بداية محاضرة يوم الثلاثاء ٢٠٢٠/٩/٢٩ الحادية عشر

# الباب الثاني: الدوال

مقدمة :-

كثير من التطبيقات في العلوم الطبيعية وعلم الإدارة والاقتصاد والعلوم الاجتماعية تركز على الطريقة التي تعتمد فيها كمية واحدة على كمية اخرى.

فمثلاً :-

$ص = ١٠٠ س + \frac{س^٢}{١٠٠}$ (معادلة تصف ص بدلالة المتغير س)

فلو كانت هذه المعادلة تمثل دخل مصنع من بالدولار والناتج عن تصنيع س من منتج معين، فإنه يمكن ان نجد دخل المصنع عندما ينتج ١٠ وحدات (اي س = ١٠) كالتالي :-

$ص = ١٠٠ س + \frac{س^٢}{١٠٠}$ وعندما س = ١٠ :-

$ص = ١٠ \times ١٠٠ + \frac{(١٠)^٢}{١٠٠} = ١٠٠٠ + \frac{١٠٠}{١٠٠} = ١٠٠١$

$= ١٠٠١$ دولار .

وعندما س = ١٠٠ سلعة، فإن الدخل تساوي :-

$ص = ١٠٠ \times ١٠٠ + \frac{(١٠٠)^٢}{١٠٠}$

$= ١٠٠٠٠ + \frac{١٠٠٠٠}{١٠٠} = ١٠٠ + ١٠٠٠٠$

$= ١٠١٠٠$ دولار .

في المعادلة $ص = ١٠٠ س + \frac{س^٢}{١٠٠}$، نسمي س، ص بالمتغيرات حيث س تسمى المتغير المستقل ونسمي ص بالمتغير التابع.

تعريف: تُعرَّف الدالة د من المجموعة P إلى المجموعة ب على أنها قاعدة أو صيغة تحدد لكل عنصر س عناصر المجموعة P عنصراً وحيداً د(س) من عناصر المجموعة ب، بحيث تسمى المجموعة P بمجال الدالة والمجموعة ب بالمجال المقابل للدالة أو (المجال المقابل) أو (المدى).

سنرمز للدالة بالرمز د(س) = ص، فيمكن كتابة الدالة على الصيغة التالية:-

د(س) : P ⟵ ب

ص ⟸ المجال ⟸ المجال المقابل

* مفهوم المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها الدالة د معرفة وبعبارة أخرى هي قيم المتغير المستقل التي تكون د عندها معرفة.

مثال: لتكن د دالة تعطى بالصيغة د(س) = ٦ + √س والمطلوب إيجاد كل من د(١)، د(-١)، د(صفر)؟

الحل: د(س) = ٦ + √س

د(١) = ٦ + ١ × √١ = ٨.

د(-١) = ٦ + -١ × √١ = ٦ + √١ = ٤.

د(صفر) = ٦ + صفر × √صفر = ٦

مثال: لتكن $ق(س)$ دالة معرفة بالقاعدة $ق(س) = س^2 - 1$، إيجاد قيم $ق(2)$، $ق(-2)$، $ق(1+أ)$ ؟

الحل:- $ق(س) = س^2 - 1$.

① $ق(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

② $ق(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

④ $ق(1+أ) = (1+أ)^2 - 1$

$= 1 + 2أ + أ^2 - 1$

$= 2أ + أ^2$.

* بعض من انواع الدوال :-

1) الدالة الثابتة :

تعريف: الدالة الثابتة تكتب على الصيغة:

$ق(س) = ج$ ، حيث ج: عدد حقيقي (ثابت).

أو على الصورة $ص = ج$.

ويمثل هذه الدالة هو عبارة عن خط مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه بمقدار ذلك الثابت.

مثال: اذا كانت لدينا الدالة

$ق(س) = 3$

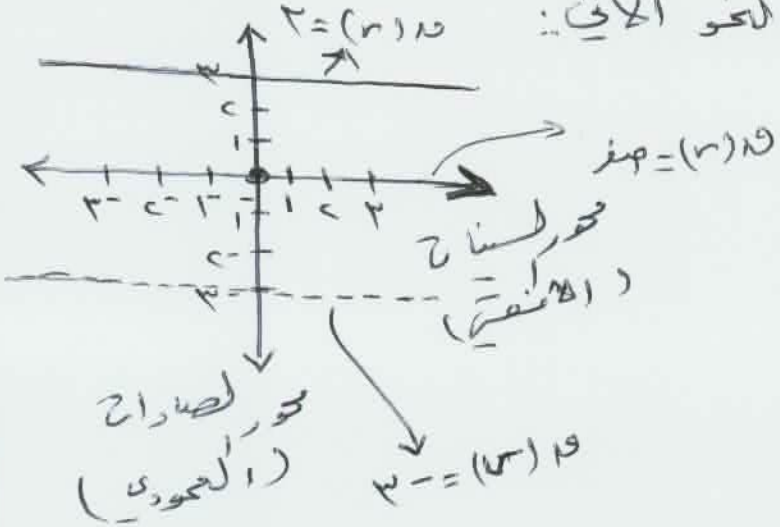
فإن قيمة أي متغير مستقل مهما تأثير هذه القاعدة هو العدد 3.

بحيث أن :-

$ن(صفر) = ٣$

$ن(١٠٠) = ٣$ وهكذا .

ومن هذه النقطة ، نستطيع أن نمثل مخرج الدالة $ن(س) = ٣$ في المستوى البياني في الشكل الآتي:




٢- الدالة الخطية :

تعريف : الصورة العامة للدالة الخطية تكتب في الشكل التالي :-

$ن(س) = أ س + ب$ ، حيث أ، ب : أعداد حقيقية (ثابتة)

$\Updownarrow$

$ص = أ س + ب$

لاحظوا أن س هو المتغير المستقل وص هو المتغير التابع .

وإذا فرضنا أن قيمة $أ = صفر$ فإن الدالة الخطية تصبح دالة ثابتة،

بحيث : $ن(س) = أ س + ب$ وعندما $أ = صفر$

فإن $ن(س) = صفر \times س + ب \Leftarrow ن(س) = ب$ دالة ثابتة .

والميل لبياني للدالة الخطية هو عبارة عن خط مستقيم .

مثال :- إذا كانت ق(س) = ٣س + ٥ .

أوجد ق(١) ، ق(-١) ، ق(صفر) ؟

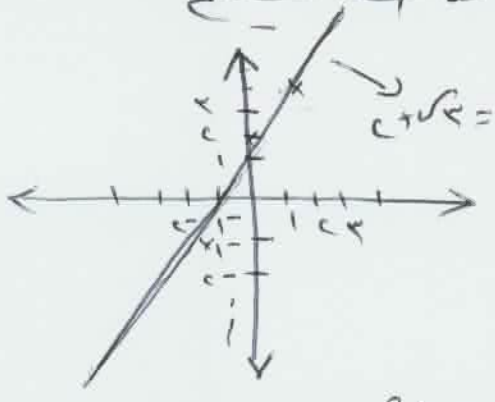
الحل :- ق(س) = ٣س + ٥

ق(١) = ٣×١ + ٥ = ٨ .

ق(-١) = ٣×-١ + ٥ = -٣ + ٥ = ٢

ق(صفر) = ٣×صفر + ٥ = ٥ .

والرسم البياني للمثال في الأعلى هو عبارة عن خط مستقيم
(لكنه لا يوازي محور السينات)




٣- الدالة التربيعية :-

تعريف : الدالة التربيعية تكتب على الصورة العامة التالية :-

ق(س) = أ س^٢ + ب س + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ : أعداد حقيقية (ثابتة)

بشرط أن أ ≠ صفراً .

ملاحظة : إذا كانت أ = صفراً ، فإن ق(س) = ب س + جـ (دالة خطية)

وإذا كانت أ = ب = صفراً ، فإن ق(س) = جـ (دالة ثابتة)

مثال : إذا كانت الدالة $ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ - ٥$ فأوجد

$ق(٢)$ ، $ق(-٢)$ ، $ق(صـ)$ ؟

الحل : $ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ - ٥$ .

$ق(٢) = ٢^٣ + ٢(٢)^٢ - ٥ = ٤ + ٤ - ٥ = ٣$ .

$ق(-٢) = (-٢)^٣ + ٢(-٢)^٢ - ٥ = -٤ - ٤ - ٥ = -٥$ .

$ق(صـ) = صـ^٣ + ٢(صـ)^٢ - ٥ = -٥$ .

٤- دوال كثيرة الحدود :-

تعريف : تكتب الدوال كثيرة الحدود على الصورة :-

$ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_٢ س^٢ + أ_١ س + أ_٠$ .

حيث $ن$ : عدد صحيح غير سالب

$أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، ... ، أ_ن$ : أعداد حقيقية (ثابتة)

مثال : لنفرض أن $ن = ٣$ :

$ق(س) = أ_٣ س^٣ + أ_٢ س^٢ + أ_١ س + أ_٠$ .

دالة من الدرجة الثالثة (تكعيبية)

على فرض أن $أ_٣ = ٢$ ، $أ_٢ = ١$ ، $أ_١ = -٥$ ، $أ_٠ = -٤$

فتصبح الدالة السابقة على الصورة

$ق(س) = ٢س^٣ + س^٢ - ٥س - ٤$ .

(كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية)

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الحادي عشر