٢٠١٢

ملخص مبادئ رياضيات

جامعة الدمام – تعليم عن بعد

مع تحياتي :

☆ لُكبريآئي رِوُآيه

HP
Hewlett-Packard
1/1/2012

الأسبوع	المحتوى الدراسي
الأسبوع الأول	مجموعات الأعداد
الأسبوع الثاني	المفاهيم الأساسية في الجبر
الأسبوع الثالث	العمليات الجبرية
الأسبوع الرابع	تحليل المقادير الجبرية
الأسبوع الخامس	تحليل المقادير الكسرية
الأسبوع السادس	المعادلات
الأسبوع السابع	المعادلات
الأسبوع الثامن	المصفوفات
الأسبوع التاسع	المحددات
الأسبوع العاشر	المتواليات الحسابية والهندسية
الأسبوع الحادي عشر	الدوال
الأسبوع الثاني عشر	الدوال
الأسبوع الثالث عشر	التفاضل
الأسبوع الرابع عشر	مراجعة عامة

الكتاب المقرر: "الرياضيات العامة لطلاب وطالبات كلية الاقتصاد والإدارة"
د. حمزة بن علي أبو جبل، دار الحافظ ، مكتبة المتنبي،٢٠٠٨.

الباب الأول: مجموعات الأعداد

1- مفهوم المجموعة:

- يعتبر مفهوم المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات. والمجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما. تكتب عناصر أي مجموعة داخل قوسين على الشكل التالي {   }، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف العربية س، ص، ع، ...

ومثال على ذلك، يمكن التعبير عن مجموعة الاعداد 1، 2، 3، 4، 5 على النحو الآتي:

س = { 1، 2، 3، 4، 5}

- يمكن التعبير عن عناصر المجموعات بأحد الطريقتين التاليتين:

أ- ذكر العناصر: وهي الطريقة التي يتم فيها سرد جميع عناصر المجموعة بين القوسين {   } كما في المثال السابق.

ب- طريقة الوصف (القانون): وتتم من خلال ذكر الخاصية أو الصفة التي تميز عناصر هذه المجموعة، ففي المثال السابق يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 5 على الصورة التالية:

س = { أ: أ عدد صحيح أكبر من أو يساوي 1 وأقل من أو يساوي 5}

2- مجموعات الأعداد:

سنتعرف في هذا البند على بعض من مجموعات الأعداد الشهيرة ومنها:

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية (الاعداد الموجبة):

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب على النحو الآتي:

ط = {1، 2، 3}

ب – مجموعة الأعداد الصحيحة:

وتكتب على النحو الآتي: صويرمز لها بالرمز

ص ={ ...، -3، -2، -1، 0، 1، 2، 3 ...}

جـ - مجموعة الأعداد النسبية:

حيث ب $\frac{أ}{ب}$ ويرمز لها بالرمز ن وهي جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة

لا تساوي صفر، أ، ب عددان حقيقيان، ومن الأمثلة على ذلك $\frac{1}{3}$ ، $\frac{-1}{5}$.

د – مجموعة الأعداد غير النسبية:

ورمزها نَ وهي جميع الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل عدد نسبي،

ومن الأمثلة عليها $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$.

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية:

ورمزها ح وهي المجموعة التي تحتوي جميع الأعداد في المجموعات سابقة الذكر.

<u>3- القيمة المطلقة:</u>

القيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب تساوي ذلك العدد بعد إزالة إشارة السالب، وبالرموز لو أخذنا القيمة المطلقة للعدد أ، فيمكن كتابته على الصورة | أ| = أ، حيث أ عدد حقيقي.

ومن الأمثلة على ذلك | -1| = 1 ، | 5| = 5 وهكذا.

الباب الأول من المحاضرة السابقة :-

١) مفهوم المجموعة :- س = {١، ٢، ٣، ٤}

(المجموعة س مجموعة مكونة من أربعة عناصر).

٢) مجموعات الأعداد المشهورة :-

أ) الأعداد الطبيعية (الأعداد الموجبة) : ط = {١، ٢، ٣، ---}.

$\Downarrow$

ب) الأعداد الصحيحة : ص = {---، ٢-، ١-، ٠، ١، ٢، ---}

$\Downarrow$

جـ) الأعداد النسبية :- ن = {س : س = $\frac{أ}{ب}$}، ب ≠ صفر

$\Downarrow$

د) الأعداد غير النسبية : ن َ: جميع الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة النسبية.

$\Downarrow$

هـ) الأعداد الحقيقية :- (ح)،

٣) العمليات الجبرية على المجموعات :-

أ) الاتحاد ($\cup$).

ب) التقاطع ($\cap$).

جـ) المتممة (المكملة) : $\overline{س}$.

د) الفرق بين مجموعتين :- س – ص

العمليات الجبرية على المجموعة :-

① عملية الاتحاد :-

تعريف :- إذا كان س، ص أي مجموعتين في ك

فإن س $\cup$ ص (الاتحاد) هي جميع العناصر الموجودة في

س أو موجودة في ص .

يمكننا استخدام طريقة الوصف لكتابة عناصر الاتحاد لأي

مجموعتين على النحو الآتي :-

س $\cup$ ص = { ~~س~~ أ : أ $\in$ س أو أ $\in$ ص } .

مثال :- إذا كانت ك = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ } .

وكانت س = { ٣ ، ٤ } .

ص = { ٤ ، ٥ ، ٧ } .

فإن س $\cup$ ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } .

② عملية التقاطع :-

تعريف :- إذا كان لدينا مجموعتين س، ص في ك فإن

س $\cap$ ص (التقاطع) هي جميع العناصر الموجودة في س و موجودة

في ص

~~مثال~~ بالرموز :- س $\cap$ ص = { أ : أ $\in$ س و أ $\in$ ص } .

وبالاعتماد على المثال السابق، فإن س $\cap$ ص = { ٤ } .

③ المتممة (المكملة) :-

تعريفاً :- إذا كانت لدينا المجموعة الجزئية س في ك ،
فإن متممة س ويرمز لها بالرمز $\overline{\text{س}}$ هي جميع
العناصر التي تنتمي إلى ك ولا تنتمي إلى س
بالصور :-

$$\overline{\text{س}} = \{ \text{أ} : \text{أ} \in \text{ك} \text{ و } \text{أ} \notin \text{س} \} .$$

مثال :-

إذا كانت لدينا المجموعة ك = { السعودية ، مصر ، الاردن ، البحرين }
وكانت س = { السعودية ، البحرين } .
فنقول بأن $\overline{\text{س}}$ = { مصر ، الاردن } .

ونلاحظ دائماً أن :-

- $\text{س} \cup \overline{\text{س}} = \text{ك}$ (عملية اتحاد أي مجموعة مع متممتها تعطينا المجموعة الكلية).
- $\text{س} \cap \overline{\text{س}} = \phi$ (عملية تقاطع أي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الخالية).

④ الفرق بين مجموعتين :-

إذا كانت لدينا مجموعتين س ، ص ، فإن الفرق بينهما هو جميع العناصر
التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص .

بالصور :- $\text{س} - \text{ص} = \{ \text{أ} : \text{أ} \in \text{س} \text{ و } \text{أ} \notin \text{ص} \}$.

٣ إذا كان عنصر في مجموعة، فإننا نستخدم مفهوم الانتماء، وبالرمز :-

اذا كانت

س = { م ، ب ، جـ ، د }.

فنقول بأن العنصر م $\in$ س.

عنصر ، الانتماء ، مجموعة

٤ المجموعة الخالية :-

نقول بأن المجموعة س هي مجموعة خالية إذا لم تحتوي على أي عنصر، ونرمز للمجموعة الخالية بالرمز ϕ أو { }.

٥ المجموعة الكلية :-

وهي المجموعة التي تحوي جميع المجموعات الجزئية قيد الدراسة.

ونرمز للمجموعة الكلية بالرمز ك.

٤

مثال :-

اذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ---، ١٠}.

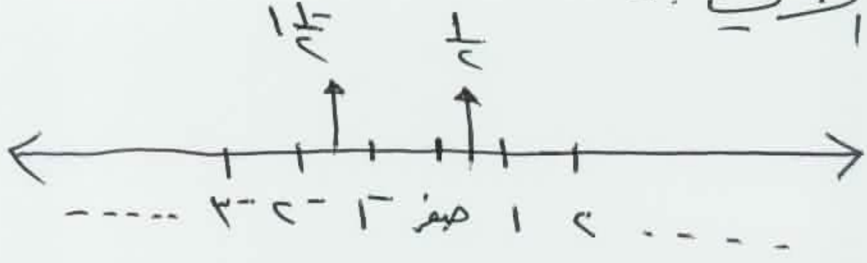
وكانت س = {س : س عدد فردي} = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}

ص = {ص : ص عدد زوجي} = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

نلاحظ أن :- س $\subseteq$ ك ، ص $\subseteq$ ك ، س $\neq$ ص ، س $\not\subset$ ص ، ص $\not\subset$ س

* التمثيل البياني للأعداد الحقيقية :-

- يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية بيانياً باستخدام خط الأعداد على النحو الآتي :-



* بعض المفاهيم الأساسية على المجموعات :-

(١) تساوي مجموعتين إذا تساوت جميع العناصر في كلا المجموعتين :-

مثال :-

أ = {١، ٢، ٣، ٥} .

ب = {٥، ١، ٣، ٢} .

فنقول بأن أ = ب .

(٢) نقول بأن المجموعة س هي عبارة عن مجموعة جزئية من ص إذا كان كل عنصر في س موجودة في ص .

وبالرموز : س ⊆ ص

مثال : إذا كان س = {١، ٢، ٥} .

ص = {١، ٢، ...، ١٠} .

فنقول بأن س ⊆ ص ← الاحتواء

مثال :- إذا كانت

ك = {١، ٢، ....، ١٠}.

وكانت س = {١، ٢، ٥}.

ص = {٥، ٦، ٧، ٨}.

فإن :-

س − ص = {١، ٢}.

س ∪ ص = {١، ٢، ٥، ٦، ٧، ٨}.

س ∩ ص = {٥}.

$\overline{\text{س}}$ = {٣، ٤، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}.

$\overline{\text{ص}}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٩، ١٠}.

$\overline{\text{ك}} = \phi$.

$\overline{\phi}$ = ك.

نهاية الجزء الأول من محاضرة الأسبوع الأول

طباعة مبادئ الإحصاء .

الباب الثاني :- المفاهيم الأساسية في الجبر .

في العادة، يوجد لدينا أربع عمليات أساسية في الجبر وهي

① الجمع ، ② الطرح ، ③ الضرب ، ④ القسمة .

أولاً :- سنتعرف على كيفية إجراء العمليات الجبرية الأربع في الأعداد الحقيقية :-

① مثال : اذا كان لدينا العددين ٣ ، −٥

فإننا نجري عملية الجمع في النحو الآتي :-

٣ + (−٥) = −٢ (اذا كانت الإشارات مختلفة في عملية الجمع فإننا نأخذ الفرق بينهما مع وضع إشارة العدد الأكبر).

وكذلك نقول بأن :-

−٣ + ٥ = ٢ .

أما اذا كان لدينا العددين −٣ ، −٥

فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

−٣ + −٥ = −٨ (اذا كانت الإشارات متشابهة لكلا العددين، فإننا نجمع العددين مع وضع الإشارة نفسها) .

وكذلك نقول بأن :-

٣ + ٥ = ٨ ،

٢) عملية الطرح :-

يمكن النظر الى عملية الطرح بأنها تفسير لعملية الجمع وبذلك يمكن تطبيق القواعد السابقة على عملية الطرح .

مثال :- إذا أردنا أن نجد الفرق بين العددين ٢ ، ٥ فنقول بأن :-

$$٢ - ٥ = ٢ + (-٥) = -٣$$

وكذلك

$$-٣ - ٥ = -٣ + (-٥) = -٨ .$$

وكذلك

$$-٤ - ٩ = -٤ + (-٩) = -١٢ .$$

وكذلك

$$-٣ - (-٢) = -٣ + (+٢) = -١$$

* يمكن استنتاج أن عملية الجمع والطرح هي عملية واحدة تسمى عملية الجمع الجبري .

③ عملية الضرب :-

مثال :- اذا كان لدينا العددين -٣ ، ٥

فإن حاصل ضربهما هو $-٣ \times ٥ = -١٥$

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين مختلفين في الاشارة ، فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع اشارة العدد سالبة)

وكذلك $٣ \times -٥ = -١٥$.

أما اذا كان لدينا العددين ٢ ، ٥ أو -٢ ، -٥

فإن حاصل الضرب هو :-

$$٢ \times ٥ = ١٠$$

$$-٢ \times -٥ = ١٠$$

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين متشابهين في الاشارة فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع اشارة الموجب)

④ عملية القسمة :-

اذا أردنا تقسيم العددين ١٥ ، ٣ فإنه يمكن كتابة الناتج في الصورة التالية :-

تحويل القسمة الى ضرب

$$١٥ \div ٣ = \frac{١٥}{١} \times \frac{١}{٣} = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

مقلوب

(نلاحظ أنه يمكن تحويل عملية القسمة الى عملية ضرب بعد أخذ مقلوب العدد الثاني)

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية :-

أ) $-٢٠ \div ٤ = -٢٠ \times \frac{١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$

ب) $٢٠ \div -٤ = ٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$.

ج) $-٢٠ \div -٤ = -٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$.

النتيجة :- نلاحظ أن عملية الضرب والقسمة هي عملية واحدة (بحيث نحول عملية القسمة الى ضرب مع تطبيق قواعد الضرب عليها).

- بعض الملاحظات على الأولويات عند ايجاد ناتج مقدار عددي :

اذا اردنا ان نجد ناتج المقادير التالية :-

أ) $-٢ + ٥ \times -٣ = -٢ + (-١٥) = -١٧$

ب) $(-٢ + ٥) \times -٣ = (٣) \times -٣ = -٩$

ج) $١٠ \div ٢ - ٥ = ٥ - ٥ =$ صفر .

د) $٣ \times -٣ + ٢ \div (١ - ٥) = ٣ \times -٣ + ٢ \div (-٤)$

$= -٩ + \frac{-٢}{٤}$

$= \frac{-٩ \times ٢}{١ \times ٢} + \frac{-١ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{-١٨}{٢} + \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-١٩}{٢}$.

الاستنتاج :-

وإنما الأولوية للعمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية على النحو الآتي :-

١) في حال وجود الأقواس ، فإننا نجري العمليات داخل هذه الأقواس .

٢) تكون الأولوية لعمليتي الضرب والقسمة .

٣) آخر الأولويات تكون لعمليتي الجمع والطرح .

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :-

١) $-٩ \div ٣ \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

الأولوية

٢) $(-٩ \div ٣) \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

٣) $(-٩ - ٣) + ٢ \times ٣ = (-٩ + -٣) + ٦$

$= -١٢ + ٦$

$= -٦$

- ملاحظة :-

١) عند ضرب عددين كسريين فإننا نضرب البسط مع البسط والمقام في المقام .

مثال :- $\frac{١}{٥} \times \frac{-٣}{٤} = \frac{-٣}{٢٠}$

٢) في حالة الجمع ، فإنه لابد من توحيد المقامات قبل إجراء عملية الجمع :-

مثال :- $\frac{١ \times ٤}{٥ \times ٤} + \frac{-٣ \times ٥}{٤ \times ٥} = \frac{٤}{٢٠} + \frac{-١٥}{٢٠} = \frac{-١١}{٢٠}$

(بداية محاضرة الأسبوع الثاني)

مثال: إذا أردنا أن نجد ناتج المقدار التالي:

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{2\times1}{2\times5} + \frac{1\times5}{2\times5}$$

$$\frac{7}{10} =$$

$$\frac{4}{14} = \frac{2}{14} - \frac{6}{14} = \frac{1\times2}{1\times14} - \frac{3\times2}{7\times2}$$

إذاً النتيجة في حالة جمع وطرح الأعداد الكسرية، لابد من عملية توحيد المقامات أولاً باستخدام المضاعف المشترك الأصغر، وبعدها نقوم بجمع أو طرح البسط مع البسط محتوياً على المقام نفسه.

مثال: لو أردنا أن نجد قيمة المقدار التالي:

(الضرب للبسط في البسط واختصارها المقام في المقام)

$$\frac{1}{6} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{36}_{\,6}} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{4}$$

لو أخذنا المثال السابق وأجرينا عليه عملية القسمة

$$\frac{27}{8} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{9} \div \frac{3}{4}$$

(لابد من تحويل إشارة القسمة إلى ضرب مع أخذ مقلوب الكسر الثاني)

خصائص الأعداد الحقيقية :-

اذا كان لدينا س، ص، ع ∈ ح فإن هذه الأعداد تحقق الخواص التالية :-

١) الخاصية التبديلية :-

عملية الجمع:

س + ص = ص + س .

مثال : ٣ + ٥ = ٥ + ٣ = ٨ .

-٣ + ٥ = ٥ + -٣ = ٢ .

٢) الخاصية التجميعية :-

(س + ص) + ع = س + (ص + ع)

مثال :-

على عملية الجمع:

(١٣ + -٥) + ٢ = ١٣ + (-٥ + ٢)

٨ + ٢ = ١٣ + (-٣)

١٠ = ١٠

على عملية الضرب:

(٤ × ٥) × ٢ = ٤ × (٥ × ٢)

٢٠ × ٢ = ٤ × (١٠)

٤٠ = ٤٠

(س ص) ع = س (ص ع) .

٣) خاصية التوزيع: (توزيع الضرب على الجمع)

س (ص + ع) = س ص + س ع .

مثال:

-٣ (٥ + ٢) = (-٣ × ٥) + (-٣ × ٢)

= -١٥ + -٦

= -٢١ .

٤) خاصية الاختصار (الحذف):

س + ص = س + ع ⟸ ص = ع

مثال: ٣ + -٥ = ٣ + ع ⟸ $\boxed{\text{ع} = -٥}$

س ص = س ع ⟸ ص = ع .

مثال: ٣ × ٩ = ٣ × ص ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٩}$

٥) خاصية النظير:

أ) نظير الجمع:

س + (-س) = (-س) + س = صفر .

مثال: ١٠ + -١٠ = -١٠ + ١٠ = صفر .

ب) نظير الضرب :-

$س \times \frac{1}{س} = \frac{1}{س} \times س = 1$ بشرط أن $س \neq$ صفر

$\frac{1}{س}$:- النظير الضربي للمتغير س . (مقلوب المتغير س)

مثال :- $-3 \times \frac{1}{-3} = 1$

6) خاصية العوامل :-

إذا كان س ص = صفر $\Longleftrightarrow$ س = صفر أو ص = صفر

مثال :- ٥ س = صفر $\Leftarrow$ ٥ $\neq$ صفر أو
س = صفر

وكذلك
-3 س ص = صفر $\Leftarrow$ $\frac{-3}{-3}$ س ص = $\frac{\text{صفر}}{-3}$ $\Leftarrow$ س = صفر
أو
ص = صفر

- سندرس أيضاً بعض من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات ومنها :-

1) الأسس والجذور .
2) اللوغاريتمات .
3) كثيرات الحدود .

بداية سنبدأ في مفهوم الأسس :-

الأسس :-

تعريف :- اذا كان م عدداً موجباً وكان س ، ص عددين حقيقيين ، فيمكن تعريف القواعد التالية في الأسس :-

1) $س^م = \underbrace{س \times س \times \dots \times س}_{\text{م - من المرات}}$ (م من المرات)

مثال :- $س^3 = س \times س \times س$.

حالة خاصة :- $س^{صفر} = 1$ ، $س \neq صفر$

$\boxed{٣}$ $\text{س}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$ ، س $\neq$ صفر .

مثال :- $(٥)^{-٣} = \frac{١}{٥^{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$.

مثال :- $\frac{١}{٢^{-٣}} = ٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$.

$\boxed{٤}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-\text{م}} = \left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\text{م}}$ ، س $\neq$ صفر ، ص $\neq$ صفر

مثال :- $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$.

مفهوم الأس :-

إذا كان س عدد حقيقي ، وكانت ن عدد صحيح فإن

$$س^{م} = س \times س \times س \; ---- \times س \quad \text{(م من المرات)}$$

$$س^{صفر} = 1$$

$$س^{-م} = \frac{1}{س^{م}} .$$

$$\left(\frac{س}{ص}\right)^{-م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{م} .$$

خواص الأس :-

إذا كانت س، ص $\in$ ح ، وكان م، ن $\in$ ص فإن

أ) $\underbrace{س}_{\text{الأساس}}^{\overbrace{م}^{\text{الأس}}} \times س^{ن} = س^{م+ن}$.

مثال :-

$$س^{٣} \times س^{٥} = س^{٨} .$$

$$س^{-٣} \times س^{-٥} = س^{-٨} = \frac{1}{س^{٨}} .$$

$$س^{٣} \times ص^{٤} \quad \text{(الناتج هو في أبسط صورة)}$$

$$س^{٣} \times ص^{٤} \neq (س ص)^{٧}$$

٢) $\frac{\text{س}^{م}}{\text{س}^{ن}} = \text{س}^{م-ن}$ ، حيث س $\neq$ صفر .

مثال :- $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٥}} = \text{س}^{٣-٥} = \text{س}^{-٢} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$.

إعادة كتابة المقدار ٢ بالصورة التالية :-

$$\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٥}} = \frac{\cancel{\text{س}} \times \cancel{\text{س}} \times \cancel{\text{س}}}{\text{س} \times \text{س} \times \cancel{\text{س}} \times \cancel{\text{س}} \times \cancel{\text{س}}} = \frac{١}{\text{س} \times \text{س}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}} .$$

مثال :- ١) $\frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{٥}} = \text{س}^{-٣-٥} = \text{س}^{-٨} = \frac{١}{\text{س}^{٨}}$.

$$\frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{٥}} = \frac{١}{\text{س}^{٥}\,\text{س}^{٣}} = \frac{١}{\text{س}^{٨}} .$$

٢) $\frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٥}}$

$$\frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٥}} = \text{س}^{-٣-(-٥)} = \text{س}^{\cancel{-٣}+٥} = \text{س}^{٢} .$$

أو أستطيع حلها بطريقة أخرى :-

$$\frac{\text{س}^{-٣}}{\text{س}^{-٥}} = \frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{٥-٣} = \text{س}^{٢} .$$

$\boxed{3}$ $(س^{م})^{ن} = س^{م ن}$.

مثال :- $(س^{3})^{-2} = س^{-6} = \frac{1}{س^{6}}$ ⇐ ابسط صورة

$(س^{\frac{1}{5}})^{10} = س^{10 \times \frac{1}{5}} = س^{\frac{10}{5}} = س^{2}$.

$\boxed{4}$ $(س ص)^{م} = س^{م} ص^{م}$.

مثال :- $(5ص)^{2} = 5^{2} \times ص^{2}$
$= 25 ص^{2}$.

مثال :- اذا اردنا ان نكتب المقدار التالي بابسط صورة

$(4س ص)^{-2} = \frac{1}{(4س ص)^{2}} = \frac{1}{16 س^{2} ص^{2}}$.

$\boxed{5}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)^{م} = \frac{س^{م}}{ص^{م}}$ ، ص ≠ صفر .

مثال : $\left(\frac{25}{16}\right)^{2} = \frac{(25)^{2}}{(16)^{2}} = \frac{625}{264}$ ،

: $\left(\frac{3س^{-2}}{5ص^{3}}\right)^{-3} = \left(\frac{5ص^{3}}{3س^{-2}}\right)^{3} = (5ص^{3} \times 3 س^{2})^{3}$
$= (15 س^{2} ص^{3})^{3}$

$$(15\,س^{2}\,ص^{3})^{3} = (15)^{3}\,س^{6}\,ص^{9}.$$

مثال :- اوجد المقدار التالي بابسط صورة :-

$$\left(\frac{س^{-2}\,ص^{-3}}{2\,ع^{4}}\right)^{3} = \frac{س^{-6}\,ص^{-9}}{2^{3}\,ع^{12}}$$

$$= \frac{1}{8\,س^{6}\,ص^{9}\,ع^{12}}.$$

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثاني

* الجذور :-

تعريف : اذا كان $ن$ ، $س$ ، $ص \in ح$ فان العدد $س$ يسمى الجذر النوني للعدد $ص$ إذا كان :

$س^{ن} = ص$ حيث $ن$: عدد صحيح .

مثال : نقول بان العدد ٥ هو الجذر التربيعي للعدد ٢٥

حيث $٥^{٢} = ٢٥$

وكذلك نقول بان العدد ٣ هو الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

حيث $٣^{٣} = ٢٧$

نلاحظ أنه في نظام الاعداد الحقيقية ما يلي :-

١) كل عدد موجب له جذران تربيعيان ، احدهما موجب والآخر سالب .

مثال :- $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$.

٢) اذا كان العدد سالباً ، فليس له جذر تربيعي .

مثال :- $\sqrt{-٢٥}$ (ليس له جذور حقيقية) .

٣) اذا كان العدد سالباً ، فإن له جذر تكعيبي واحد فقط واشارته سالبة .

مثال :- $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ $\quad (-٢٧ = -٣ \times -٣ \times -٣)$

تعريف :- اذا كانت $n \geq 2$ ، حيث n عدد صحيح فان

$\text{س}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\text{س}}$ (يسمى الجذر النوني للعدد س)

$\text{س} \in \text{ح}$.

الأس الكسري .

مثال :- يمكن كتابة كل من المقادير التالية على الصورة كما هو موضح في الاسفل :

1) $(16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4$.

2) $(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$.

قواعد خاصة بالأسس الكسرية :

اذا كانت $\text{س}، \text{ص} \in \text{ح}$ ؛ س، ص اعداد موجبة، ونفرض أن n، m اعداد صحيحة فإن :

$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{\text{س}^{n}} = \text{س}^{\frac{n}{n}} = \text{س}$.

$\boxed{2}$ $\sqrt[n]{\text{س}^{m}} = \text{س}^{\frac{m}{n}}$.

$\boxed{3}$ $\sqrt[n]{\text{س}\,\text{ص}} = \sqrt[n]{\text{س}} \times \sqrt[n]{\text{ص}} = \text{س}^{\frac{1}{n}}\,\text{ص}^{\frac{1}{n}}$.

$\boxed{4}$ $\sqrt[n]{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} = \frac{\sqrt[n]{\text{س}}}{\sqrt[n]{\text{ص}}} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{n}}}{\text{ص}^{\frac{1}{n}}}$ ، $\text{ص} \neq$ صفر .

مثال :- اكتب المقادير التالية بالصورة الجذرية أو الصورة الأسية بأبسط صورة :-

١) $\sqrt[5]{س^5} = س^{\frac{5}{5}} = س$

٢) $\sqrt[4]{س^2} = س^{\frac{2}{4}} = س^{\frac{1}{2}} \longleftarrow \sqrt{س}$

٣) $\sqrt[3]{س ص} = \sqrt[3]{س}\,\sqrt[3]{ص} = س^{\frac{1}{3}} ص^{\frac{1}{3}}$

٤) $\sqrt{\frac{25}{س^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{س^2}} = \frac{\pm 5}{س}$ $\left(\sqrt{س^2} = (س^2)^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{2}{2}} = س^1 = س\right)$

٥) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}س^3} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \times \sqrt[3]{س^3}$

$= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} \times \sqrt[3]{س^3}$

$= \frac{2}{3} \times س^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}س$

---

٤) اللوغاريتمات :-

نشأت فكرة مفهوم اللوغاريتمات عند محاولة إيجاد حل للمعادلة $س = ص^م$ بالنسبة للمجهول م

~~ملاحظة~~ فإذا كان كل من س، ص عددين موجبين، بحيث $ص \neq 1$، فإنه يوجد عدد حقيقي م بحيث $ص^م = س$ ويسمى العدد م لوغاريتم العدد س للأساس ص ويكتب بالصورة التالية:

$\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \text{م}$.

وباختصار شديد، يمكن كتابة العلاقتين المتعادلتين السابقتين كما يلي :-

$$\text{ص}^{\text{م}} = \text{س} \iff \text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \text{م}$$

، ص > صفر
ص ≠ 1
س > صفر

الأمثلة

$\boxed{1}$ اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية :-

أ) $\text{لو}_{10}\ 1000 = 3 \Leftarrow 10^{3} = 1000$

ب) $\text{لو}_{3}\ 9 = 2 \Leftarrow 3^{2} = 9$

ج) $\text{لو}_{25}\ 5 = \frac{1}{2} \Leftarrow (25)^{\frac{1}{2}} = 5$

$\sqrt{25} = 5$

$\boxed{2}$ حول المقادير التالية الى الصورة اللوغاريتمية :

أ) $(81)^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftarrow \text{لو}_{81}\ 9 = \frac{1}{2}$

ب) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{1}{8} \Leftarrow \text{لو}_{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{8} = 2$

ج) $(5)^{3} = 125 \Leftarrow \text{لو}_{5}\ 125 = 3$

٣ اذا كان لدينا المقدار

$$لو_{١٠} ١٠٠٠ = م$$

والمطلوب هو ايجاد قيمة م ؟

الحل :- $لو_{١٠} ١٠٠٠ = م \Leftarrow (١٠)^{م} = ١٠٠٠$

$$\Leftarrow (١٠)^{م} = ١٠^{٣}$$

$$\Leftarrow \boxed{م = ٣}$$

٤ اذا كان لدينا المقدار

$$لو_{٩} س = ٢$$

والمطلوب هو ايجاد قيمة المتغير س ؟

الحل : $لو_{٩} س = ٢ \Leftarrow س = ٩^{٢} \Leftarrow \boxed{س = ٨١}$

٥ اذا كان لدينا المقدار

$$لو_{ص} ٢٧ = ٣$$

والمطلوب هو ايجاد قيمة ص ؟

الحل :- $لو_{ص} ٢٧ = ٣ \Leftarrow ص^{٣} = ٢٧^{١}$

$$\Leftarrow ص^{٣} = (٣)^{٣}$$

$$\Leftarrow \boxed{ص = ٣}$$

بشكل عام، يوجد أساسان لهما أهمية كبرى في التطبيقات:

1) الأساس ١٠ (اللوغاريتم العادي أو العشري)

وهذا النوع من الأساس لا يكتب أسفل اللوغاريتم.

مثال: لو ١٠٠ = ٢ ⇐ لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢ ⇐ ١٠^{٢} = ١٠٠ (log)

2) الأساس للعدد e = هـ = ٢,٧١٨ (هـ: عدد ثابت)

ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي. ($\ln$)

- خواص اللوغاريتمات:

1) لو$_{م}$ ١ = صفر (م عدد حقيقي)،

لو$_{١٠٠}$ ١ = صفر، لو$_{هـ}$ ١ = صفر.

2) لو$_{م}$ م = ١

لو$_{١٠٠}$ ١٠٠ = ١، لو$_{هـ}$ هـ = ١.

3) لو$_{م}$ ن^{س} = س لو$_{م}$ ن.

مثال: أوجد ناتج المقدار التالي بأبسط صورة

لو$_{٥}$ ٥^{س} = س لو$_{٥}$ ٥ = س × ١ = س

مثال :

لو ١٠٠٠

ان نكتب المقدار لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = لو$_{١٠}$ ١٠^{٣} = ٣ لو$_{١٠}$ ١٠ = ٣ × ١ = ٣

٤) لو$_{م}$ (س ص) = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص .

مثال :- نجد قيمة المقدار لو ٥٠ بأبسط صورة ؟

الحل :- لو ٥٠ = لو (١٠ × ٥)

= لو$_{١٠}$ ١٠ + لو$_{١٠}$ ٥ = ١ + لو$_{١٠}$ ٥ .

٥) لو$_{م}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص .

مثال :- اكتب المقدار التالي بأبسط صورة :-

لو $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ ؟

الحل : لو $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ = لو ١٠٠ − لو ٢٠٠

= لو ١٠^{٢} − لو (٢ × ١٠٠)

= ٢ لو ١٠ − (لو ٢ + لو ١٠٠)

= ٢ × ١ − لو ٢ − لو ١٠^{٢}

= ٢ × ١ − لو ٢ − ٢ لو ١٠

= ٢ − لو ٢ − ٢ × ١

= $\cancel{٢}$ − لو ٢ − $\cancel{٢}$ = − لو ٢ .

مثال :- $\log_{10}(\text{س ص})^2$ اكتب هذا المقدار بأبسط صورة ؟

الحل :- $\log_{10}(\text{س ص})^2 = 2\log_{10}(\text{س ص})$

$= 2(\log_{10}\text{س} + \log_{10}\text{ص})$

$= 2\log\text{س} + 2\log\text{ص}$.

فلو فرضنا أنه قيم

س = 10 ، ص = 10 فيصبح المقدار على النحو الآتي :

$2\log\text{س} + 2\log\text{ص} = 2\log 10 + 2\log 10$

$= 2\times 1 + 2\log 10^2$

$= 2 + 4\log 10 = 2 + 4\times 1$

$= 6$ #.

$\boxed{6}$ $\log_{\text{م}}\frac{1}{\text{س}} = \log_{\text{م}}\text{س}^{-1} = -\log_{\text{م}}\text{س}$ ،

بمعنى $\log_{\text{م}}\frac{1}{\text{س}} = -\log_{\text{م}}\text{س}$.

مثال :- $\log_5\frac{1}{5} = -\log_5 5 = -1$ ،

مثال : $\log\frac{1}{1000} = \log 1000^{-1} = -\log 1000 = -\log 10^3$

$= -3\log 10$

$= -3\times 1 = -3$

٧) $\text{لو}_{\text{م}} \sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \text{لو}_{\text{م}} \text{س}^{\frac{1}{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ن}} \text{لو}_{\text{م}} \text{س}$ $(\text{ن} \geq ٢)$.

مثال :- $\text{لو}_{٣} \sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٢٧^{\frac{1}{٣}} = \frac{1}{٣} \text{لو}_{٣} ٢٧$

$= \frac{1}{٣} \text{لو}_{٣} ٣^{٣}$

$= \frac{1}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} \times \text{لو}_{٣} ٣$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$.

$\Downarrow$

$\text{لو}_{٣} \sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٣$

$= 1$ #

ج) كثيرات الحدود :

تعريف : ان كثيرة الحدود في متغير واحد هي عبارة عن تعبير جبري يكتب على الصورة التالية :-

$$\text{أ}_{\text{ن}} \text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{\text{ن}-1} \text{س}^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{أ}_{1} \text{س} + \text{أ}_{\text{صفر}}$$

حيث $\text{ن} \geq$ صفر وعدد صحيح

$\text{أ}_{\text{ن}} ، \text{أ}_{\text{ن}-1} ، \cdots ، \text{أ}_{1} ، \text{أ}_{0}$ اعداد حقيقية .

الامثلة :-

$\text{س}^{٥} - \text{ص}^{٣}$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

$٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}^{٤}$ (كثيرة حدود من الدرجة الرابعة)

$\text{س}^{٣} - \text{س}^{\text{صفر}} = \text{س}^{٣} - 1$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$\text{س}^{\text{صفر}} = 1$ (كثيرة حدود من الدرجة الصفرية عدد ثابت)

نهاية المحاضرة اليوم الثلاثاء من الاسبوع الثاني

بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الثالث

المقادير الجبرية والعمليات عليها :-

تعريف : المقدار الجبري هو عبارة عن أي تركيب من الرموز والأعداد المرتبطة فيما بينها عن طريق العمليات الجبرية الأساسية (الجمع ، الطرح ، الضرب ، القسمة) .

مثال : كل من المقادير التالية تمثل مقداراً جبرياً حيث :-

٢أ + ٥ب (يتكون من حدين)

٣س − ص (يتكون من حدين)

(س² − ص²) ع (يتكون من حدين)

= س²ع − ص²ع .

تعريف : أي مقدار جبري مكون من عدة أجزاء مفصولة بإشارة الجمع أو الطرح يسمى مجموعاً جبرياً ويعتبر كل جزء منفصل حداً في المجموع .

مثال :- ٣ (س² − ٢س + ٥) (مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود) .

[illegible]

* العمليات الجبرية على المقادير الجبرية :-

$\boxed{1}$ الجمع والطرح :

لجمع او طرح مقادير جبرية (كثيرات الحدود) ، فإننا نجمع المعاملات العددية للمتغيرات بعد ترتيب متغيرات كل مقدار وذلك باستخدام الطريقة الأفقية أو الرأسية (العمودية)

مثال :- اوجد ناتج جمع المقدارين

(٣س^{٢} − ٢س + ٥) + (س^{٢} + ٤س − ٩)

- الطريقة الأفقية :-

(٣س^{٢} − ٢س + ٥) + (س^{٢} + ٤س − ٩) = ٤س^{٢} + ٢س − ٤

- الطريقة العمودية :-

٣س^{٢} − ٢س + ٥
+ س^{٢} + ٤س − ٩
٤س^{٢} + ٢س − ٤

مثال :- اوجد ناتج ما يلي :

$(٣س^٢ - ٤سص + ص^٢ + ٢س) - (٥س^٢ - ٤سص + ص^٢)$

بالطريقة الأفقية :-

$(٣س^٢ - ٤سص + ص^٢ + ٢س) - (٥س^٢ - ٤سص + ص^٢)$

$= -٢س^٢ + صفر + صفر + ٢س = -٢س^٢ + ٢س$.

تغيير اشارة السالب الى موجب بالطريقة الافقية :-

$(٣س^٢ - \cancel{٤سص} + \cancel{ص^٢} + ٢س) + (-٥س^٢ + \cancel{٤سص} - \cancel{ص^٢})$

$= -٢س^٢ + ٢س$.

الطريقة العمودية :-

$$
\begin{array}{r}
٣س^٢ - ٤سص + ص^٢ + ٢س \\
\mp ٥س^٢ \pm ٤سص \mp ص^٢ \\
\hline
-٢س^٢ + صفر + صفر + ٢س \Longrightarrow -٢س^٢ + ٢س
\end{array}
$$

مثال :- اوجد ناتج طرح المقدارين

$$(-٣س^{٣} + ٥س^{٤} + ٢س\,ص + ع) - (س^{٥} + ٣س^{٢} - س^{٣})$$

الحل: $٥س^{٤} - ٣س^{٣} + ٢س\,ص + ع$

$$\pm س^{٥} + صفر \mp س^{٣} + صفر + صفر + صفر \mp ٣س^{٢}$$

$$-س^{٥} + ٥س^{٤} - ٢س^{٣} + ٢س\,ص + ع - ٣س^{٢} .$$

* * * * * * *

ج) حاصل ضرب كثيرات الحدود (المقادير الجبرية):

لإيجاد حاصل ضرب كثيرات حدود فإننا نستخدم قوانين التوزيع وقوانين الأسس مع قاعدة الإشارات ثم نجمع الحدود المتشابهة .

مثال: أن نجد ناتج عملية ضرب المقدارين

$$(٢س^{٢} - ٣)(٣س^{٢} - ٢س + ٤)$$

الحل باستخدام الطريقة الأفقية :

$$= ٢س^{٢}(٣س^{٢} - ٢س + ٤) + -٣(٣س^{٢} - ٢س + ٤)$$

$$= ٦س^{٤} - ٤س^{٣} + ٨س^{٢} - ٩س^{٢} + ٦س - ١٢$$

$$= ٦س^{٤} - ٤س^{٣} - س^{٢} + ٦س - ١٢ .$$

الحل باستخدام الطريقة العمودية :

$$٣س^{٢} - ٢س + ٤$$
$$\times \quad ٢س^{٢} - ٣$$

$$٦س^{٤} - ٤س^{٣} + ٨س^{٢}$$
$$+ \quad -٩س^{٢} + ٦س - ١٢$$

$$٦س^{٤} - ٤س^{٣} - س^{٢} + ٦س - ١٢$$

في المثال السابق فإننا قد اتبعنا الخطوات التالية لإيجاد ناتج ضرب مقدارين جبريين :-

١ قمنا بترتيب كل حد في صف بأكبر أس للمتغير .

٢ نقوم بضرب كل حد في المقدار الثاني بجميع حدود المقدار الأول .

٣ نقوم بعملية تجميع لمعاملات الحدود المتشابهة .

مثال :- اوجد ناتج المقدار التالي

$(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٥س + ٥)$ بأبسط صورة .

الحل : $(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٥س + ٥) = (س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٥س + ٥)$

$$= س^{٣}(س^{٢} - ٥س + ٥) - ١(س^{٢} - ٥س + ٥)$$

$$= س^{٥} - ٥س^{٤} + ٥س^{٣} - س^{٢} + ٥س - ٥ \quad \cancel{= ٥ - ٥س + س^{٢} - ٥س^{٣} + ٥س^{٤} - س^{٥}}$$

٣) قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-

(سنستخدم قوانين الأسس ، قوانين الكسور ، قواعد الإشارات) .

١- قسمة حد على حد :-

$$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن} \quad ، \quad س \neq صفر .$$

مثال :- بسط المقادير التالية

أ) $\frac{25 س^{3}}{-5 س} = \frac{25}{-5} س^{3-1} = -5 س^{2}$.

يمكن كتابتها بالصورة التالية

$$\frac{25 س^{3}}{-5 س} = \frac{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{س} \times س \times س}{-\cancel{5} \times \cancel{س}} = -5 س^{2} .$$

ب) $\frac{24 س^{5} ص^{2}}{3 س^{3} ص^{-2}} = 8 س^{2} ص^{2+2}$ $(8 س^{2} ص^{2} ص^{2})$

$= 8 س^{2} ص^{4}$.

ج) $\frac{8 س^{3} ص^{5} ع^{-3} هـ^{2}}{2 س^{-1} ص^{2} ع هـ^{-2}} = \frac{8}{2} \times س^{3} س^{1} \times \frac{ص^{5}}{ص^{2}} \times \frac{1}{ع^{3} ع} \times هـ^{2} هـ^{2}$

$= \frac{4 س^{4} ص^{3} هـ^{4}}{ع^{4}}$.

نهاية محاضرة يوم ~~الثلاثاء~~ السبت من الأسبوع الثالث

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الاسبوع الثالث

٣ قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-

١) قسمة مقدار جبري مكون من حد واحد على مقدار جبري آخر أيضاً مكون من حد واحد :-

$$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن} \quad ، \quad س \neq صفر .$$

٢) قسمة مقدار جبري مكون من أكثر من حد على مقدار جبري آخر مكون من حد واحد :-

ولقسمة هذا النوع من كثيرات الحدود، فإننا نستخدم الخاصية التالية :

$$\frac{أ_1 + أ_2 + --- + أ_م}{ب} = \frac{أ_1}{ب} + \frac{أ_2}{ب} + --- + \frac{أ_م}{ب} .$$

مثال :- اوجد ناتج القسمة للمقدار التالي بأبسط صورة :-

$$\frac{15\, س^2 ص^2 + 5\, س^3 ص^5 - 25\, س^3 ص^4}{5\, س ص^2}$$

$$= \frac{15\, س^2 ص^2}{5\, س ص^2} + \frac{5\, س^3 ص^5}{5\, س ص^2} - \frac{25\, س^3 ص^4}{5\, س ص^2}$$

$$= 3\, س + س^2 ص^3 - 5\, س^2 ص^2 .$$

مثال :- أكتب ناتج القسمة المقدار التالي بأبسط صورة

$$\frac{٥ ع^{٣} ل^{-٢} + ٢٥ ع ل^{٣}}{٥ ع^{-٢} ل^{-٥}} \text{ ؟}$$

الحل :-

$$= \frac{٥ ع^{٣} ل^{-٢}}{٥ ع^{-٢} ل^{-٥}} + \frac{٢٥ ع ل^{٣}}{٥ ع^{-٢} ل^{-٥}}$$

$$= \frac{ع^{٣} ع^{٢} ل^{٥}}{ل^{٢}} + ٥ ع ع^{٢} ل^{٣} ل^{٥}$$

$$= ع^{٥} ل^{٣} + ٥ ع^{٣} ل^{٨} .$$

٣) قسمة مقدار جبري مكون من أكثر من حد على مقدار جبري آخر مكون من أكثر من حد :-

في هذه الحالة، فإننا نستخدم القسمة المطولة لإيجاد الناتج، وتتلخص في الخطوات التالية :-

أ- نكتب المقدار الجبري (المقسوم والمقسوم عليه) في صورة مرتبة ترتيباً تنازلياً من حيث الأس الأكبر للمتغيرات.

ب- نقسم الحد الأول في المقدار الجبري من المقسوم على الحد الأول من المقدار الجبري في المقسوم عليه.

ج- نضرب خارج القسمة التي حصلنا عليها من الخطوة (ب) في المقسوم عليه ومن ثم نقوم بعملية طرح حاصل الضرب من المقسوم فنحصل على مقدار جبري جديد.

د- نكرر الخطوتين ب، ج حتى نحصل على باقي الطرح مساوياً للصفر أو أن تكون درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه.

مثال ١ :- اوجد خارج قسمة المقدارين

$(س^{٥} - ٢س^{٤} - ٣س^{٣}) \div (س - ٣)$.

الحل :-

خارج القسمة: $س^{٤} + س^{٣}$

المقسوم عليه: $س - ٣$

المقسوم: $س^{٥} - ٢س^{٤} - ٣س^{٣}$

$- \quad (س^{٥} - ٣س^{٤})$

$\text{صفر} + س^{٤} - ٣س^{٣}$

$- \quad (س^{٤} - ٣س^{٣})$

$\text{صفر} + \text{صفر}$

والباقي صفراً (تتوقف عملية القسمة)

أي أن ناتج القسمة هو المقدار $س^{٤} + س^{٣}$ والباقي صفراً.

مثال ٢ :- اوجد خارج قسمة المقدارين :-

$(س^{٢} + ٣س) \div (س - ١٢)$.

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & س + ١٥ \\ \hline س - ١٢ & س^{٢} + ٣س + صفر \\ - & س^{٢} - ١٢س \\ \hline & ١٥س + صفر \\ - & ١٥س - ١٨٠ \\ \hline & صفر + \text{١٨٠} \end{array}$$

١٨٠ باقي القسمة

أي خارج القسمة $(س + ١٥)$ والباقي ١٨٠ .

نلاحظ في هذا المثال ، نكون قد انهينا معظم المواضيع الرئيسة في الباب الثاني .

الباب الثالث : تحليل المقادير الجبرية

أولاً : حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة :

أ) $س(ص + ع) = س ص + س ع$.

ب) $(س + ص)(س - ص) = س^{٢} - ص^{٢}$.

جـ) $(س + ص)(س + ص) = (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}$

د) $(س - ص)(س - ص) = (س - ص)^{٢} = س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢}$

هـ) $(س - ص)(س - ص)(س - ص) = (س - ص)^{٣}$

$= (س^{٢} - ٢س ص + ص^{٢})(س - ص) = س^{٣} - ٢س^{٢}ص + س ص^{٢} - س^{٢}ص + ٢س ص^{٢} - ص^{٣}$

$= س^{٣} - ٣س^{٢}ص + ٣س ص^{٢} - ص^{٣}$

و) $(\text{س} + \text{ص})^3 = (\text{س} + \text{ص})(\text{س} + \text{ص})(\text{س} + \text{ص})$

$= (\text{س} + \text{ص})(\text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2) = \text{س}^3 + 2\text{س}^2\text{ص} + \text{س}\text{ص}^2 +$

$\text{س}^2\text{ص} + 2\text{س}\text{ص}^2 + \text{ص}^3$

$= \text{س}^3 + 3\text{س}^2\text{ص} + 3\text{س}\text{ص}^2 + \text{ص}^3$

أمثلة :- أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

أ) $5\text{س}(\text{ع} - 3\text{ص}) = 5\text{س}\text{ع} - 15\text{س}\text{ص}$.

ب) $(3\text{س}^2 - 4\text{ص})^2 = (3\text{س}^2 - 4\text{ص})(3\text{س}^2 - 4\text{ص})$

$= 9\text{س}^4 - 24\text{س}^2\text{ص} + 16\text{ص}^2$.

جـ) $(\text{س} - 2)^3 = (\text{س} - 2)(\text{س} - 2)(\text{س} - 2)$

$= (\text{س} - 2)(\text{س}^2 - 4\text{س} + 4)$

$= \text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 4\text{س} - 2\text{س}^2 + 8\text{س} - 8$

$= \text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 12\text{س} - 8$

ثانياً : التحليل ، ومن الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية :

١) إخراج العامل المشترك

ملاحظة : التحليل هو عملية عكسية لعملية حاصل ضرب مقادير جبرية والمقصود بتحليل المقدار الجبري إلى عوامله الأولية (أي لا يمكن تحليل عوامله إلى حاصل ضرب عوامل جبرية أخرى) .

تعريف :- إذا كان لدينا المقدار $\text{هـ}\,\text{س} + \text{هـ}\,\text{ص}$ ، فيمكن إخراج عامل مشترك بين الحدين على الصورة التالية:

$$\text{هـ}\,\text{س} + \text{هـ}\,\text{ص} = \text{هـ}\,(\text{س} + \text{ص}) .$$

مثال :- حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية

1) $5\text{س} + 15\text{ص} = 5\,(\text{س} + 3\text{ص}) .$

2) $3\text{س}^2 - 27\text{س} = 3\text{س}\,(\text{س} - 9) .$

3) $2\text{س}^2\text{ص} - 8\text{س}\,\text{ص}^3 = 2\text{س}\,\text{ص}\,(\text{س} - 4\text{ص}^2) .$

4) $5\text{س}^2\text{ص}^3\text{ع} - 25\text{س}\,\text{ع} + 15\text{س}\,\text{ع}^2$

$= 5\text{س}\,\text{ع}\,(\text{س}\,\text{ص}^3 - 5 + 3\text{ع}) .$

للتأكد من صحة الحل، نقوم بضرب النتائج الأخيرة أولًا

$$5\text{س}^2\text{ص}^3\text{ع} - 25\text{س}\,\text{ع} + 15\text{س}\,\text{ع}^2 .$$

* * * * * * * *

انتهت محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثالث .

بداية محاضرة يوم السبت
الاسبوع الخامس

الباب الثالث: تحليل المقادير الجبرية

(٢) الفرق بين مربعين:

الصيغة العامة للفرق بين مربعين :-

$س^2 - ص^2 = (س - ص)(ص + س) = (س + ص)(س - ص)$

مثال ١ :- حلل المقدار الجبري التالي

١) $س^2 - ٩ = س^2 - ٣^2 = (س - ٣)(س + ٣)$

٢) $٤س^2 - ٩ص^2 = (٢س)^2 - (٣ص)^2$

$= (٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص)$.

٣) $س^4 - ١ = \cancel{(س^2 - ١^2)}$

$= (س^2)^2 - (١)^2$

$= (س^2 - ١)(س^2 + ١)$ فرق بين مربعين

$= (س - ١)(س + ١)(س^2 + ١)$ (مكتوب في أبسط صورة)

نتأكد من صحة الحل :-

$(س - ١)(س + ١)(س^2 + ١)$

$= (س^2 - ١)(س^2 + ١) = س^4 + \cancel{س^2} - \cancel{س^2} - ١$

$= س^4 - ١$.

٤) $(١٦ - ص^4) = (٤^2 - (ص^2)^2) = (٤ - ص^2)(٤ + ص^2)$

$= (٢ - ص)(٢ + ص)(٤ + ص^2)$.

٣ الفرق بين مكعبين :-

الصيغة العامة للفرق بين مكعبين تكتب على الصورة التالية :-

$$(\text{س}^3 - \text{ص}^3) = (\text{س} - \text{ص})(\text{س}^2 + \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2).$$

(الحد الأول)³ (الحد الثاني)³ — الحد الأول — الحد الثاني — مربع الحد الأول — الحد الأول × الحد الثاني — مربع الحد الثاني

- مثال :- حلل المقادير الجبرية التالية بأبسط صورة :-

1) $27\text{س}^3 - \text{ص}^3 = \left((3\text{س})^3 - (\text{ص})^3\right)$

$$= (3\text{س} - \text{ص})(9\text{س}^2 + 3\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2).$$

2) $8\text{س}^6 - 125\text{ص}^9 = \left((2\text{س}^2)^3 - (5\text{ص}^3)^3\right)$

$$= (2\text{س}^2 - 5\text{ص}^3)(4\text{س}^4 + 10\text{س}^2\text{ص}^3 + 25\text{ص}^6)$$

٤ مجموع مكعبين :

الصيغة العامة لهذا القانون تكتب كما يلي :-

$$(\text{س}^3 + \text{ص}^3) = (\text{س} + \text{ص})(\text{س}^2 - \text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2).$$

- مثال :- $(27\text{س}^3 + 1) = \left((3\text{س})^3 + (1)^3\right)$

$$= (3\text{س} + 1)(9\text{س}^2 - 3\text{س} + 1).$$

$$(125\text{س}^6 + 8) = \left((5\text{س}^2)^3 + (2)^3\right)$$

$$= (5\text{س}^2 + 2)(25\text{س}^4 - 10\text{س}^2 + 4)$$

٥) تحليل المقدار الثلاثي :-

نستعرض الآن طريقة تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية وهي م الصيغة :-

أ س^2 + ب س + جـ ، حيث أ، ب، جـ : أعداد ثابتة.

السعي لإعادة كتابة المقدار :-

أ س^2 + ب س + جـ = (هـ$_1$ س + و$_1$)(هـ$_2$ س + و$_2$)

والمطلوب إيجاد قيمة هـ$_1$، و$_1$، هـ$_2$، و$_2$.

مثال :- حلل المقدار التالي :-

١) س^2 + س − ٦ = (س + ٣)(س − ٢)

٣س ، −٢س

س ، س

٢ أو ١ ×

٣ أو ٦ ×

٢) س^2 + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣)

إشارة الحد الثابت موجب تأخذ الإشارة موجبتين

س ، س

٦ أو ٢

×

١ أو ٣

٣) س² − ٥س − ١٤ = (س + ٢)(س − ٧)

اشارة الطرف سالبة
مختلفة

اشارة الوسط
تعطى للعدد الأكبر

٤) س² − ٢س − ٨ = ؟؟

س   +٢   ١
س   −٤   ٨
أو

اشارة الوسط تذهب للعدد الأكبر

س² − ٢س − ٨ = (س − ٤)(س + ٢).

تحدد شكل اشارة المقدارين
لماذا كانت سالبة، تكون اشارة المقدارين
مختلفتين (+ و −).
أما اذا كانت اشارة الطرف (الحد الثابت) موجبة
فتكون اشارة المقدارين الناتج متشابهة.

٥) (س² − ٢س + ١) = (س − ١)(س − ١)

٦) ٦س² + ٥س − ٤ = (٢س − ١)(٣س + ٤) ✓ الحل الصحيح

٢س   −١ أو −٢
٣س   +٤   +٢

او (٢س + ٤)(٣س − ١) ×
او (٢س + ٢)(٣س − ٢) ×
او (٢س − ٢)(٣س + ٢) ×

نهاية المحاضرة السابعة نهاية الباب الثالث (من تحليل المقادير الجبرية)

محاضرة يوم الثلاثاء من الاسبوع الخامس

الفصل الرابع : المقادير الكسرية

ما هو المقدار الكسري :-

تعريف :- المقدار الكسري (النسبي) هو عبارة عن خارج قسمة كثيرتي حدود بحيث يسمى المقسوم بالبسط والمقسوم عليه بالمقام .

ومن الأمثلة على ذلك :-

مقادير كسرية

① $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س} + ٢}$ ← البسط ، ← المقام

② $\frac{٣\text{س}^{٢} + \text{س}}{٢\text{س}^{٢} - ١}$ ← البسط ، ← المقام

③ $\text{س}^{٤} + \text{س}^{-٢} = \frac{\text{س}^{٤}}{١} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}$.

$= \frac{\text{س}^{٤} \times \text{س}^{٢}}{١ \times \text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$= \frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{س}^{٦} + ١}{\text{س}^{٢}}$.

العمليات الجبرية على المقادير الكسرية :-

1 جمع وطرح المقادير الكسرية :

عند جمع أو طرح مقادير كسرية ، يجب ملاحظة ما يلي :-

أ) إذا كانت المقادير الكسرية لها نفس المقام، فيكون المجموع الجبري لها له نفس المقام وبسطه يكون هو ناتج جمع بسط المقدار الأول مع بسط المقدار الثاني ، بالصورة الرمز :-

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+\text{ع}}{\text{ص}} \qquad (\text{ص} \neq \text{صفر})$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} - \frac{\text{ع}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{\text{ص}} \qquad (\text{ص} \neq \text{صفر})$$

مثال :- اوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

أ) $$\frac{\text{س}+٣}{\text{س}-٢} - \frac{\text{س}}{\text{س}-٢} = \frac{(\text{س}+٣)-(\text{س})}{\text{س}-٢}$$

$$= \frac{٣}{\text{س}-٢} .$$

ب) $$\frac{٣\text{س}}{\text{س}-٤} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}-٤} = \frac{٣\text{س}+٢\text{س}}{\text{س}-٤} = \frac{٥\text{س}}{\text{س}-٤} .$$

ب) إذا كانت المقادير الكسرية لها مقامات مختلفة، نقوم بتحويل الكسور متكافئة وذلك بضرب بسط ومقام كل كسر بأعداد مناسبة لكي نحصل على كسور لها نفس المقام ثم نتبع الطريقة السابقة في أ .

بصورة رمزية :-

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل} \times \text{س}}{\text{ل} \times \text{ص}} + \frac{\text{ع} \times \text{ص}}{\text{ل} \times \text{ص}}$$

$$= \frac{\text{ل س}}{\text{ل ص}} + \frac{\text{ع ص}}{\text{ل ص}}$$

$$= \frac{\text{ل س} + \text{ع ص}}{\text{ل ص}} .$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} - \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل} \times \text{س}}{\text{ل} \times \text{ص}} - \frac{\text{ع} \times \text{ص}}{\text{ل} \times \text{ص}}$$

$$= \frac{\text{ل س} - \text{ع ص}}{\text{ل ص}} .$$

مثال :- أوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{5}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}+1}$$

الحل:

$$\frac{\text{س}+1}{\text{س}+1} \times \frac{5}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}+1} \times \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

$$= \frac{5(\text{س}+1)}{\text{س}(\text{س}+1)} + \frac{3\text{س}}{\text{س}(\text{س}+1)} = \frac{5\text{س} + 5 + 3\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س}} = \frac{8\text{س} + 5}{\text{س}^2 + \text{س}} .$$

مثال :- اختصر ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :-

$$\frac{\text{٣}}{\text{س}} - \frac{\text{٥}}{\text{س}-\text{٢}}$$

الحل:

$$\frac{\text{٣} \times (\text{س}-\text{٢})}{\text{س} \times (\text{س}-\text{٢})} - \frac{\text{٥} \times \text{س}}{\text{س} \times \text{س}-\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{٣}(\text{س}-\text{٢})}{\text{س}(\text{س}-\text{٢})} - \frac{\text{٥س}}{\text{س}(\text{س}-\text{٢})} = \frac{\text{٣س} - \text{٦} - \text{٥س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}$$

$$= \frac{-\text{٢س} - \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}$$

ملاحظة : (في عملية جمع وطرح مقادير كسرية) عند استخدام الطريقة (ب) ، يجب تحليل مقامات الكسور الى عواملها الأولية إن أمكن .

مثال :- أوجد ناتج طرح المقادير

$$\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}} - \frac{\text{٢}}{\text{س}+\text{١}}$$

الحل:

$$\frac{\text{٢س}}{(\text{س}-\text{١})(\text{س}+\text{١})} - \frac{\text{٢}}{(\text{س}+\text{١})}$$

$$= \frac{\text{٢س}}{(\text{س}-\text{١})(\text{س}+\text{١})} - \frac{\text{٢}}{(\text{س}+\text{١})} \times \frac{(\text{س}-\text{١})}{(\text{س}-\text{١})} = \frac{\text{٢س} - (\text{٢س}-\text{٢})}{(\text{س}-\text{١})(\text{س}+\text{١})}$$

$$= \frac{\text{٢}}{(\text{س}+\text{١})(\text{س}-\text{١})} = \boxed{\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}}}$$

مثال :- اوجد ناتج جمع المقدارين

$$\frac{٥}{س^٢} + \frac{٢}{٥س}$$

الحل: $\frac{٥ \times ٥}{٥ \times س \times س} + \frac{٢}{٥س} \times \frac{س}{س}$

$$= \frac{٢٥}{٥س^٢} + \frac{٢س}{٥س^٢} = \frac{٢٥ + ٢س}{٥س^٢}$$

$\boxed{٢}$ ضرب وقسمة المقادير الكسرية :

أ) ضرب المقادير الكسرية :-

القاعدة: لضرب كسرين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ع}{ل}$ ، نستخدم القاعدة التالية :

$$\frac{س}{ص} \times \frac{ع}{ل} = \frac{س ع}{ص ل}$$

$\left(\frac{\text{ضرب بسط الأول} \times \text{بسط الثاني}}{\text{ضرب مقام الأول} \times \text{مقام الثاني}}\right)$

مثال :- بسط المقادير التالية :-

$$\frac{٣س}{س-١} \times \frac{٢س}{س+١}$$

الحل: $\frac{٣س \times ٢س}{(س-١)(س+١)} = \frac{٦س^٢}{س^٢-١}$

مثال :- اوجد ناتج مايلي

$$س \times \frac{٥}{س^٢}$$

الحل : $\frac{س}{١} \times \frac{٥}{س^٢} = \frac{٥ س}{س^٢} = \frac{٥ \cancel{س}}{س \times \cancel{س}}$

$= \frac{٥}{س}$.

ب) عملية قسمة مقادير جبرية :

القاعدة :- لحل لقسمة مقدارين كسريين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ع}{ل}$ فإننا نستخدم القاعدة التالية :-

$$\frac{س}{ص} \div \frac{ع}{ل} = \frac{س}{ص} \times \frac{ل}{ع} = \frac{س ل}{ص ع}$$.

(لقسمة مقدار كسري على مقدار كسري آخر ، نقوم بتحويل اشارة القسمة إلى ضرب ونأخذ مقلوب الكسر الثاني) .

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

١) $\frac{٣}{س} \div \frac{٥}{س^٢}$

الحل : $\frac{٣}{س} \times \frac{س^٢}{٥} = \frac{٣ س^٢}{٥ س} = \frac{٣}{٥} س$.

٢) $\frac{س^٢ + ١}{١ - س} \div \frac{س^٢ - ١}{١ + س}$

الحل :- $\dfrac{1+\text{س}^2}{1-\text{س}} \times \dfrac{1+\text{س}}{1-\text{س}^2}$

$$= \frac{1+\text{س}^2}{1-\text{س}} \times \frac{\cancel{1+\text{س}}}{(\cancel{1+\text{س}})(1-\text{س})} = \frac{1+\text{س}^2}{(1-\text{س})(1-\text{س})}$$

$$= \frac{1+\text{س}^2}{(1-\text{س})^2}$$

$$= \frac{1+\text{س}^2}{1+2\text{س}-\text{س}^2}$$

نهاية الفصل الرابع

(مفهوم المقادير الكسرية)

+

(العمليات الجبرية على المقادير الكسرية).

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الخامس

بداية محاضرة الاسبوع السادس اليوم السبت

الباب الخامس : المعادلات

تعريف : المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع اشارة المساواة ، وهذا التعبير له طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما اشارة (=) بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل . وعملية حل المعادلة معناه ايجاد كل القيم (الاعداد) التي تجعل المعادلات صحيحة ، ومجموعة هذه الحلول تسمى حل المعادلة .

وبداية سنتعرف على بعض من اشكال المعادلات ومنها :-

١- المعادلات الخطية في مجهول (متغير) واحد س :

الصورة العامة لمعادلة خطية بمتغير واحد هي :-

أ س = جـ ، أ ، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر .

مثال :- أوجد قيمة س من المعادلة

٥ س - ٢٥ = صفر

الحل : بداية نقوم بنقل العدد الثابت الى الطرف الآخر ، ودائماً عند نقل حد ثابت أو متغير من طرف الى آخر نقوم بتغير اشارته .

٥ س = ٢٥

سنتخلص من معامل س لنجعله العدد واحد وذلك عن طريق قسمة حدي المعادلة على ذلك المعامل .

$$\frac{\text{٥س}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢٥}}{\text{٥}}$$

$\boxed{\text{س} = \text{٥}}$ هو الحل للمعادلة .

(ملاحظة: دائماً ~~الحل~~ المعادلات من الدرجة الأولى لها حل واحد فقط)

وللتأكد من صحة الحل، نقوم بتعويض الناتج (س = ٥) في المعادلة الأصلية :-

$$\text{٥س} - \text{٢٥} = \text{صفر}$$

$$\text{٥} \times \text{٥} - \text{٢٥} = \text{صفر}$$ (الحل صحيح) .

$$\text{صفر} = \text{صفر}$$

مثال : اوجد حل المعادلة التالية :-

$$\text{٤} - \text{٢س} = \text{صفر}$$

الحل: $\frac{-\text{٢س}}{-\text{٢}} = \frac{-\text{٤}}{-\text{٢}} \Longleftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢}}$

للتأكد من صحة الحل :

$$\text{٤} - \text{٢(٢)} = \text{٤} - \text{٤} = \text{صفر}$$

بعض من خواص الأعداد الحقيقية المستخدمة في حل المعادلات:

① إذا كانت ب = جـ فإن:

أ + ب = أ + جـ   (ب + ٢ = جـ + ٢)

ب − أ = جـ − أ   (ب − ٢ = جـ − ٢)

أ ب = أ جـ   (٢ب = ٢جـ)

ب/أ = جـ/أ   (ب/٣ = جـ/٣).

② إذا كانت أ + ب = أ + جـ ⟸ ب = جـ

③ إذا كانت أ ب = أ جـ ⟸ ب = جـ .

④ " " ب/أ = جـ/أ ⟸ ب = جـ

⑤ " " ب − أ = جـ − أ ⟸ ب = جـ

مثال :- س − ٧ = ١٠ (معادلة خطية) .

لو أردنا أن نجد حل لهذه المعادلة :-

س = ١٠ + ٧ ⟸ $\boxed{\text{س} = ١٧}$

بشكل آخر :-

(س − ٧) + ٧ = (١٠) + ٧

$\boxed{\text{س} = ١٧}$

مثال :- اوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{1}{٢}س - ٦ = ٢ .$$
$$\quad +٦ \quad\quad +٦$$

$$\frac{1}{٢}س = ٢ + ٦ \Leftarrow \frac{1}{٢}س = ٨$$

وللتخلص من معامل س $(\frac{1}{٢})$ ، نقوم بضرب كلا الحدين

بالعدد ٢ :.

$$٢ \times \frac{1}{٢}س = ٨ \times ٢ \Leftarrow \boxed{س = ١٦}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$\frac{1}{٢}(١٦) - ٦ \stackrel{?}{=} ٢$$
$$٨ - ٦ = ٢$$
$$٢ = ٢ \quad \checkmark$$

٢- المعادلات الخطية في مجهولين :-

تعريف : المعادلة الخطية في مجهولين س، ص هي عبارة عن معادلة

على الصورة $\quad أ س + ب ص = جـ$

حيث $أ، ب، جـ \in ح$ ، $أ، ب \neq$ صفر .

نلاحظ أن حل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً

(بمعنى أنه سيكون لدينا عدد لانهائي من الحلول) .

حيث أنه $\boxed{س = \frac{جـ - ب ص}{أ}}$ بمعنى أن لكل قيمة للمتغير ص توجد قيمة للمتغير س .

مثال ١ :- أوجد حل المعادلة التالية

٢س + ٣ص = ١٥ .

الحل :-

٢س / ٢ = (١٥ − ٣ص) / ٢

[س = (١٥ − ٣ص) / ٢]

فنقول عندما ص = ٢ ⟸ س = (١٥ − ٣(٢)) / ٢

= (١٥ − ٦) / ٢ = ٩ / ٢ = ٤,٥ .

نتأكد من صحة الحل :

نعوض كل من قيمة س = ٤,٥ و ص = ٢ في المعادلة الأصلية :-

٢(٤,٥) + ٣(٢) ≟ ١٥

٩ + ٦ = ١٥

١٥ = ١٥ ✓ الحل صحيح .

وكذلك عندما ص = ٣ ⟸ س = (١٥ − (٣×٣)) / ٢

= (١٥ − ٩) / ٢ = ٦ / ٢ = ٣

وللتأكد من صحة الحل :-

٢(٣) + ٣(٣) ≟ ١٥

٦ + ٩ = ١٥

١٥ = ١٥ ✓ الحل صحيح

مثال: - اوجد حل المعادلة

٥س − ٤ص = ٢٤ عندما ص = ١− ؟

ص = ٢ ؟

الحل: -

$$\frac{٥س}{٥} = \frac{٤ص + ٢٤}{٥}$$

$$\boxed{س = \frac{٤ص + ٢٤}{٥}}$$ هذه الصورة العامة للحل.

عندما ص = ١− : $س = \frac{٤(١−) + ٢٤}{٥}$

$$= \frac{٤− + ٢٤}{٥}$$

$$= \frac{٢٠}{٥}$$

$$\boxed{س = ٤}$$

للتأكد: - $٥ × ٤ − ٤(١−) \stackrel{?}{=} ٢٤$

$٢٠ + ٤ = ٢٤$ ✓

عندما ص = ٢ : $س = \frac{٤ × ٢ + ٢٤}{٥}$

$$س = \frac{٨ + ٢٤}{٥}$$

$$\boxed{س = \frac{٣٢}{٥}}$$

للتأكد من صحة الحل:

$٥ × (\frac{٣٢}{٥}) − ٤(٢) \stackrel{?}{=} ٢٤$

$٣٢ − ٨ = ٢٤$ ✓ الحل صحيح

٣ - معادلات خطية آنية في مجهولين :-
ويأخذ هذا النوع من المعادلات على الصورة :

$$أ_١ س + ب_١ ص = جـ_١$$
$$أ_٢ س + ب_٢ ص = جـ_٢$$

حيث $أ_١ ، أ_٢ ، ب_١ ، ب_٢ ، جـ_١ ، جـ_٢ \in ح$.

$أ_١ ، ب_١$ احدهما على الأقل $\neq$ صفر .
$أ_٢ ، ب_٢$ " " $\neq$ صفر .

وحل هذا النظام الآني من المعادلات هو عبارة عن زوج من الأعداد س، ص يحقق كلا المعادلتين معاً .
في هذا البند ، سنوضح طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات :-

١- طريقة الحذف :-
خطوات هذه الطريقة :-
الخطوة الأولى : اذا لم تكن المعاملات المناسبة لاحد المتغيرين س أو ص متساوية ، فنضرب المعادلتين في عدد معين حتى تصبح معاملات أحد المتغيرين متساوية .
الخطوة الثانية : إذا كانت الاشارتين للمعاملين المتساويين غير متشابهتين فنقوم بعملية جمع لكلا المعادلتين ، أما اذا كانت متشابهتين فنقوم بعملية الطرح .
الخطوة الثالثة : نجد قيمة احد المتغيرين ثم نعوض في إحدى المعادلتين الاصليتين لايجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال :- اوجد قيمة س، ص من المعادلتين :-

$٥س + ص = ١$

$س - ص = ٢$ +

$٦س + صفر = ٣$

لاحظوا أن معامل ص في كلا المعادلتين متشابه وإشاراتهم مختلفة، نقوم بعملية الجمع مباشرة لنتخلص من ص

$س = \frac{٣}{٦} \Leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

نقوم بإيجاد قيمة المتغير الآخر الا وهو ص من إحدى المعادلتين

$س - ص = ٢$ وعندنا $س = \frac{١}{٢}$:-

$\frac{١}{٢} - ص = ٢ \Leftarrow -ص = ٢ - \frac{١}{٢}$

$-١ \times \quad -ص = ١,٥ \times -١$

$\boxed{ص = -١,٥}$

للتأكد من صحة الحل :-

المعادلة الأولى

$٥(\frac{١}{٢}) + (-١,٥) \overset{?}{=} ١$

$٢,٥ - ١,٥ = ١$

$١ = ١$ ✓

المعادلة الثانية

$\frac{١}{٢} - (-١,٥) \overset{?}{=} ٢$

$\frac{١}{٢} + ١,٥ = ٢$

$٢ = ٢$ ✓

بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع السابع

مثال ٢ :- اوجد قيمتي س ، ص من :-

٥س + ٢ص = ٣ —— (١) ×٣

٢س + ٣ص = -١ —— (٢) ×٢

الحل :- نقوم بضرب المعادلة الأولى بالعدد ٣ ، والمعادلة الثانية بالعدد ٢

١٥س + ٦ص = ٩

٤س + ٦ص = -٢ —

١١س / ١١ = ١١ / ١١ ⇐ $\boxed{\text{س} = ١}$

نعوض قيمة س في المعادلة الأولى : (لإيجاد قيمة المتغير الآخر)

٥(١) + ٢ص = ٣

٥ + ٢ص = ٣ ⇐ ٢ص = ٣ - ٥

٢ص / ٢ = -٢ / ٢ ⇐ $\boxed{\text{ص} = -١}$

للتأكد من صحة الحل :-

٥(١) + ٢(-١) ≟ ٣

٥ - ٢ = ٣ ✓

٢(١) + ٣(-١) ≟ -١

٢ - ٣ = -١ ✓

٢- طريقة التعويض :

تتلخص هذه الطريقة في ايجاد قيمة أحد المجهولين بدلالة الآخر ومن ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى ، نحصل على معادلة بمجهول واحد ومنها نجد قيمته ثم نعوض به في أحد المعادلتين لنحصل على قيمة المجهول الآخر .

مثال :- اوجد قيمة س ، ص من النظام

٢س - ص = ٤ —— (١)

س + ٢ص = -٣ —— (٢)

الحل : نكتب المتغير س بدلالة ص من المعادلة (٢) لنحصل على

س + ٢ص = -٣ ⇐ $\boxed{\text{س} = -٣ - ٢\text{ص}}$

الآن ، نعوض هذا الناتج في المعادلة (١) :

٢س - ص = ٤ —— (١)

٢(-٣ - ٢ص) - ص = ٤

-٦ - ٤ص - ص = ٤

-٦ - ٥ص = ٤

-٥ص = ٤ + ٦ ⇐ -٥ص = ١٠ ⇐ $\boxed{\text{ص} = -٢}$

نعوض قيمة ص هنا في المعادلة رقم (١) :

٢س + ٢ = ٤ ⇐ ٢س = ٤ + -٢

٢س/٢ = ٢/٢ ⇐ $\boxed{\text{س} = ١}$

مثال ٢ :- أوجد قيمة س، ص من المعادلتين

$$5\text{س} + \text{ص} = 1 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$\text{س} - \text{ص} = 2 \quad \text{——} \quad (2)$$

(والحل من الطريقة السابقة $\text{س} = \frac{1}{2}$ ، ص = −١,٥)

الحل : من المعادلة (٢) يمكن الحصول على قيمة المتغير س بالصورة :

$$\text{س} - \text{ص} = 2 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{ص} + 2}$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على :

$$5\text{س} + \text{ص} = 1$$

$$5(\text{ص} + 2) + \text{ص} = 1$$

$$5\text{ص} + 10 + \text{ص} = 1$$

$$6\text{ص} = 1 - 10 \Leftarrow 6\text{ص} = -9 \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{-9}{6}}$$

$$\text{ص} = \frac{-3}{2} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = -1{,}5}$$

بتعويض قيمة ص = −١,٥ في المعادلة (٢) :

$$\text{س} - (-1{,}5) = 2 \Leftarrow \text{س} + 1{,}5 = 2$$

$$\text{س} = 2 - 1{,}5$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{1}{2}}$$

٤ - معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد :-

يكتب هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية:

$$\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$$

حيث أ، ب، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ صفر

بعض الحالات المختلفة من هذه الصيغ :-

أ- في حالة ب = صفر :- (تصبح شكل المعادلة السابقة على النحو الآتي)

$$\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{جـ} = \text{صفر}$$ (وتسمى معادلة تربيعية)

وحل هذا النوع من المعادلات يكون على الصورة :-

$$\text{س} = \pm\sqrt{\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}}$$ ($\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$: عدد غير سالب)

مثال :- اوجد قيم س من المعادلة

$$\text{س}^{٢} - ٤٩ = \text{صفر} .$$

الحل :- $\text{س}^{٢} = ٤٩$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$\text{س} = \pm\sqrt{٤٩} = \pm 7 .$$

$$\text{س}^{٢} + ٤٩ = \text{صفر}$$

$$\text{س}^{٢} = -٤٩ \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{-٤٩}$$ (عدد غير معرف)

لا يوجد حل .

ب) اذا كانت $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} = \text{صفر}$ ، $\text{أ} \neq \text{صفر}$.

ويتم حل هذا النوع من المعادلات بأخذ س كعامل مشترك لتصبح المعادلة على الصورة :

$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{س}\,(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}) = \text{صفر}$$

فحل هذه المعادلة تكون على النحو الآتي :

$\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ أو $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} = \text{صفر}$

ومنه $\boxed{\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}}$

مثال : حل المعادلة

$$5\,\text{س}^2 + 9\,\text{س} = \text{صفر}$$

الحل :- $\text{س}\,(5\,\text{س} + 9) = \text{صفر}$

إما $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ وإما $5\,\text{س} + 9 = \text{صفر}$

$5\,\text{س} = -9$

$\boxed{\text{س} = \frac{-9}{5}}$

مثال :- حل المعادلة

$$3\,\text{س}^2 - 9\,\text{س} = \text{صفر}$$

اخراج عامل مشترك $3\,\text{س}\,(\text{س} - 3) = \text{صفر} \Leftarrow$

$3\,\text{س} = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{صفر}}$

$\text{س} - 3 = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$

جـ) إذا كانت $أس^٢ + ب س + جـ = صفر$ ، $أ \neq صفر$ ، $ب \neq صفر$ ، $جـ \neq صفر$

يمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطريقتين التاليتين :-

١) طريقة التحليل : وتتم من خلال تحليل المعادلة التربيعية
إلى مقدارين جبريين نستخدم القاعدة التالية :-

قاعدة : حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صفر فهذا يعني أن أحد المقدارين يساوي صفر أو المقدار الآخر يساوي صفر .

مثال ١ :- أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

$$س^٢ - ٧س + ١٠ = صفر .$$

$$(س - ٢)(س - ٥) = صفر$$

$$س - ٢ = صفر \Leftarrow \boxed{س = ٢}$$

(حلين للمعادلة التربيعية)

$$س - ٥ = صفر \Leftarrow \boxed{س = ٥}$$

مثال ٢ :- أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

$$س^٢ - ٢س + ١ = صفر .$$

$$(س - ١)(س - ١) = صفر$$

$$س - ١ = صفر \Leftarrow \boxed{س = ١}$$

(لاحظوا أن للمعادلة التربيعية حل واحد فقط)

للتأكد من صحة الحل :-

$$(١)^٢ - ٢(١) + ١ \overset{?}{=} صفر$$

$$١ - ٢ + ١ = صفر$$

نهاية محاضرة الأستاذ من الأسبوع السادس

المحاضرة المباشرة الثانية
(الأسبوع السابع)

الباب الخامس (المعادلات)

١) معادلات خطية في مجهول واحد (س) :-

أ س = جـ .

٢) معادلات خطية في مجهولين

أ س + ب ص = جـ .

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين :-

أ$_1$ س + ب$_1$ ص = جـ$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص = جـ$_2$.

٤) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :-

أ س^2 + ب س + جـ = صفر .

مثال :-

أ) أ س^2 + ب س = صفر (جـ = صفر)

ب) أ س^2 + جـ = صفر (ب = صفر)

جـ) أ س^2 + ب س + جـ = صفر (أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، جـ ≠ صفر)

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

١) طريقة التحليل .

٢) طريقة القانون العام :-

والصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو التالي :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \mp \sqrt{\text{ب}^{2} - 4\text{أجـ}}}{2\text{أ}}$$

حيث أ : هو معامل س^{2} .

ب : معامل س

جـ : الحد الثابت .

ويسمى المقدار $(\text{ب}^{2} - 4\text{أجـ})$ بالمميز ويرمز له بالرمز م ،

وتوجد هنالك ثلاث حالات للمميز هي :-

١- إذا كانت م > صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$ حلين حقيقيين مختلفين هما :-

$$\text{س}_{1} = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{م}}}{2\text{أ}} \quad ، \quad \text{س}_{2} = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{م}}}{2\text{أ}}$$

(وتسمى أيضاً بجذرا المعادلة) .

٢- إذا كانت م = صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$ حل وحيد هو $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}$.

٣- إذا كانت م < صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^{2} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$ حلين غير حقيقيين (بمعنى أنه لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة)

مثال: حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

١) $٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٥ = \text{صفر}$

٢) $\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣ = \text{صفر}$

٣) $٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} = \frac{-١}{٢}$

الحل:- (١) $٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٥ = \text{صفر}$

لاحظ أن $\text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = ١$ ، $\text{جـ} = -١٥$.

وباستخدام القانون المميز نحصل على :-

$$\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = (١)^{٢} - ٤(٢)(-١٥) = ١ + ١٢٠ = ١٢١$$

المميز موجب، إذا للمعادلة جذران حقيقيان هما :-

$$\text{س}_{١} = \frac{-١ + \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ + ١١}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

$$\text{س}_{٢} = \frac{-١ - \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ - ١١}{٤} = \frac{-١٢}{٤} = -٣ .$$

(٢) $\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣ = \text{صفر}$. ($\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = ٢$ ، $\text{جـ} = ٣$)

باستخدام المميز نحصل على :

$$\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = (٢)^{٢} - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨$$

إذن، لا يوجد حلول حقيقية لأن المميز سالبة .

(٣) $٢س^{٢} - ٢س = -\frac{١}{٢}$.

الحل: نعيد كتابة المعادلة بالصورة :-

$$٢س^{٢} - ٢س + \frac{١}{٢} = صفر$$

(لاحظ أن : $أ = ٢$ ، $ب = -٢$ ، $جـ = \frac{١}{٢}$) .

وباستخدام المميز :-

$$ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤(٢)(\frac{١}{٢})$$

$$= ٤ - \frac{٨}{٢} = ٤ - ٤ = صفر$$

إذن : المعادلة لها حل حقيقي واحد هو :-

$$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢(٢)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} .$$

$$\boxed{س = \frac{١}{٢}}$$

ولو أردنا التأكد من صحة الحل، فإننا نقوم بتعويض $س = \frac{١}{٢}$ في المعادلة الأصلية للحصول على :-

$$٢س^{٢} - ٢س = -\frac{١}{٢}$$

وعندما $س = \frac{١}{٢}$:-

$$٢(\frac{١}{٢})^{٢} - ٢(\frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٢}$$

$$٢(\frac{١}{٤}) - ١ = -\frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢} \quad ✓$$

* ملاحظة: لابد من كتابة المعادلة على الصورة

أ س² + ب س + جـ = صفر

قبل البدء بإيجاد قيم أ، ب، جـ وتطبيق القانون العام.

٥) المتراجحات الخطية بمجهول واحد:

* تعريف: المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ أحد الإشارات التالية <، >، ≥، ≤ بدلاً من إشارة المساواة.

مثلاً: ٢س + ١١ < ٥س − ١ (متراجحة خطية بمجهول واحد)

وكذلك ٤س + ٣ ≥ ١

هي أمثلة على متراجحات خطية بمجهول واحد.

* وعملية حل المتراجحات الخطية في المجهول س هو عبارة عن العدد س الذي يحقق طرفي المتراجحة المعطاة.

ويجب ملاحظة أن إشارة المتراجحة تتغير عند الضرب أو القسمة لعدد سالب، أما بقية العمليات كجمع وطرح عدد سالب أو موجب وكذلك الضرب والقسمة لعدد موجب فتبقى كما هي دون أي تغيير والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال ١ : حُلَّ المتراجحة الخطية

$$3\text{س} + 11 \geq 5\text{س} - 1 .$$

الحل : نستخدم نفس طريقة حل المعادلات الخطية في مجهول حيث نقوم بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير في طرف والاعداد الحقيقية في الطرف الآخر يصبح لدينا :

$$3\text{س} - 5\text{س} \geq -1 - 11$$

$$-2\text{س} \geq -12$$

وبالقسمة على معامل س والذي يساوي −٢ نحصل على :

$$\text{س} \leq 6$$

(لاحظوا ان اشارة المتراجحة تتغير عند القسمة على العدد −٢)

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي :- $\{\text{س} \in \text{ح} : \text{س} \leq 6\}$.

مثال ٢ : اوجد مجموعة حل المتراجحة :

$$4\text{س} + 3 \geq 1 \; ؟$$

الحل :- $4\text{س} \geq 1 - 3$ (باضافة العدد −٣ للطرفين)

$$4\text{س} \geq -2$$

$\text{س} \geq \frac{-2}{4}$ (قسمة الطرفين على معامل س = ٤)

$$\text{س} \geq \frac{-1}{2}$$

مجموعة الحل = $\{\text{س} \in \text{ح} : \text{س} \geq \frac{-1}{2}\}$.

بعض من التمارين المختلفة على الباب الخامس :-

- اوجد حل كل من المعادلات التالية :-

1) $-٤س - ٥ = -٦س + ٥$

الحل: بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والحدود التي تحتوي على الاعداد الحقيقية في الطرف الآخر، نحصل على

$-٤س + ٦س = ٥ + ٥$

$٢س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ٥}$ من خلال القسمة على معامل س.

2) $٣س - ٥ = ٢ص$.

الحل: نضيف الحد ٥ للطرفين لنحصل على :-

$٣س = ٢ص + ٥$

بالقسمة على معامل س لكلا الطرفين :-

$س = \frac{٢ص + ٥}{٣}$.

ويسمى هذا الحل بالحل العام

(بمعنى أنه لدينا عدد لانهائي من الحلول حيث أن قيمة المتغير س تعتمد على قيمة المتغير ص).

٣) ٢س − ٣ص = ٧ —— (١) (نظام من معادلتين)
٣س + ص = ٥ —— (٢)

الحل :-
١) طريقة الحذف :-
نضرب المعادلة الثانية بالعدد ٣ ، فنحصل على

٢س − ٣ص = ٧
\+ ٩س + ٣ص = ١٥ مع الجمع

١١س = ٢٢ ومنه س = ٢٢/١١
$\boxed{\text{س} = ٢}$

بالتعويض في المعادلة الثانية :-
٣ × ٢ + ص = ٥ ⟸ ٦ + ص = ٥
⟸ ص = ٥ − ٦
$\boxed{\text{ص} = ١-}$

٢) طريقة التعويض :-
من المعادلة الثانية نحصل على :-
$\boxed{\text{ص} = ٥ - ٣\text{س}}$ —— (٣)
نعوض المعادلة (٣) في المعادلة (١) لنحصل على :-
٢س − ٣(٥ − ٣س) = ٧
٢س − ١٥ + ٩س = ٧
١١س = ٧ + ١٥ ⟸ ١١س = ٢٢
س = ٢٢/١١ = ٢ .

بتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢) :

٣(٢) + ص = ٥ ⇐ ٦ + ص = ٥

ص = ٥ - ٦

$\boxed{\text{ص} = -١}$

٤) ٣س^{٢} + ٥س = صفر

الحل: اخذ س كعامل مشترك:

س (٣س + ٥) = صفر

إما $\boxed{\text{س = صفر}}$ أو ٣س + ٥ = صفر

٣س = -٥

$\boxed{\text{س} = \frac{-٥}{٣}}$

٥) ٤س^{٢} - ١٢س + ٩ = صفر

الحل: باستخدام القانون العام، وأولاً نجد المميز:

ب^{٢} - ٤أجـ = (-١٢)^{٢} - ٤(٤)(٩)

= ١٤٤ - ١٤٤ = صفر

بما أن المميز = صفر، إذن للمعادلة حل وحيد هو

$\frac{\text{-ب} \mp \sqrt{\text{المميز}}}{\text{٢أ}} = \frac{+١٢ \mp \text{صفر}}{٢(٤)}$

$= \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

حل أسئلة الواجب الأول

١) لو (١٠٠ × ١٠$^{-١}$) = ؟

يمكن تبسيط المقدار: لو (١٠٠ × ١٠$^{-١}$) = لو $\left(\frac{١٠٠}{١٠}\right)$

= لو ١٠ = ١ .

أو استخدام خاصية: لو (١٠٠ × ١٠$^{-١}$) = لو ١٠٠ + لو ١٠$^{-١}$

= لو ١٠^{٢} − لو ١٠

= ٢ لو ١٠ − لو ١٠

= ٢ − ١ = ١

٢) $\sqrt{\text{٢٥ س}^{-٢}\text{ص}^{٤}} = \sqrt{\frac{\text{٢٥ ص}^{٤}}{\text{س}^{٢}}}$ لاحظوا أنه يجب التخلص من الأس السالب.

$= \frac{\text{٥ ص}^{٢}}{\text{س}}$

٣) س^{٣} − ٥ س$^{-٢}$ + ٤ (هذا مقدار جبري، ولكنه ليس كثير حدود بسبب وجود إشارة السالب عند أس الحد الثاني).
وقد تم تعريفه لاحقاً بالمقدار الكسري.

٤) $\frac{\text{٢٥ س}^{٣} - \text{١٥ س}^{٢} + \text{٥ س}}{-\text{٥ س}}$ (قسمة مقدار جبري من ثلاث حدود على مقدار جبري من حد واحد)

$\frac{\text{٢٥ س}^{٣}}{-\text{٥ س}} - \frac{\text{١٥ س}^{٢}}{-\text{٥ س}} + \frac{\text{٥ س}}{-\text{٥ س}}$ (توزيع كل حد من حدود البسط على المقام)

− ٥ س^{٢} + ٣ س − ١

٥) $(١٠٠ \times ٥)^{\text{صفر}}$ (أي عدد ثابت مرفوع للأس صفر وإجابته يساوي ١.)

$= 1$

٦) $\text{لو}_{\text{س}}\ ١٠٠ = ٢$ باستخدام العلاقة بين اللوغاريتمات والأسس، نجد أن:

$\text{س}^٢ = ١٠٠$

$\text{س}^٢ = ١٠^٢$ (الأس متساوي فإذاً يجب أن الأساس يساوي.)

$\boxed{\text{س} = ١٠}$

٧) $\text{ك} = \{٢، ٣، \ldots، ١٠\}$.

$\text{م} = \{\text{س} \mid \text{س} : \text{س عدد أولي}\} = \{٢، ٣، ٥، ٧\} \Leftarrow$ من ك

$\text{م}' = \{٤، ٦، ٨، ٩، ١٠\} \Leftarrow$ اعداد غير أولية

٨) $\dfrac{\text{س}^٢ \text{ص}^٣}{\text{س}^{-١} \text{ص}^٣} = \dfrac{\text{س}^٢ \text{ص}^٣ \text{س}}{\text{ص}^٣} = \text{س}^٣$.

٩) $(٢ + ٣ \times -٣)^٢ = (٢ + -٩)^٢ = (-٧)^٢ = ٤٩$

١٠) $(٣\text{س}^٢ - ٥\text{ص}^٣ - ٢\text{ع}^٤) + (-٣\text{س}^٢ + ٤\text{ص}^٣ + ٢\text{ع}^٤)$

نجمع الحدود المتشابهة بالطريقة العمودية:

$$\begin{array}{r} ٣\text{س}^٢ - ٥\text{ص}^٣ - ٢\text{ع}^٤ \\ + \quad -٣\text{س}^٢ + ٤\text{ص}^٣ + ٢\text{ع}^٤ \\ \hline \text{صفر} - \text{ص}^٣ + \text{صفر} \end{array}$$

① $لو(١٠٠ \times ١٠^{-١}) = لو \frac{١٠٠}{١٠} = لو ١٠ = ١$ #

② $\sqrt{٢٥ س^{-٢} ص^{٤}} = \sqrt{\frac{٢٥ ص^{٤}}{س^{٢}}} = \frac{٥ ص^{٢}}{س}$.
#

③ $\frac{٢٥ س^{٣} - ١٥ س^{٢} + ٥ س}{-٥ س} = -٥ س^{٢} + ٣ س - ٥$.
#

④ $س^{٣} - ٥ س^{-٢} + ٤$ ([illegible]) .
#

⑤ $(١٠٠ \times -٥)^{صفر} = ١$
#

⑥ $لو_{س} ١٠٠ = ٢ \Leftarrow ١٠٠ = س^{٢} \Leftarrow ١٠^{٢} \Leftarrow س = ١٠$
#

⑦ ك = {٢، ٣، ...، ١٠} .
أ = {س : س عدد أولي} = {٢، ٣، ٥، ٧} .
$\bar{أ}$ = {٤، ٦، ٨، ٩، ١٠} .

⑧ $\frac{س^{٢} ص^{٣}}{س^{-١} ص^{٣}} = \frac{س^{٢} \times س^{١} \times \cancel{ص^{٣}}}{\cancel{ص^{٣}}} = س^{٣}$
#

⑨ $(٢ + ٣ \times -٣)^{٢} = (٢ + -٩)^{٢} = (-٧)^{٢} = ٤٩$
#

⑩ $$\frac{\begin{array}{l} ٣س^{٢} - ٥ ص^{٣} - ٢ ع^{٤} \\ + -٣ س^{٢} + ٤ ص^{٣} + ٢ ع^{٤} \end{array}}{صفر - ص^{٣} + صفر} \Leftarrow -ص^{٣}$$ #

حل المناقشة الثانية

١- لو ١٠٠٠$^{-٢}$ = ؟

من خصائص اللوغاريتمات يمكن اعادة كتابة المقدار السابق على الصورة

- ٢ لو ١٠٠٠ = - ٢ لو ١٠^{٣} = - ٦ لو ١٠ = - ٦

٢- لو س =٣ ؟ المطلوب إيجاد قيمة س

يمكن اعادة كتابة المقدار على الصورة الأسية بحيث يصبح

لو س = ٣ تكافئ ١٠^{٣} = س تكافئ س =١٠٠٠

٣- س$^{-٣}$ × س^{٥} + س^{٢} تساوي ؟

أولوية اجراء عمليتي الضرب والجمع هي لعملية الضرب وينتج من أول حدين:

س^{٢} + س^{٢} = ٢ س^{٢}

٤- لو ١٠٠ – لو$_{ه}$ (٢٥) + لو$_{ه}$ (٥$^{-٣}$) – ٢ يساوي؟

خصائص اللوغاريتمات:

لو ١٠^{٢} - لو$_{ه}$ ٥^{٢} - ٣ لو$_{ه}$ ٥ – ٢ = ٢ لو ١٠ – ٢ لو$_{ه}$ ٥ – ٣ (١) – ٢

= ٢ (١) – ٢(١) – ٣ – ٢

= ٢ -٢ -٣ -٢ = -٥

٥- الجذر الثالث للعدد لو ١٠$^{-١}$ ؟

من خصائص اللوغاريتمات:

لو ١٠$^{-١}$ = -١ لو ١٠ = -١ (١) = -١

والجذر الثالث للعدد -١ = -١

حل سؤال المناقشة الثالثة

السؤال الأول:

إذا كان لديك المقدارين :

(س^{٣}-٥س^{٢})   و   (س^{٢}-٥س)

١- المقدار الاول + المقدر الثاني:

(س^{٣} - ٥س^{٢}) + (س^{٢}-٥ س) = س^{٣} - ٤س^{٢} - ٥س

٢- المقدار الثاني - المقدر الأول

(س^{٢} - ٥س) - (س^{٣} - ٥س^{٢}) = س^{٢} - ٥س - س^{٣} + ٥س^{٢}

= - س^{٣} + ٦س^{٢} - ٥س

٣- (س^{٣} - ٥س^{٢}) × (س^{٢} - ٥س) = س^{٥} - ٥س^{٤} - ٥س^{٤} + ٢٥س^{٣}

= س^{٥} – ١٠س^{٤} + ٢٥ س^{٣}

٤-

س

س^{٢} - ٥س) س^{٣} - ٥س^{٢}

بالطرح س^{٣} - ٥س^{٢}

صفر

السؤال الثاني:

حلل المقدار التالي الى عوامل اوليه:

٣س^{٢}ص^{٣}ع^{٢} + ٩س^{٤}ص^{٢}ع^{٣} - ٢٧س ص ع = ٣س ص ع(س ص^{٢}ع + ٣س^{٣} ص ع^{٢} - ٩)

السؤال الأول: حلل المقادير الجبرية التالية

أ) ٣ س ص - ٩ س^{٢}ص^{٣} + ٢٧ ص (أخراج عامل مشترك)

الحل: ٣ ص (س – ٣ س^{٢} ص^{٢} + ٩)

ب) (٢٥ س^{٢} - ٨١ ص^{٢}) (الفرق بين مربعين)

الحل: (٥س – ٩ص) (٥س + ٩ص)

ج) (٢٧ + ع^{٣}) (مجموع مكعبين)

الحل: (٣ + ع)(٩ – ٣ع + ع^{٢})

د) س^{٢} - ١٠ س + ١٦ (مقدار ثلاثي)

الحل: (س – ٨)(س – ٢)

السؤال الثاني: إذا كان لدينا المقدارين الكسريين $\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$ و $\frac{\text{٢}}{\text{س+١}}$

فاوجد

١- حاصل جمع المقدار الاول والثاني

نوحد المقامات أولا:

$$\frac{\text{١}}{\text{(س – ١)(س+١)}} + \frac{\text{٢}}{\text{س+١}} \times \frac{\text{(س-١)}}{\text{(س-١)}} = \frac{\text{١ + ٢س - ٢}}{\text{(س-١)(س+١)}}$$

$$= \frac{\text{٢ س – ١}}{\text{(س}^{\text{٢}}\text{ - ١)}}$$

٢- حاصل قسمة المقدار الاول على الثاني:

نحول اشارة القسمة الى ضرب وناخذ مقلوب الثاني:

$$\frac{١}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)} \times \frac{(\text{س}+١)}{٢} = \frac{١}{٢(\text{س}-١)}$$