بداية محاضرة الاسبوع السادس ليوم السبت

الباب الخامس: المعادلات

تعريف: المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع اشارة المساواة، وهذا التعبير له طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما اشارة (=) بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل. وعملية حل المعادلة معناه ايجاد كل القيم (الاعداد) التي تجعل المعادلات صحيحة، ومجموعة هذه الحلول تسمى حل المعادلة.

وبداية سنتعرف على بعض من اشكال المعادلات ومنها:-

١- المعادلات الخطية في مجهول (متغير) واحد س:

الصورة العامة لمعادلة خطية بمتغير واحد هي:-

أ س = جـ ، أ، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر.

مثال:- أوجد قيمة س من المعادلة

٥س - ٢٥ = صفر

الحل: بداية نقوم بنقل العدد الثابت الى الطرف الآخر، ودائماً عند نقل حد ثابت أو متغير من طرف الى آخر نقوم بتغيير اشارته.

٥س = ٢٥

سنتخلص من معامل س لنجعله العدد واحد وذلك عن طريق قسمة حدي المعادلة على ذلك المعامل.

$$\frac{٥س}{٥} = \frac{٢٥}{٥}$$

$\boxed{س = ٥}$ حل المعادلة.

(ملاحظة: دائماً المعادلات من الدرجة الأولى لها حل واحد فقط)

وللتأكد من صحة الحل، نقوم بتعويض الناتج (س = ٥) في المعادلة الأصلية:-

$$٥س - ٢٥ = صفر$$

$$٥ \times ٥ - ٢٥ = صفر$$ (الحل صحيح).

$$صفر = صفر$$

مثال: اوجد حل المعادلة التالية:-

$$٤ - ٢س = صفر$$

الحل: $-٢س = -٤$

$$\frac{-٢س}{-٢} = \frac{-٤}{-٢} \Longleftarrow \boxed{س = ٢}$$

للتأكد من صحة الحل:

$$٤ - ٢(٢) = ٤ - ٤ = صفر$$

بعض من خواص الأعداد الحقيقية المستخدمة في حل المعادلات:

١) إذا كانت ب = جـ فإن:

أ + ب = أ + جـ (ب + ٢ = جـ + ٢)

أ − ب = أ − جـ (٢ − ب = ٢ − جـ)

أ ب = أ جـ (٢ ب = ٢ جـ)

ب / أ = جـ / أ (ب / ٣ = جـ / ٣) .

٢) إذا كانت أ + ب = أ + جـ ⇐ ب = جـ

٣) إذا كانت أ ب = أ جـ ⇐ ب = جـ .

٤) " " ب / أ = جـ / أ ⇐ ب = جـ

٥) " " أ − ب = أ − جـ ⇐ ب = جـ

مثال :- س − ٧ = ١٠ (معادلة خطية) .

لو أردنا أن نجد حل لهذه المعادلة :-

س = ١٠ + ٧ ⇐ $\boxed{\text{س} = ١٧}$

بشكل آخر :-

(س − ٧) + ٧ = (١٠) + ٧

$\boxed{\text{س} = ١٧}$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{1}{2}\text{س} - ٦ = ٢$$
$$+٦ \qquad +٦$$

$$\frac{1}{2}\text{س} = ٢ + ٦ \Leftarrow \frac{1}{2}\text{س} = ٨$$

وللتخلص من معامل س $(\frac{1}{2})$ ، نقوم بضرب كلا الحدين بالعدد ٢ :-

$$٢ \times \frac{1}{2}\text{س} = ٨ \times ٢ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١٦}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$\frac{1}{2}(١٦) - ٦ \overset{?}{=} ٢$$
$$٨ - ٦ = ٢$$
$$٢ = ٢ \checkmark$$

٢- المعادلات الخطية في مجهولين :-

تعريف : المعادلة الخطية في مجهولين س ، ص هي عبارة عن معادلة على الصورة $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص} = \text{جـ}$

حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ ، ب $\neq$ صفر .

نلاحظ أن حل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً (بمعنى أنه سيكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول) .

حيث أنه $\boxed{\text{س} = \frac{\text{جـ} - \text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}}}$ بمعنى أن لكل قيمة للمتغير ص توجد قيمة للمتغير س .

مثال ١ :- اوجد حل المعادلة التالية

$\text{٢س} + \text{٣ص} = \text{١٥}$.

الحل :-

$$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٥} - \text{٣ص}}{\text{٢}}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{١٥} - \text{٣ص}}{\text{٢}}}$$

فنقول عندما $\text{ص} = \text{٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{١٥} - \text{٣}(\text{٢})}{\text{٢}}$

$= \frac{\text{١٥} - \text{٦}}{\text{٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}} = \text{٤,٥}$.

نتأكد من صحة الحل :

نعوض كل من قيمة $\text{س} = \text{٤,٥}$ و $\text{ص} = \text{٢}$ في المعادلة الاصلية :-

$$\text{٢}(\text{٤,٥}) + \text{٣}(\text{٢}) \overset{?}{=} \text{١٥}$$

$$\text{٩} + \text{٦} = \text{١٥}$$

$$\text{١٥} = \text{١٥}$$ ✓ الحل صحيح .

وكذلك عندما $\text{ص} = \text{٣} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{١٥} - (\text{٣} \times \text{٣})}{\text{٢}}$

$= \frac{\text{١٥} - \text{٩}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \text{٣}$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$\text{٢}(\text{٣}) + \text{٣}(\text{٣}) \overset{?}{=} \text{١٥}$$

$$\text{٦} + \text{٩} = \text{١٥}$$

$$\text{١٥} = \text{١٥}$$ ✓ الحل صحيح

مثال :- أوجد حل المعادلة

$\text{٥س} - \text{٤ص} = \text{٢٤}$ عندما $\text{ص} = \text{١}^{-}$ ؟

$\text{ص} = \text{٢}$ ؟

الحل :-

$$\frac{\text{٥س}}{\text{٥}} = \frac{\text{٤ص} + \text{٢٤}}{\text{٥}}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{٤ص} + \text{٢٤}}{\text{٥}}}$$

هذه الصورة العامة للحل .

عندما ص = ١⁻ :

$$\text{س} = \frac{\text{٤}(\text{١}^{-}) + \text{٢٤}}{\text{٥}}$$

$$= \frac{\text{٤}^{-} + \text{٢٤}}{\text{٥}}$$

$$= \frac{\text{٢٠}}{\text{٥}}$$

$$\boxed{\text{س} = \text{٤}}$$

للتأكد :-

$$\text{٥} \times \text{٤} - \text{٤}(\text{١}^{-}) \stackrel{?}{=} \text{٢٤}$$

$$\text{٢٠} + \text{٤} = \text{٢٤} \quad \checkmark$$

عندما ص = ٢ :

$$\text{س} = \frac{\text{٤} \times \text{٢} + \text{٢٤}}{\text{٥}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٨} + \text{٢٤}}{\text{٥}}$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{٣٢}}{\text{٥}}}$$

التأكد من صحة الحل :

$$\text{٥} \times \left(\frac{\text{٣٢}}{\text{٥}}\right) - \text{٤}(\text{٢}) \stackrel{?}{=} \text{٢٤}$$

$$\text{٣٢} - \text{٨} = \text{٢٤} \quad \checkmark$$

الحل صحيح

٣ - معادلات خطية آنية في مجهولين :-

ويأخذ هذا النوع من المعادلات الصورة :

أ١ س + ب١ ص = جـ١

أ٢ س + ب٢ ص = جـ٢

حيث أ١، أ٢، ب١، ب٢، جـ١، جـ٢ ∈ ح .

أ١، ب١ أحدهما على الأقل ≠ صفر .

أ٢، ب٢ " " " ≠ صفر .

وحل هذا النظام الآني من المعادلات هو عبارة عن زوج من الأعداد س، ص يحقق كلا المعادلتين معاً .

في هذا البند، سنوضح طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات :-

١- طريقة الحذف :-

خطوات هذه الطريقة :-

الخطوة الأولى: إذا لم تكن المعاملات المتشابهة لأحد المتغيرين س أو ص متساوية، فنضرب المعادلتين في عدد معين حتى تصبح معاملات أحد المتغيرين متساوية .

الخطوة الثانية: إذا كانت الاشارتين للمعاملين المتساويين غير متشابهتين فنقوم بعملية جمع لكلا المعادلتين، أما إذا كانت متشابهتين فنقوم بعملية الطرح .

الخطوة الثالثة: نجد قيمة أحد المتغيرين ثم نعوض في إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال :- اوجد قيمة س، ص من المعادلتين :-

$$5س + ص = 1$$
$$س - ص = 2$$
$$+ \;\; \overline{}$$
$$6س + صفر = 3$$

$$س = \frac{3}{6} \Leftarrow \boxed{س = \frac{1}{2}}$$

لاحظوا أن معامل ص في كلا المعادلتين متشابه واشاراتهم مختلفة، نقوم بالجمع مباشرة للحصول على ~~[illegible]~~

نقوم بإيجاد قيمة المتغير الآخر الا وهو ص من احد المعادلتين

$$س - ص = 2 \quad \text{وعندنا} \quad س = \frac{1}{2} :-$$

$$\frac{1}{2} - ص = 2 \Leftarrow -ص = 2 - \frac{1}{2}$$

$$-1\times \quad -ص = 1,5 \quad \times -1$$

$$\boxed{ص = -1,5}$$

للتأكد من صحة الحل :-

المعادلة الأولى

$$5\left(\frac{1}{2}\right) + (-1,5) \stackrel{?}{=} 1$$
$$2,5 - 1,5 = 1$$
$$1 = 1 \;\checkmark$$

المعادلة الثانية

$$\frac{1}{2} - (-1,5) \stackrel{?}{=} 2$$
$$\frac{1}{2} + 1,5 = 2$$
$$2 = 2 \;\checkmark$$

بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع السابع

مثال ٢ :- اوجد قيمة س ، ص من :-

$$٣ \times \quad ٥س + ٢ص = ٣ \quad \text{———} \quad (١)$$

$$٢ \times \quad ٢س + ٣ص = ١^- \quad \text{———} \quad (٢)$$

الحل :- نقوم بضرب المعادلة الأولى بالعدد ٣ ، والمعادلة الثانية بالعدد ٢

$$١٥س + ٦ص = ٩$$

$$- \quad ٤س + ٦ص = ٢^-$$

$$\frac{١١س}{١١} = \frac{١١}{١١} \Rightarrow \boxed{س = ١}$$

نعوض قيمة س في المعادلة الأولى : (لإيجاد قيمة المتغير الآخر)

$$٥(١) + ٢ص = ٣$$

$$٥ + ٢ص = ٣ \Rightarrow ٢ص = ٣ - ٥$$

$$\frac{٢ص}{٢} = \frac{٢^-}{٢} \Rightarrow \boxed{ص = ١^-}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$٥(١) + ٢(١^-) \stackrel{?}{=} ٣$$

$$٥ - ٢ = ٣ \quad ✓$$

$$٢(١) + ٣(١^-) \stackrel{?}{=} ١^-$$

$$٢ - ٣ = ١^- \quad ✓$$

٢- طريقة التعويض:

تتلخص هذه الطريقة في إيجاد قيمة أحد المجهولين بدلالة الآخر ومن ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى، نحصل على معادلة بمجهول واحد ومنها نجد قيمته ثم نعوض به في أحد المعادلتين لنحصل على قيمة المجهول الآخر.

مثال: أوجد قيمة س، ص من النظام

٢س − ص = ٤ —— (١)

س + ٢ص = −٣ —— (٢)

الحل: نكتب المتغير س بدلالة ص من المعادلة (٢) لنحصل على

س + ٢ص = −٣ ⇐ **س = −٣ − ٢ص**

الآن، نعوض هذا الناتج في المعادلة (١):

٢س − ص = ٤ —— (١)

٢(−٣ − ٢ص) − ص = ٤

−٦ − ٤ص − ص = ٤

−٦ − ٥ص = ٤

−٥ص = ٤ + ٦ ⇐ ٥ص = ١٠ ⇐ **ص = −٢**

نعوض قيمة ص في المعادلة رقم (١):

٢س + ٢ = ٤ ⇐ ٢س = ٤ + −٢

٢س / ٢ = ٢ / ٢ ⇐ **س = ١**

مثال ٢ :- اوجد قيمة س، ص من المعادلتين

$$٥س + ص = ١ \quad —— (١)$$

$$س - ص = ٢ \quad —— (٢)$$

(والحل من الطريقة السابقة س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = ٣-)

الحل : من المعادلة (٢) يمكن الحصول على قيمة المتغير س بالصورة :-

$$س - ص = ٢ \Leftarrow \boxed{س = ص + ٢}$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على :-

$$٥س + ص = ١$$

$$٥(ص + ٢) + ص = ١$$

$$٥ص + ١٠ + ص = ١$$

$$٦ص = ١ - ١٠ \Leftarrow ٦ص = ٩- \Leftarrow \boxed{ص = \frac{٩-}{٦}}$$

$$ص = \frac{٣-}{٢} \Leftarrow \boxed{ص = ١,٥-}$$

بتعويض قيمة ص = ١,٥- في المعادلة (٢) :-

$$س - (١,٥-) = ٢ \Leftarrow س + ١,٥ = ٢$$

$$س = ٢ - ١,٥$$

$$\boxed{س = \frac{١}{٢}}$$

٤ - معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد :-
يكتب هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية:

$$\text{أ} س^2 + \text{ب} س + \text{جـ} = \text{صفر}$$

حيث أ، ب، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ صفر

بعض الحالات المختلفة من هذه الصيغة :-

أ- في حالة ب = صفر :- (يصبح شكل المعادلة السابقة كالنحو الآتي)

$$\text{أ} س^2 + \text{جـ} = \text{صفر}$$ (تسمى معادلة تربيعية)

وحل هذا النوع من المعادلات يكون في الصورة :-

$$س = \pm\sqrt{\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}}$$ ($\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$: عدد غير سالب)

مثال :- اوجد قيم س من المعادلة

$$س^2 - ٤٩ = \text{صفر}$$

الحل :- $س^2 = ٤٩$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$س = \pm\sqrt{٤٩} = \pm ٧ .$$

$$س^2 + ٤٩ = \text{صفر}$$

$$س^2 = -٤٩ \Leftarrow س = \pm\sqrt{-٤٩}$$ (عدد غير معرّف)

لا يوجد حل .

ب) اذا كانت $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} = \text{صفر}$ ، $\text{أ} \neq \text{صفر}$.

ويتم حل هذا النوع من المعادلات بأخذ س كعامل مشترك لتصبح المعادلة على الصورة :

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{س}(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}) = \text{صفر}$$

فحل هذه المعادلة تكون على النحو الآتي :

$\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ أو $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} = \text{صفر}$

ومنه $\boxed{\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}}$

مثال 1 : حل المعادلة

$$5\,\text{س}^2 + 9\,\text{س} = \text{صفر}$$

الحل :- $\text{س}(5\,\text{س} + 9) = \text{صفر}$

إما $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ وإما $5\,\text{س} + 9 = \text{صفر}$

$$5\,\text{س} = -9$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{-9}{5}}$$

مثال :- حل المعادلة

$$3\,\text{س}^2 - 9\,\text{س} = \text{صفر}$$

اخراج عامل مشترك $3\,\text{س}$

$3\,\text{س}(\text{س} - 3) = \text{صفر} \Leftarrow 3\,\text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{صفر}}$

$\text{س} - 3 = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$

ج) اذا كانت أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر ، أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، جـ ≠ صفر

يمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطريقتين التاليتين :-

١) طريقة التحليل : وتتم من خلال تحليل المعادلة التربيعية الى مقدارين جبريين نستخدم القاعدة التالية :-

قاعدة : حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صفر فهذا يعني أن أحد المقدارين يساوي صفر أو المقدار الآخر يساوي صفر .

مثال ١ :- اوجد قيم س التي تحقق المعادلة

س^{٢} − ٧ س + ١٠ = صفر .

(س − ٢)(س − ٥) = صفر

س − ٢ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$ (حلين للمعادلة التربيعية)

س − ٥ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = ٥}$

مثال ٢ :- اوجد قيم س التي تحقق المعادلة

س^{٢} − ٢ س + ١ = صفر .

(س − ١)(س − ١) = صفر

س − ١ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = ١}$ (لاحظوا أن للمعادلة التربيعية حل واحد فقط)

للتأكد من صحة الحل :-

(١)^{٢} − ٢(١) + ١ =? صفر

١ − ٢ + ١ = صفر

نهاية محاضرة الأسبوع السادس