} \;.q^{n-x}$$

$$P(X) = {}^{4}C_{x} \;(0.6)^{x}\,(0.4)^{4-x}$$

١) احتمال عدم وجود أي وحدات فاخرة :

$$P(X=0) = {}^{4}C_{0} \;(0.6)^{0}\;(0.4)^{4}$$

$$= 0,0256$$

ملاحظة : طريقة إيجاد المعادلة بالآلة الحاسبة:

اتبع الخطوات التالية :

^{y}x	0.4	×	^{y}x	0.6	×	0	nCr	4
أو			أو					
^			^					

٢) احتمال وجود وحدة واحدة فاخرة :

$$P (X= 1) = {}^{4}C_{1} \ (0.6)^{1} (0.4)^{3}$$

$$= 0,1536$$

٣) احتمال وجود واحدة على الأكثر فاخرة :

$$P (X\leq 1) = p (x = 0) + p (x = 1)$$

$$= 0,0256 + 0.1536$$

$$= 0.1792$$

٤) احتمال وجود جميع الوحدات من النوع المعيب :

$$P (X) = {}^{4}C_{x} \ (0.4)^{x} \ (0.6)^{4-x}$$

$$P (X= 0) = {}^{4}C_{0} \ (0.4)^{4} \ (0.6)^{0}$$

$$= 0,0256$$

٥) متوسط التوزيع ، والانحراف المعياري للمتزوجين :

ميو $\mu = n \times p$

$$= 4 (0.6) = 2.4$$

سيجما $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$$= \sqrt{2.4 \times 0.4}$$

$$= 0.98$$

ثانياً : توزيع بواسون / ما هو احتمال في وجود :

أما معدل في وحدة الزمن ← توزيع بواسون

أو يطلب في المسألة ، معدل يتبع توزيع بواسون ←

يسمى المعدل (λ) لمدا

والاحتمالات الممكنة $X = 0 , 1 , 2 , 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{X!}$$

حيث :

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد ، مثال :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$2! = 2 \times 1$

$1! = 1$

$0! = 1$

$(\text{عدد})^{\text{صفر}} = 1$

كيفية إيجاد (!) الضرب بالآلة :

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{120}$

$e^{-\lambda}$ تعني e^{-2} e^{-3} e^{-4} حسب المعطى من المسألة ،

= 0.018 ، 0.4978 ، 0.135

وبالآلة :

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{in}}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي $\mu = \lambda$

٢) التباين $\sigma^2 = \lambda$

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال (٣) :
إذا كانت الحوادث الشهرية التي حدثت على إحدى الطرق السريعة تتبع توزيع بواسون بمعدل حادثين (2) ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي حادثة ؟
٢) حدوث حادثتين (2) ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٤) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $0.135 = e^{-2}$ ، $0.25 = e^{-3}$

الحل:

$\lambda = 2 \quad , \quad X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 .... \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x \, . \, e^{-\lambda}}{X!} = \frac{2^x \, . \, e^{-2}}{X!} = \frac{2^2 \, (0.135)}{X!}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث :

$$P(x = 0) = \frac{2^0 \, . \, (0.135)}{0!} = 0.135$$

٢) حدوث حادثتين (2) :

$$P(x = 0) = \frac{2^2 \, . \, (0.135)}{2!} = 0.135$$

٣) حدوث حادثة واحدة على الأكثر :

$$P(x \le 1) = p(0) + p(1)$$

$$= 0.135 + \frac{2^1 \, . \, (0.135)}{1!}$$

$$= 0.135 + 0.27 = 0.405$$

٤) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر) :

$$P(x \geq 1) = p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

مستحيل

$1 - p(0)$

$= 1 - 0.135 = 0.865$

٥) حدوث أكثر من حادثة :

$$P(x > 1) = p(2) + p(3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

مستحيل

$1 - [\ 0.135 + 0.27\ ]$

$= 1 - 0.405 = 0.595$

٦) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري :

$\mu = \lambda = 2$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

مثال (٤) :

إذا كانت الزلازل تقع في دول جنوب شرق أسيا بمعدل زلزال واحد كل سنة ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي زلزال ؟
٢) حدوث زلزالين على الأقل ؟
٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر ؟
٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين ؟

علماً بأن $e^{-1} = 0.368$

الحل:

$\lambda = 1 \quad , \quad X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{X!} = \frac{1^{x} \cdot e^{-1}}{X!} = \frac{1^{x}\,(0.368)}{X!}$$

X هي عدد الزلازل

١) عدم حدوث أي زلزال :

$$P(x = 0) = \frac{1^{0} \cdot (0.368)}{0!} = 0.368$$

---

٢) حدوث زلزالين على الأقل : (أثنين فأكثر) :

$P(x \geq 2) = p(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

مستحيل

$1 - p(0) + p(1)$

$$1 - \left[0.368 + \frac{1^{0} \cdot (0.368)}{0!} \right] =$$

$1 - [0.368 + 0.368]$

$1 - 0.736 = 0.264$

٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر :

$$P(x \le 1) = p(0) + p(1)$$

$$0.368 + 0.368 = 0.736$$

---

٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين :

بما أن : كل سنة : $\mu = \lambda = 1$

إذاً : كل سنتين : $\mu = \lambda = 2$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

مثال (٥) :

إذا كان معدل وصول البواخر إلى ميناء جدة يتبع توزيع بواسون بمعدل (3) ، بواخر ، فاحسب احتمال :

١) عدم وصول أي باخرة ؟
٢) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٤) حدوث أكثر من حادثة ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $0.135 = e^{-2}$ ، $0.05 = e^{-3}$ ، $0.018 = e^{-4}$

الحل:

$\lambda = 3 \quad , \quad X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{X!} = \frac{3^x \cdot e^{-3}}{X!} = \frac{3^x (0.05)}{X!}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث :

$$P(x=0) = \frac{3^0 \cdot (0.05)}{0!} = 0.05$$

٢) حدوث حادثة واحدة على الأكثر :

$$P(x \le 1) = p(0) + p(1)$$

$$= 0.05 + \frac{3^1 \cdot (0.05)}{1!}$$

$$= 0.05 + 0.15 = 0.20$$

٣) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر) :

$$P(x \geq 1) = \underbrace{p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty}_{\text{مستحيل}}$$

$1 - p(0)$

$= 1 - 0.05 = 0.95$

٤) حدوث أكثر من حادثة :

$$P(x > 1) = \underbrace{p(2) + p(3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty}_{\text{مستحيل}}$$

$1 - [\ 0.05 + 0.15\ ]$

$= 1 - 0.2 = 0.8$

٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري :

$\mu = \lambda = 3$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 3$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$

مثال (٦) :

إذا علمت أن $e^{-4} = 0.018$ و x متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون :

١) فإن متوسط التوزيع μ ؟

A	0	**B**	4	C	3	D	2

٢) التباين التوزيع ي σ^2 ؟

A	4	B	- 4	C	1.67	D	0.018

٣) الانحراف المعياري ؟

A	2	B	4	C	-4	D	0.018

٤) احتمال عدم حدوث أي حادث بالنسبة x ؟

A	0.018	B	2	C	-4	D	13.5

طريقة الحل :

$\boxed{\lambda}$

$e^{-4} = 0.018$

$e^{-\lambda}$

$\lambda = 4$

$\mu = \lambda = 4$

$\sigma^2 = \lambda = 4$

$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4}$

$$\frac{\lambda^x \quad e^{-\lambda}}{X!}$$

$$= \frac{4^0 \times (0.018)}{0\,!} = 0.018$$

(ب) : التوزيع الاحتمالي المتصل :

عند دراستنا للتوزيع الاحتمالي المنفصل ، ذكرنا أن المتغير العشوائي المنفصل (X) يأخذ قيم صحيحة فقط ، وأن هناك احتمالاً يرافق كل قيمة من قيم المتغير (X).

أما في حالة المتغير العشوائي المتصل ، فإن (X) تأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية من مدى التغير ،

فمثلاً :

X = (صفر ، 1) نجد أن (x) تأخذ عدد لا نهائي من القيم حيث (x) يمكن أن = 0, ….,1 ……,2……,3……9

- ما هو احتمال في وجود توزيع طبيعي ؟
- في وجود المعالم التالية ، متوسط التوزيع (μ) والانحراف المعياري (σ) ؟

[أوزان – أطوال – درجات – أعمار – مسافات .... الخ]

الاحتمال المطلوب

X

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

وهذا المتغير المستمر يمثل بيانياً بمنحنى :

وأن المساحة أسفل هذا المنحنى = 1

أي أن المساحة أسفل المنحنى = مجموع الاحتمالات للمتغير (X) = 1

ثالثاً : التوزيع الطبيعي (المعتدل) :

مقدمة :

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قيمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية.

وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأطوال – الأعمار ... إلخ ، تأخذ شكلاً قريباً من المنحنى الطبيعي.

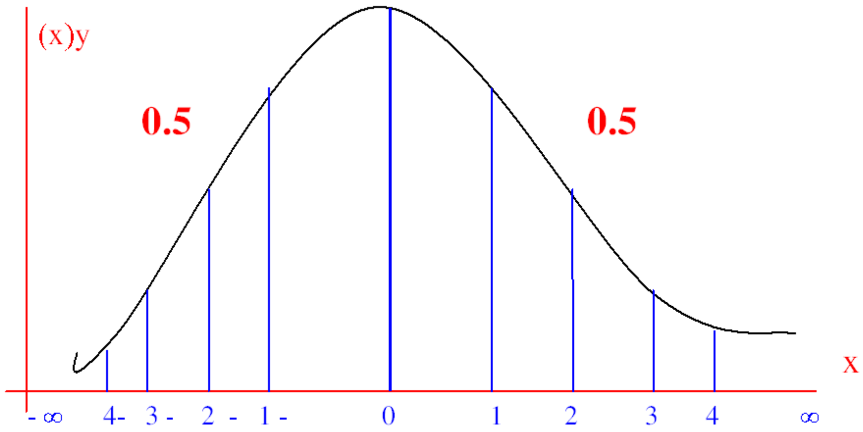
ملاحظة : ولصعوبة حل المسائل الإحصائية بطريقة التوزيع الطبيعي العادي (المعتدل) ، لن يقرر في المنهج الحل بهذه الطريقة ، بل باستخدام طريقة أبسطة ، وأكثر سهولة ، وهي "طريقة التوزيع الطبيعي القياسي".

التوزيع الطبيعي القياسي :

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \overset{\text{بالدالة}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} 4$$

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).



الشكل للتوزيع الطبيعي (القياسي)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \overset{\text{بالدالة}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} 4$$

أولاً / نترجم القياس إلى مساحة من الجدول.

طريقة تحديد المساحة الاحتمالية المطلوب تحديدها :

أولاً / بناءاً على الإشارات والاتجاه :

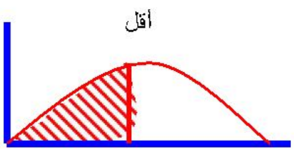
+ يمين　　　أكبر من يمين

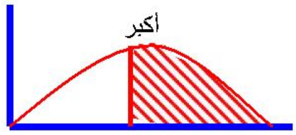
- يسار　　　أقل من يسار

أ) إذا كان هناك قيمة واحدة لـ (Z) :

أكيد الإجابة فقط 0.5 (أو مساحة Z -0.5) (أو مساحة Z + 0.5)

١) إذا كانت Z = 0 ، أكيد الإجابة = 0.5





٢) إذا كانت Z = + عدد يمين أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - عدد يسار أقل من يسار

اتحاد

مساحة (Z) — 0.5

إذا كانت Z = + 1.5 يمين أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - 1.5 يسار أقل من يسار

اتحاد

مساحة (1.5) — 0.5

---

٣) إذا كانت Z = + عدد يمين أقل من يسار ، إذا كانت Z = - عدد يسار أكبر من يمين

اختلاف

مساحة (Z) + 0.5

إذا كانت Z = + 1.64 يمين أقل من يسار ، إذا كانت Z = - 1.64 يسار أكبر من يمين

اختلاف

مساحة (1.64) + 0.5

ب) إذا كان هناك قيمتين لـ (Z) :

١) إذا كانت **Z1** = 0 ، **Z2** = ± عدد

تكون الإجابة عبارة عن مساحة الكشف فقط عن العدد

Z1 = 0   Z2 = 2   Z1 = -2   Z2 = 0

الإجابة مساحة الكشف لـ (2)

---

٢) Z1 = 0 يمين   Z2 = 2 يمين   Z1 = -2 يسار   Z2 = 0 يسار

اتحاد

نطرح المساحة الكبيرة – المساحة الصغيرة

إذا كانت Z1 = + 1   Z2 = 2 ، إذا كانت Z1 = - 1.1   Z2 = -2

اتحاد

مساحة الكشف الكبيرة – مساحة الكشف الصغيرة

٣) إذا كانت $Z1$ = + عدد ، إذا كانت $Z2$ = - عدد

اختلاف

نجمع مساحة الكشف الأولى + مساحة الكشف الثانية

إذا كانت $Z1 = +1.5$ ، إذا كانت $Z2 = -2.5$

اختلاف

نجمع $1.5 + 2.5$

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2342	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3168	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4014
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4279	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4758	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4754	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4811	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4952	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.5	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
4.0	0.4999									

مثال (٧) :

إذا كانت أعمار البطاريات تتبع توزيع طبيعي ومتوسط قدره (80) ساعة وانحراف معياري قدره (10) ساعات ، أخذت بطارية عشوائياً ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد العمر عن 80 ساعة ؟
٢) أن يقل العمر عن 65 ساعة ؟
٣) أن يزيد العمر عن 105 ساعة ؟
٤) أن يقل العمر عن 95 ساعة ؟
٥) أن يزيد العمر عن 65 ساعة ؟
٦) أن يكون العمر ما بين 60 إلى 80 ساعة ؟
٧) أن يكون العمر بين 90 إلى 105 ساعة ؟
٨) أن يكون العمر بين 65 إلى 105 ساعة ؟

الحل :

المتوسط $\mu = 80$ الانحراف المعياري $\sigma = 10$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{10}$$

---

١) احتمال أن يزيد العمر عن 80 ساعة : $x = 80$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{80 - 80}{10} = 0$$

من جدول التوزيع الطبيعي

$= 0.5$ فقط

---

٢) احتمال أن يقل العمر عن 65 ساعة : $x = 65$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

من جدول التوزيع الطبيعي

– يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

$0.5 - 0.4332 = 0.0668$

---

٣) احتمال أن يزيد العمر عن 105 ساعة : $x = 105$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = 2.5$$

+ يمين ، يزيد يمين ، = اتحاد –

$0.5 - 0.4938 = 0.0062$

٤) احتمال أن يقل العمر عن 95 ساعة : $x = 95$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{95 - 80}{10} = 1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

$0.5 + 0.4332 = 0.9332$

---

٥) احتمال أن يزيد العمر عن 65 ساعة : $x = 65$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

– يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

$0.5 + 0.4332 = 0.9332$

---

٦) احتمال أن يكون العمر مابين 60 إلى 80 ساعة : $x2 = 80$، $x1 = 60$

$$Z1 = \frac{X - 80}{10} = \frac{60 - 80}{10} = -2$$

$$Z2 = \frac{X - 80}{10} = \frac{80 - 80}{10} = 0$$

بما أن أحد الناتجين يساوي صفر ، إذاً نكتفي بالكشف عن مساحة الأخر وتكون هذا هو الناتج

مساحة الكشف (2)

$= 0.4772$

---

٧) احتمال أن يكون العمر مابين 90 إلى 105 ساعة : $x2 = 105$، $x1 = 90$

$$Z1 = \frac{X - 80}{10} = \frac{90 - 80}{10} = +1$$

$$Z2 = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = +2.5$$

اتحاد الاشارات = سالب

مساحة الرقم الكبير – مساحة الرقم الصغير

2.5   1

$0.4938 - 0.3413 = 0.1525$

٨) احتمال أن يكون العمر مابين 65 إلى 105 ساعة : $x1 = 65$ ، $x2 = 105$

$$Z1 = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

$$Z2 = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = +2.5$$

اختلاف الاشارات = موجب

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1 2.5

$0.4938 + 0.4332 = 0.9270$

مثال (٨) :

مدينة بها 5000 أسرة ، إذا كان استهلاكهم من المياه يتبع توزيع طبيعي عن وسط قدره 800 جالون ، وانحراف معياري قدره 200 جالون ، أخذت أسرة عشوائياً ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون ؟
٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون ؟
٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون ؟
٤) أن يتراوح الاستهلاك ما بين 800 إلى 1100 جالون ؟
٥) عدد الأسر التي تتراوح ما بين 600 إلى 1100 جالون ؟

الحل :

المتوسط $\mu = 800$ الانحراف المعياري $\sigma = 200$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 800}{200}$$

١) احتمال أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون : $x = 800$

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{800 - 800}{200} = 0$$

فقط $= 0.5$

٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون : $x = 500$

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{500 - 800}{200} = -1.5$$

- يسار ، أقل يسار ، = اتحاد ـ

$0.5 - 0.4332 = 0.0668$

---

٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون : $x = 1100$

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = +1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

$0.5 + 0.4332 = 0.9332$

---

٤) أن يتراوح الاستهلاك مابين 800 إلى 1100 جالون: $x1 = 800$، $x2 = 1100$

$$Z1 = \frac{X - 800}{200} = \frac{800 - 800}{200} = -0$$

$$Z2 = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = 1.5$$

مساحة الكشف (1.5)

$= 0.4332$

---

٥) عدد الأسر الذين يتراوح استهلاكهم ما بين 600 إلى 1100 :

أولا العدد الإجمالي = 5000

ثانيا النسبــــــــــــــــة = الاحتمال

$x1 = 600$ ، $x2 = 1100$

$$Z1 = \frac{X - 800}{200} = \frac{600 - 800}{200} = -\ 1$$

$$Z2 = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = +\ 1.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   1.5

$0.7745 = 0.3413 + 0.4332$

عددهم = النسبـــة × العدد الإجمالي

$= 0.7745 \times 5000 = 3872$ أسرة.

ملاحظة : عندما يطلب عدد :

١) نوجد النسبة (الاحتمال).

٢) نضرب النسبة في العدد الإجمالي تساوي العدد المطلوب.

الباب الحادي عشر

العينات وتوزيعات المعاينة

(١) مقدمة :

يتكون المجتمع الإحصائي من مجموعة من المفردات التي يهمنا دراستها وهذا المجتمع له بعض المعالم أو الخصائص مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة معينة في المجتمع P

وبدلاً من دراسة جميع مفردات المجتمع ، فإننا نختار عينة ممثلة له ، ثم نقوم بدراسة مفردات العينة وحساب بعض المقاييس منها مثل : متوسط العينة X وانحرافها المعياري σ ونسبة صفة معينة في العينة n .

(٢) توزيعات المعاينة :

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه (n) مفردة ، اخترنا منه عينة حجمها (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_1) ، ثم عينة ثانية لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_2) ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_3) ، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع.

سيتوفر لدينا عدد كبير من **القيم للوسط الحسابي** ، لا نتوقع أن تكون كلها متساوية ، وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس (الوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي له **توزيع احتمالي** ويسمى هذا المجتمع الجديد : **مجتمع المتوسطات الحسابية أو توزيع المعاينة .**

مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وبعض خصائصه

نظرية النهاية المركزية :

نظرية (١) :

إذا كان لدينا مجتمع مفرداته (X) يتبع توزيعاً احتمالياً متوسطه (M) ، وانحرافه المعياري σ ، سحبنا منه عينات حجم كل منها (n) مفردة ، وحسبنا الوسط الحسابي لكل عينة .

فإن الوسط الحسابي للعينات ($\bar{X}$) يتبع توزيعاً طبيعياً

متوسطه : $M_{(\bar{X})} = M$

وانحرافه المعياري : $\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}$

وهذا يتطلب تحويل المتوسط المطلوب (X) من توزيع طبيعي عادي إلى طبيعي قياسي بالتحويلة الآتية :

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

الإجابة Z

عادي | سوبر

١) عندما لا توجد عينة.
٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

نستخدم Z عادي

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

١) عندما يوجد عينة حجمها (n) ، وتكون أكبر من واحد.

نستخدم Z سوبر

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثم نوجد المساحة بنفس الطريقة

مثال (٩) :

إذا كانت أوزان طلاب الجامعة تتبع توزيع طبيعي لمتوسط قدره 50 كجم ، وانحراف معياري قدره 10 كجم ، أخذت عينة من 25 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد متوسط الوزن في العينة عن 48 كجم ؟
٢) أن يتراوح بين متوسط متوسط الأوزان ما بين 48 إلى 55 كجم ؟

الحل:

المتوسط $\mu = 50$ الانحراف المعياري $\sigma = 10$

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 50}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = \frac{X - 50}{2}$$

١) احتمال أن يزيد متوسط الوزن عن 48 : $x = 48$

$$Z = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

- يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

$0.5 + 0.3413 = 0.8413$

---

٢) احتمال أن يتراوح مابين 48 إلى 55 : $x1 = 48$ ، $x2 = 55$

$$Z1 = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

$$Z2 = \frac{X - 50}{2} = \frac{55 - 50}{2} = +2.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   2.5

$0.3413 + 0.4938 = 0.8351$

مثال (١٠) :

إذا كانت أطوال الطلاب تتبع توزيع طبيعي ، بمتوسط قدره 168 سم ، وانحراف معياري قدرة 6 سم :

أولاً : اختير طالب عشوائي ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد طوله عن 168 سم ؟

٢) أن يتراوح ما بين 105 إلى 171 سم ؟

ثانياً : أخذت عينة من 36 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يقل متوسط الطول عن 170 سم ؟

الحل :

المتوسط $\mu = 168$ الانحراف المعياري $\sigma = 6$

$$Z = \frac{X - \mu}{6} = \frac{X - 168}{6}$$

أولاً :

١) احتمال أن يزيد الطول عن 168 سم : $x = 168$

$$Z = \frac{X - 168}{6} = \frac{168 - 168}{6} = 0$$

$= 0.5$ فقط

---

٢) احتمال أن يتراوح مابين 165 إلى 171 : $x1 = 165$ ، $x2 = 171$

$$Z_1 = \frac{X - 168}{6} = \frac{165 - 168}{6} = -\ 0.5$$

$$Z_2 = \frac{X - 168}{6} = \frac{171 - 168}{6} = +\ 0.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

0.5   0.5

$0.1915 + 0.1915 = 0.3830$

ثانياً :

١) أخذت عينة من 36 : $n = 36$

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 168}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = \frac{X - 168}{1}$$

أن يقل متوسط الطول عن 170 : $x = 170$

$$Z = \frac{X - 800}{1} = \frac{170 - 168}{1} = -\ 2$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

$0.5 + 0.4772 = 0.9772$

التوزيع الاحتمالي للنسبة في العينة:
نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة و عدد

الإجابة ذات الحدين

عادي

١- عندما يكون العدد أقل من 30.

نستخدم ذات الحدين عادي

نسبة مطلوبة p

نسبة غير مطلوبة q

n

$x = 0 , 1 , \ldots\ldots n$

$p(x) = {}^{n}C_{x} \cdot P^{x} \cdot q^{n-x}$

متوسط التوزيع :

$\mu = n \cdot p$

التباين :

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

الانحراف :

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

سوبر

١- عندما يكون العدد 30 أو أكثر.

نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

$\mu = n \cdot p$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال (١١) :

إذا كانت نسبة الإطارات التالفة 20 % ، أخذت عينة من 400 إطار ، فاحسب احتمال وجود 70 إطار على الأكثر تالف :

ملحوظة : على الأكثر = اقل من أو يساوي يسار

على الأقل = أكبر من أو يساوي يمين

الحل :

تالف = 20 % = 0.2 P

سليم = 80 % = 0.8 q

$\mu = n \cdot p = 400 \times 0.2 = 80$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8} = 8$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{8}$$

70 إطار على الأكثر (أقل أو يساوي) : $x = 70$

$$Z = \frac{X - 80}{8} = \frac{70 - 80}{8} = -1$$

- يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

$0.5 - 0.3413 = 0.1587$

مثال (١٢) :

إذا كانت نسبة الصناديق المعيبة 0.01 % ، في أحد إنتاج المصانع ، أخذت عينة من 1000 صندوق ، فاحسب احتمال وجود 15 صندوق على الأقل معيب :

الحل :

معيب = 0.01 p

سليم = 0.99 q

$\mu = n \cdot p = 1000 \times 0.01 = 10$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \times 0.01 \times 0.99} = 3.15$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{3.15}$

15 صندوق على الأقل (أكثر أو يساوي) : $x = 15$

$Z = \frac{X - 10}{3.15} = \frac{15 - 10}{3.15} = -1$

+ يمين ، أكبر يمين ، = اتحاد –

$0.5 - 0.4441 = 0.0559$

الباب الثاني عشر
تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة (العينات الكبيرة)

مقدمة

الهدف من دراسة أي مجتمع هو إيجاد أو تقدير بعض معالمه أو خصائصه مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ، ونسبة صفة معينة في المجتمع P . مقدمة : وهذه المعالم غالباً ما تكون مجهولة ونريد معرفة قيمتها.

التقدير واختبار الفروض للنسبة

أعمل تقدير ثقة قدر النسبة في المجتمع P بدرجة ثقة

إما 95 % = قيمة جدولية 1.96

أو 99 % = قيمة جدولية 2.58

العينات :

المعطى في السؤال يكون العينة (n) و النسبة في العينة (r)

بإحدى الطريقتين :

١) إما نسبة جاهزة :

أخذت عينة من 50 مصباح ووجد أن نسبة المصابيح التالفة في العينة هي 10%

أي أن :

n = 50

r = 0.1

٢) أو يكون المعطى عينة وعدد الشاهدات في العينة :

النسبة في العينة $r = \dfrac{\text{عدد الشاهدات}}{\text{العينة}}$

---

١) n العينة

٢) r النسبة في العينة

٣) انحراف النسبة في العينة $\sigma r = \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}$

$$P = r \pm \begin{matrix} 95\,\% \\ 1.96 \\ \text{أو} \\ 2.58 \\ 99\,\% \end{matrix} \times \sigma r$$

مثال (٢) :

إذا علمت أن $P = 0.3$ و $n = 25$ و $r = 0.15$

- فأوجد Z المحسوبة في اختبار الفرض ، وإذا علمت أن الفئة الجدولية = 1.96

الحل :

$$Z = \frac{r - P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}} = \frac{0.15 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{25}}} = \frac{-0.15}{0.09} = -1.67$$

بما أن Z المحسوبة ، أقل من Z الجدولية

إذاً القرار قبول ، نقبل H0 فرض العدم ، ونرفض H1 فرض البديل.

ملاحظة :

عندما يكون المعطى في السؤال : النسبة في العينة P والعدد n والنسبة في العينة r

اختير الفرض فإن النسبة P = نسبة محددة

أو هل النسبة = فيـــه محددة على مستوى معنوية %5 أو %1

1.96 2.58

١)

صياغة الفرض النسبة = P = H0 فرض العدم

صياغة الفرض النسبة ≠ P = H1 فرض البديل

٢)

إجراء الإحصاء Z المحسوبة Z المستخدمة في اختبار الفرض

$$Z = \frac{r - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

٣) اتخاذ القرار

إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض ، نرفض H0 فرض العدم ، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل ، نقبل H0 فرض العد ، ونرفض H1 الفرض البديل.

مثال (٣) :

إذا علمت أن النسبة في العينة $r = 0.25$ ، $n = 100$ ، والقيمة الجدولية = 2.58
قدر بدرجة ثقة لـ P

الحل:

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r\,(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{100}} = 0.04$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.25 \pm 2.58\,(0.04)$$

$$P = 0.25 \pm 0.11$$

$$0.14 \leq P \leq 0.35$$

مثال (٤) :

إذا علمت في عينة من 50 مصباح ، وجد أن عدد المصابيح المعيبة 10 مصابيح.
فأعمل قدرة ثقة للنسبة المعيب في الإنتاج بدرجة ثقة 99%

الحل:

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$n = 50$

عدد العينة المعيب 10

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r\,(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{50}} = 0.06$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.2 \pm 2.58\,(0.06)$$ الطرح

$$P = 0.2 \pm 0.15$$ الجمع

$$0.05 \leq P \leq 0.35$$

مثال (٥) :
في عينة من 100 بطارية وجد أن نسبة البطاريات التي بها عيوب هو 20%
فأعمل ثقة لنسبة البطارية التي بها عيوب بدرجة ثقة 95%

الحل:

$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$

$n = 100$

نسبة العينة المعيب 20 %

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{100}} = 0.04$$

$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$

$P = 0.2 \pm 1.96\,(0.04)$

$P = 0.12 \pm 0.28$

$0.05 \leq P \leq 0.35$

تتراوح النسبة ما بين 0.12 إلى 0.28

الباب الثالث عشر
اختبار الفروض الإحصائية

مقدمة

قد يدعي باحث أن متوسط دخل الأسرة الشهري في مدينة ما هو 6000 ريال .

وللتأكد من ذلك نختار عينة عشوائية من سكان هذه المدينة و نحسب الوسط الحسابي للدخل الشهري في العينة ، ولنفرض أنه بلغ 6300 ريال .

فهل الفرق بين متوسط العينة (6300) ريال ، وادعاء الباحث (6000) ريال يرجع إلى مجرد الصدفة أم أن متوسط الدخل في المدينة أكثر من 6000 ريال ؟

للإجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات الآتية ، سواء بالنسبة لاختبار فرض معين حول متوسط المجتمع M أو اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع P .

أولاً : للمتوسط (μ) متوسط المجتمع العام

أولاً : التقدير :

قدر متوسط (يقصد متوسط المجتمع) بدرجة ثقة 95% 99% أي أن **μ** مجهولة

2.58 1.96

وللإيجاد المتوسط **μ** يجب الحصول على الوسط الحسابي **$\bar{X}$** والانحراف المعياري **σ**

الوسط الحسابي : $\bar{X} = \dfrac{\sum x^2 f}{\sum f}$ للبيانات المبوبة.

الوسط الحسابي: $\bar{X} = \dfrac{\sum x}{n}$ للبيانات الغير مبوبة

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$ للبيانات المبوبة.

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$ للبيانات الغير المبوبة.

حيث n تمثل مجموع التكرار $\sum f$

95%

$$\mu = x + \begin{matrix} 1.96 \\ 2.58 \end{matrix} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

99%

أعلى بالجمع $\leq$ μ $\leq$ أدنى بالطرح

ملاحظة :

إذا طلب منك : اختبار الفرض القائل بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة ، يقصد بمتوسط المجتمع العام (μ) ، إذاً المتوسط معلوم.

1% 5%

أو : هل تقبل الادعاء بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة 1.96 أو 2.58

إذاً μ معلوم : أي يجب الحصول على الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

١)

صياغة الفرض (صادق) القيمة المعطاة = μ = H0 فرض العدم

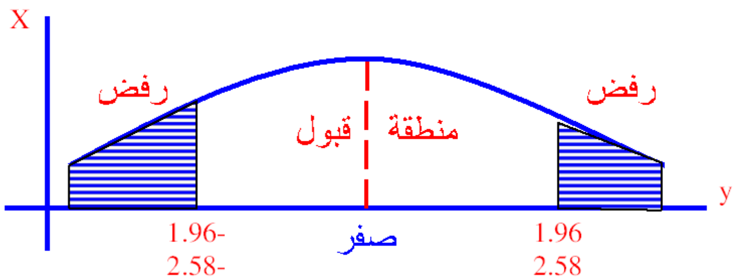
صياغة الفرض (كاذب) القيمة المعطاة $\neq$ μ = H1 فرض البديل

٢) إجراء الإحصاء فإن Z السوبر $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ المحسوبة

٣) اتخاذ القرار

إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض ، نرفض H0 فرض العدم ، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل ، نقبل H0 فرض العد ، ونرفض H1 الفرض البديل.



مستوى المعنوية = 0.05

مستوى المعنوية = 0.01

مثال (١) :

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرباح الشركات بملايين الريالات :

الأرباح	3-	5-	7-	9-	11-	المجموع
عدد الشركات	10	20	40	20	10	100

وإذا علمت أن $\sum xf = 800$ و $\sum x^2 f = 6880$ و $\sum f = 100$ و $n = 100$

١) قدر متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95%

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح مجموع الشركات هو 7 ملايين ريال على مستوى معين 1%

٣) هل تؤيد الادعاء بأن متوسط أرباح الشركات هو 7 ملاين ريال على مستوى معين 1%

الحل:

فئات الأرباح	f تكرار الشركات	X مركز الفئة	X f	X^2 f
3-	10	4	40	160
5-	20	6	120	720
7-	40	8	320	2560
9-	20	10	200	2000
11-	10	12	120	1440
----------	100	-----------	800	6880

الوسط الحسابي :

$$\overline{X} = \frac{\sum Xf}{\sum f} = \frac{800}{100} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{\sum f} - (x)^2} = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

١) متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95% أي 1.96

$$\mu = \bar{X} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = 8 \pm 1.96 \times \frac{2.19}{\sqrt{100}}$$

$$8 \pm 0.43$$

$$\boxed{8 + 0.43 = 8.43}$$

$$\boxed{8 - 0.43 = 7.57}$$

$$7.57 \le \mu \le 8.43$$

الحد الأدنى الحد الأعلى

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح الشركات 7 مليون ريال عند مستوى معين 1%

١- صياغة الفرض

فرض العدم $H0 = \mu = 7$

فرض البديل $H1 = \mu \neq 7$

٢- إجراء الإحصاء

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8 - 7}{\frac{2.19}{\sqrt{100}}} = \frac{1}{0.219} = 4.56$$

٣- اتخاذ القرار (الجدولية) 1% 2.58

Z المحسوبة تساوي 4.56 أكبر من الجدولية 2.58

القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل H1 فرض البديل على مستوى 1%

بسم الله الرحمن الرحيم

اختبار إحصاء ١٠١ نهائي

١) عزيزي الطالب : اختر جواباً واحد فقط وظلل الدائرة المرفقة باستخدام القلم الرصاص

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
البيانات 5, 8, 3, 7, 5, 4				
١- الوسط الحسابي يساوي	6	5.33	4	6.5
٢- الوسيط يساوي	5	5.5	6	4.5
٣- المنوال يساوي	7	6	5	4
٤- المدى يساوي	8	5	7	4

التوزيع التكراري للإنفاق لعدد 50 أسرة هو

الفئات	5 -	15 -	25 -	35 -	45 – 55
التكرارات	5	10	11	14	10

	أ	ب	ج	د
٥- الوسط الحسابي للإنفاق يساوي	33.10	39.29	32.80	30.49
٦- المنوال للإنفاق يساوي	39.29	32.80	30.71	35.59
٧- الانحراف المعياري للإنفاق يساوي	13.15	12.66	11.09	14.01
٨- معامل الالتواء للإنفاق يساوي	-0.51	0.43	-0.43	-0.60
٩- التوزيع التكراري للإنفاق	متماثل	ملتو لليمين	ملتو لليسار	لا شيء
١٠- معامل الإنفاق يساوي	38.58%	40.25%	42.90%	37.10%
وجد أن الوسط الحسابي لدخل هذه الأسرة يساوي 75 والانحراف المعياري للدخل يساوي 30				
١١- معامل الاختلاف للدخل يساوي	41.98%	38.33%	33.33%	40.00%
١٢- من حيث التشتت النسبي للدخل والإنفاق	الدخل أكثر تشتت	الإنفاق أكثر تشتت	لهما نفس التشتت	لا شيء مما سبق

	أ	ب	ج	د
١٣- مقياس الموضع (النزعة المركزية) الذي يتأثر بالقيم الشاذة هو	الوسيط	الوسط الحسابي	المنوال	التباين
١٤- عدد حوادث المرور على إحدى الطرق السريعة متغير عشوائي	متصل	وصفي	منفصل	لاشيء مما سبق
١٥- لاختبار تماثل التوزيع نستخدم	معامل الالتواء	معامل الارتباط	معامل الاختلاف	المدى
١٦- أدى مجموعة من الطلاب امتحاناً في مادة الإحصاء ووجد أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال هي 12 ، 11، 9، على الترتيب.فإن التوزيع التكراري للدراجات يكون	ملتوي لليسار	متماثل	ملتوي لليمين	لا يمكن تحديده

تكاليف الدعاية (x) لنوع من السلع وقيمة المبيعات (y) معطاة كما يلي:

x	11	5	12	4	9
y	16	12	10	12	12

الوسط الحسابي للدعاية يساوي 8.2 والوسط الحسابي للمبيعات 12.4 والانحراف المعياري للدعاية يساوي 3.19 والانحراف المعياري للمبيعات يساوي 1.96

-1	0.51	0.89	0.12	١٧- معامل ارتباط بيرسون يساوي
عكسي تام	طردي تام	عكسي	طردي	١٨- الارتباط بين x و y

إذا كان (y) تمثل قيمة صادرات المملكة العربية السعودية لدولة تونس (بعشرات الملايين) خلال الفترة 1999-2003 معطاة بالجدول

السنة	1999	2000	2001	2002	2003
الصادرات	11	16	15	18	14

إذا كان $\bar{y} = 14.80$ ، $S_x = \sqrt{2}$ ، وأخذنا معادلة خط الاتجاه العام لهذه السلسلة الزمنية في الصورة $\hat{y} = b0 + b1\ X$

5	1	2	4	١٩- الوسط الحسابي يساوي
146	160	150	156	٢٠- قيمة $\sum xy$ تساوي
-2.01	0.80	1.90	-0.80	٢١- قيمة b1 تساوي
12.80	15.29	13.20	14.01	٢٢- قيمة b0 تساوي
18.00	21.20	17.56	16.00	٢٣- قيمة الصادرات المتوقعة عام 2005 يساوي
16.96	14.90	17.10	15.60	٢٤- قيمة y الاتجاهية عام 2002 تساوي
115.38	98.79	110.15	116.90	٢٥- قيمة y النسبية (لاستبعاد أثر الاتجاه العام) عام 2002 تساوي

الجدول التالي يوضح أسعار ثلاثة سلع والكميات المستهلك منها عامي 1407 ، 1410

1410		1407		السلع
الكمية	السعر	الكمية	السعر	
40	8	30	5	أ
20	12	10	8	ب
30	10	20	7	ج

160 %	130 %	120 %	150 %	٢٦- الرقم التجميعي البسيط للأسعار
150 %	151.4%	122.4%	124.44%	٢٧- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير)
160 %	150 %	150.9%	151.9%	٢٨- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باش)
150 %	151.1%	120 %	148.44%	٢٩- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)
لم تتغير	زادت	تضاعفت	انخفضت	٣٠- الرقم القياسي الأمثل يشير أن الأسعار

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

٣١- إذا كان الحدثان A,B لايؤثر وقوع أحدهما على الأخر فإنهما حدثان	مؤكدان	مستقلان	متماثلان	مانعان
٣٢- توزيع احتمالي للاحداث النادرة	المنتظم	ذوالحدين	بواسون	الطبيعي
٣٣- احتمال ظهور رقم يقبل القسمة على 2 و 3 عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$
٣٤- احتمال وقوع حادثين مانعين معا يساوي	1	0	0.5	غير ذلك
٣٥- التوزيع الطبيعي القياسي من التوزيعات الاحتمالية	الملتوية	المنفصلة	المتماثلة	غير ذلك
إذا كان احتمال نجاح طالب ما في أحد المواد هو 0.7 فإذا اخترنا ثلاث طلاب عشوائيا فإن:				
٣٦- احتمال نجاح طالب واحد	0.234	0.189	0.342	0.654
٣٧- احتمال رسوب جميع الطلاب	0.227	0.723	0.342	0.027
٣٨- احتمال نجاح طالب على الأكثر	0.216	0.234	0.189	0.027
٣٩- متوسط عدد الطلاب الراسبين	3.4	2.6	2.1	0.9
٤٠- الانحراف المعياري لعدد الطلاب الناجحين	0.79	0.97	1.97	0.63
إذا أرادت الجامعة تكوين فريق من طالبين لتمثيلها في احدى المسابقات من بين 3 طلاب تخصصاتهم علمية و 4 طلاب تخصصاتهم أدبية فإن:				
٤١- احتمال أن يكون تخصص الطالبين أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
٤٢- احتمال أن يكون تخصص الأول علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
٤٣- احتمال أن يكون تخصص أحدهما علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
٤٤- احتمال أن يكون تخصص واحد منهما على الاقل أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
إذا كان الدخل اليومي للعاملين في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 ريال وانحراف معياري 20 ريال ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً فإن:				
٤٥- احتمال أن يزيد دخله عن 60 ريال هو	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
٤٦- 68 % تقريبا من العاملين تتراوح أجورهم بين	130,150ريال	60,100ريال	50, 70ريال	30, 100ريال
٤٧- احتمال أن يزيد دخله عن 100 ريال	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
٤٨- إذا كان عدد العاملين في هذا المصنع هو 200 عامل فإن عدد العاملين الذين يزيد دخله عن 60 ريال	160	168	179	186
إذا كانت أطوال مجموعة من الشباب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 5سم ، تم اختيار شاب عشوائياً ، أوجد :				
٤٩- احتمال أن يقل طوله عن 172 سم	0.6560	0.6554	0.6500	0.6540
٥٠- احتمال أن يزيد طوله عن 180 سم	0.0528	0.0428	0.0228	0.0328

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي		
	$P(0 < Z < 2) = 0.4772$ $P(0 < Z < 1) = 0.3413$	$P(0 < Z < 1.5) = 0.4332$ $P(0 < Z < 3) = 0.4987$ $P(0 < Z < 1.96) = 0.4750$
	$P(0 \le Z \le 0.4) = 0.1554$ $P(0 \le Z \le 3) = 0.4987$ $P(0 \le Z \le 0.65) = 0.2422$	$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.1700$ $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

الاختبار الدوري الثاني B

عزيزي الطالب : اختر جواباً واحد فقط وظلل الدائرة المرفقة باستخدام القلم الرصاص

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
ألقيت زهرة نرد مرة واحدة :				
١- ما هو احتمال ظهور عدد فردي	5/6	3/6	3/7	8/10
٢- ما هو احتمال ظهور عدد أكبر من 2	1/12	5/6	4/6	2/6
٣- ما هو احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 2	5/6	9/36	2/4	3/5
إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو $\frac{3}{4}$ فإذا أغارت ثلاث طائرات على أهداف العدو ، ما هو :				
٤- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة	36/64	25/64	16/64	9/64
٥- احتمال أن لا يصيب الهدف أي طائرة	1/64	25/64	15/64	10/64
٦- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة على الأكثر	10/64	40/64	30/64	20/64
٧- متوسط عدد الطائرات التي تصيب الهدف	22/4	14/4	9/4	5/4
٨- الانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصيب الهدف	3/4	3/7	3/8	3/10
إذا كانت أطوال مجموعة من الشباب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 5سم ، تم اختيار شاب عشوائياً ، أوجد :				
٩- احتمال أن يقل طوله عن 172 سم	0.6560	0.6554	0.6500	0.6540
١٠- احتمال أن يزيد طوله عن 180 سم	0.0528	0.0428	0.0228	0.0328
١١- احتمال أن ينحصر طوله بين 175سم ، 185 سم	0.1574	0.1480	0.1580	0.1474

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي		
	$P(0 \le Z \le 0.4) = 0.1554$ $P(0 \le Z \le 3) = 0.4987$ $P(0 \le Z \le 0.65) = 0.2422$	$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.1700$ $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

الاختبار الدوري الثاني A

عزيزي الطالب : اختر جواباً واحد فقط وظلل الدائرة المرفقة باستخدام القلم الرصاص

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
١- إذا كان الحدثان A,B لايؤثر وقوع أحدهما على الأخر فإنهما حدثان	مؤكدان	مستقلان	متماثلان	مانعان
٢- توزيع احتمالي للاحداث النادرة	المنتظم	ذوالحدين	بواسون	الطبيعي
٣- احتمال ظهور رقم يقبل القسمة على 2 و 3 عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$
٤- احتمال وقوع حادثين مانعين معا يساوي	1	0	0.5	غير ذلك
٥- التوزيع الطبيعي القياسي من التوزيعات الاحتمالية	الملتوية	المنفصلة	المتماثلة	غير ذلك
إذا كان احتمال نجاح طالب ما في أحد المواد هو 0.7 فإذا اخترنا ثلاث طلاب عشوائيا فإن:				
٦- احتمال نجاح طالب واحد	0.234	0.189	0.342	0.654
٧- احتمال رسوب جميع الطلاب	0.227	0.723	0.342	0.027
٨- احتمال نجاح طالب على الأكثر	0.216	0.234	0.189	0.027
٩- متوسط عدد الطلاب الراسبين	3.4	2.6	2.1	0.9
١٠- الانحراف المعياري لعدد الطلاب الناجحين	0.79	0.97	1.97	0.63
إذا أرادت الجامعة تكوين فريق من طالبين لتمثيلها في احدى المسابقات من بين 3 طلاب تخصصاتهم علمية و 4 طلاب تخصصاتهم أدبية فإن:				
١١- احتمال أن يكون تخصص الطالبين أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٢- احتمال أن يكون تخصص الأول علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٣- احتمال أن يكون تخصص أحدهما علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٤- احتمال أن يكون تخصص واحد منهما على الاقل أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
إذا كان الدخل اليومي للعاملين في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 ريال وانحراف معياري 20 ريال ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً فإن:				
١٥- احتمال أن يزيد دخله عن 60 ريال هو	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٦- 68 % تقريبا من العاملين تتراوح أجورهم بين	130,150ريال	60,100ريال	50, 70ريال	30, 100ريال
١٧- احتمال أن يزيد دخله عن 100 ريال	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٨- إذا كان عدد العاملين في هذا المصنع هو 200 عامل فإن عدد العاملين الذين يزيد دخله عن 60 ريال	160	168	179	186

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي		
	$P(0 < Z < 2) = 0.4772$ $P(0 < Z < 1) = 0.3413$	$P(0 < Z < 1.5) = 0.4332$ $P(0 < Z < 3) = 0.4987$ $P(0 < Z < 1.96) = 0.4750$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

الاختبار الدوري الثاني B

عزيزي الطالب : اختر جواباً واحد فقط وظلل الدائرة المرفقة باستخدام القلم الرصاص

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
ألقيت زهرة نرد مرة واحدة :				
١- ما هو احتمال ظهور عدد فردي	5/6	3/6	3/7	8/10
٢- ما هو احتمال ظهور عدد أكبر من 2	1/12	5/6	4/6	2/6
٣- ما هو احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 2	5/6	9/36	2/4	3/5
إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو $\frac{3}{4}$ فإذا أغارت ثلاث طائرات على أهداف العدو ، ما هو :				
٤- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة	36/64	25/64	16/64	9/64
٥- احتمال أن لا يصيب الهدف أي طائرة	1/64	25/64	15/64	10/64
٦- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة على الأكثر	10/64	40/64	30/64	20/64
٧- متوسط عدد الطائرات التي تصيب الهدف	22/4	14/4	9/4	5/4
٨- الانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصيب الهدف	3/4	3/7	3/8	3/10
إذا كانت أطوال مجموعة من الشباب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 5سم ، تم اختيار شاب عشوائياً ، أوجد :				
٩- احتمال أن يقل طوله عن 172 سم	0.6560	0.6554	0.6500	0.6540
١٠- احتمال أن يزيد طوله عن 180 سم	0.0528	0.0428	0.0228	0.0328
١١- احتمال أن ينحصر طوله بين 175سم ، 185 سم	0.1574	0.1480	0.1580	0.1474

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي	$P(0 \le Z \le 0.4) = 0.1554$ $P(0 \le Z \le 3) = 0.4987$ $P(0 \le Z \le 0.65) = 0.2422$	$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.1700$ $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

القوانين المستخدمة

الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

١) الوسط الحسابي :

البيانات الغير مبوبة :

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

البيانات المبوبـــــة :

$$\bar{X} = \frac{\sum x f}{\sum f}$$

٢) الوسيط :

البيانات الغير مبوبة :

$$\text{الوسيط } M = \frac{\text{مجموع المفردتان الوسطيان}}{2}$$

البيانات المبوبـــــة :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - f\,m}{f\,L} \times h$$

حيث M هو الوسيط.

و L هي الفئة المقابلة لأعلى تكرار.

و n مجموع التكرارات.

و f m القيمة السابقة للتكرار المتجمع الصاعد لترتيب الوسيط.

و f L تكرار فئة الوسيط.

و h طول الفئة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{n}{2}$$

٣) المنوال:

البيانات المبوبـــــة :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

حيث D ترمز للمنوال.

و L هي الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار.

و d_1 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار السابق له.

و d_2 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار اللاحق له.

و h طول الفئة أي مقدار الزيادة من فئة إلى أخرى.

القوانين المستخدمة

الباب الرابع
مقاييس التشتت

١) الانحراف المعياري
البيانات الغير مبوبة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

البيانات المبوبـــــة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - (\bar{x})^2}$$

٢) معامل الاختلاف :
مقياس التشتت النسب

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\ \%$$

٣) معامل الالتواء :
معامل الالتواء الأول :

$$S K_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

معامل الالتواء الثاني :

$$S K_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

القوانين المستخدمة

الباب الخامس
الارتباط والانحدار

١) معامل ارتباط بيرسون (الخطي)
البيانات الغير مبوبة
و البيانات المبوبـــة

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{Sx \cdot Sy}$$

٢) معادلة خط الانحدار

$$Y = b_0 + b_1 X$$

ويمكننا حساب b_1 و b_0 بالمعادلتين التاليتين:

معامل الانحدار ، الميـــل :

$$b_1 = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S^2X}$$

ثابــــت الانحدار ، المقطع :

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

٣) معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) :

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

القوانين المستخدمة

الباب السابع
الأرقام القياسية

١) الرقم القياسي البسيط للأسعار :

$$\text{البسيط} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

٢) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير) :

$$\text{لاسبير} = \frac{\sum P_1 . Q_0}{\sum P_0 . Q_0} \times 100$$

٣) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باتـش) :

$$\text{باتش} = \frac{\sum P_1 . Q_1}{\sum P_0 . Q_1} \times 100$$

٤) الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر) :

$$\text{فيشر} = \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باتش}}$$

القوانين المستخدمة

الاحتمالات

١) توزيع ذات الحدين :

$$P(X) = {}^{n}C_{x}\ .P^{x}\ .q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

خصائص توزيع ذات الحدين:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$\mu = n \times p$ ميو

٢) التباين $\sigma^2 = n\,.\,p\,.\,q$ سيجما تربيع

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{n\,.\,p\,.\,q}$ سيجما

٢) توزيع بواسون :

$$P(x) = \frac{\lambda^{x}\ .\ e^{-\lambda}}{X\,!} \qquad x = 0,1,2,\ldots\infty$$

حيث :

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي $\mu = \lambda$

٢) التباين $\sigma = \lambda^2$

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

٣) التوزيع الطبيعي :

١)عندما لا توجد عينة.

٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

الإجابة **Z**

عادي

- عندما لا توجد عينة.
- أو العينة تكون واحدة فقط.

نستخدم Z عادي

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

سوبر

- عندما يوجد عينة حجمها (n) ، وتكون أكبر من واحد.

نستخدم Z سوبر

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد

الإجابة **ذات الحدين**

عادي

- عندما يكون العدد أقل من 30.

نستخدم ذات الحدين عادي

نسبة مطلوبة p

نسبة غير مطلوبة q

n

$x = 0 , 1 , \ldots\ldots n$

$$p(x) = {}^{n}C_{x} \, . \, P^{x} . \, q^{n-x}$$

متوسط التوزيع :

$$\mu = n \, . \, p$$

التباين :

$$\sigma^2 = n \, . \, p \, . \, q$$

الانحراف :

$$\sigma = \sqrt{n \, . \, p \, . \, q}$$

سوبر

- عندما يكون العدد 30 أو أكثر.

نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

$$\mu = n \, . \, p$$

$$\sigma = \sqrt{n \, . \, p \, . \, q}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

القوانين المستخدمة

مبادئ الاحتمالات

١) قاعدة أو ٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ← اتحاد U

(قاعدة الجمع للحالات المانعة والغير مانعة)

زيد **أو** عبيد

A U B

مانع | غير مانع

عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B
أو
$P(A \cup B) = P(A) + p(B)$

عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B
تقاطع أو
$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$

٢) قاعدة (و) ← تقاطع ∩

قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (**و**) (∩) و **القاعدة الضرب**

مستقلة | غير مستقلة

أولاً : قاعدة الضرب للاحداث المستقلة :

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة :

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول مؤثر يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

و

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

القوانين المستخدمة

العيـنـــات

العينات ، التقدير واختبار الفروض :

لمتوسط (μ) المجتمع العام :

95%

$$\mu = x + \begin{matrix}1.96\\ 2.58\end{matrix} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

99%

أعلى بالجمع ≤ μ ≤ أدنى بالطرح

اختبار الفروض الاحصائية :

$$Z = \frac{r - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

انحراف النسبة في العينة

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

% 95

1.96

$$P = r \pm \begin{matrix}1.96\\ \text{أو}\\ 2.58\end{matrix} \times \sigma r$$

2.58

% 99

الفهـــــــــرس