بداية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الثالث

* الجذور :-

تعريف : اذا كان س ، ص $\in$ ح فان العدد س يسمى الجذر النوني للعدد ص إذا كان :

$س^{ن} = ص$ حيث ن : عدد صحيح .

مثال : نقول بان العدد ٥ هو الجذر التربيعي للعدد ٢٥

حيث $٥^{٢} = ٢٥$

وكذلك نقول بانه العدد ٣ هو الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

حيث $٣^{٣} = ٢٧$

نلاحظ أنه في نظام الاعداد الحقيقية ما يلي :-

١) كل عدد موجب له جذران تربيعيان (احدهما موجب والآخر سالب)

مثال :- $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$.

٢) اذا كان العدد سالباً ، فليس له جذر تربيعي .

مثال :- $\sqrt{-٢٥}$ (ليس له جذور حقيقية) .

٣) اذا كان العدد سالباً ، فإن له جذر تكعيبي واحد فقط واشارته سالبه .

مثال :- $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ $(-٢٧ = -٣ \times -٣ \times -٣)$

تعريف :- اذا كانت $n \geq 2$ ، حيث n عدد صحيح فان

$$س^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{س}$$ (اسمه الجذر النوني للعدد س)

س ∋ ح .

الأس الكسري .

مثال :- يمكن كتابة كل من المقادير التالية على الصورة كما هو موضح في الاسفل :

1) $(16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4$.

2) $(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

4) $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$.

قواعد خاصة بالأسس الكسرية :

اذا كانت س، ص ∋ ح ؛ س، ص اعداد موجبة ، ونفرض أن n ، م اعداد صحيحة فإن :

$\boxed{1}$ $\sqrt[n]{س^n} = س^{\frac{n}{n}} = س$.

$\boxed{2}$ $\sqrt[n]{س^م} = س^{\frac{م}{n}}$.

$\boxed{3}$ $\sqrt[n]{س ص} = \sqrt[n]{س} \times \sqrt[n]{ص} = س^{\frac{1}{n}} ص^{\frac{1}{n}}$.

$\boxed{4}$ $\sqrt[n]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[n]{س}}{\sqrt[n]{ص}} = \frac{س^{\frac{1}{n}}}{ص^{\frac{1}{n}}}$ ، ص ≠ صفر .

مثال :- اكتب المقادير التالية بالصورة الجذرية / الصورة الأسية بأبسط صورة :-

1) $\sqrt[5]{س^{5}} = س^{\frac{5}{5}} = س$.

2) $\sqrt[4]{س^{2}} = س^{\frac{2}{4}} = س^{\frac{1}{2}} \leftarrow \sqrt{س}$.

3) $\sqrt[3]{س\,ص} = \sqrt[3]{س}\,\sqrt[3]{ص} = س^{\frac{1}{3}}\,ص^{\frac{1}{3}}$.

4) $\sqrt{\frac{25}{س^{2}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{س^{2}}} = \frac{\pm 5}{س}$.

$(\sqrt{س^{2}} = (س^{2})^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{2}{2}} = س^{1} = س)$

5) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}س^{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \times \sqrt[3]{س^{3}}$

$= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} \times \sqrt[3]{س^{3}}$

$= \frac{2}{3} \times س^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}س$.

---

٢) اللوغاريتمات :-

نشأت فكرة مفهوم اللوغاريتمات عند محاولة إيجاد حل للمعادلة $س = ص^{م}$ بالنسبة للمجهول م .

~~تعريف~~ إذا كان كل من س ، ص عددين موجبين ، بحيث $ص \neq 1$ فإنه يوجد عدد حقيقي م بحيث $ص^{م} = س$ ويسمى العدد م لوغاريتم العدد س للأساس ص ويكتب بالصورة التالية :

$\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \text{م}$.

وباختصار شديد، يمكن كتابة العلاقتين بين المعادلتين السابقتين كما يلي:

$$\text{ص}^{\text{م}} = \text{س} \iff \text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \text{م}$$

، ص > صفر ، ص ≠ ١ ، س > صفر

الأمثلة

$\boxed{1}$ اكتب المقادير التالية على الصورة الأسية:

أ) $\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = ٣ \Leftarrow ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

ب) $\text{لو}_{٣}\ ٩ = ٢ \Leftarrow ٣^{٢} = ٩$

ج) $\text{لو}_{٢٥}\ ٥ = \frac{١}{٢} \Leftarrow (٢٥)^{\frac{١}{٢}} = ٥$

$\sqrt{٢٥} = ٥$

$\boxed{2}$ حول المقادير التالية الى الصورة اللوغاريتمية:

أ) $(٨١)^{\frac{١}{٢}} = ٩ \Leftarrow \text{لو}_{٨١}\ ٩ = \frac{١}{٢}$

ب) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{٨} \Leftarrow \text{لو}_{\frac{١}{٤}}\ \frac{١}{٨} = ٢$

ج) $(٥)^{٣} = ١٢٥ \Leftarrow \text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$

٣ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = \text{م}$$

المطلوب هو ايجاد قيمة م ؟

الحل :- $\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = \text{م} \Leftarrow (١٠)^{\text{م}} = ١٠٠٠$

$\Leftarrow (١٠)^{\text{م}} = ١٠^{٣}$

$\Leftarrow \boxed{\text{م} = ٣}$

٤ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}_{٩}\ \text{س} = ٢$$

المطلوب هو ايجاد قيمة المتغير س ؟

الحل : $\text{لو}_{٩}\ \text{س} = ٢ \Leftarrow ٩^{٢} = \text{س} \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٨١}$

٥ اذا كان لدينا المقدار

$$\text{لو}_{\text{ص}}\ ٢٧ = ٣$$

المطلوب هو ايجاد قيمة ص ؟

الحل :- $\text{لو}_{\text{ص}}\ ٢٧ = ٣ \Leftarrow \text{ص}^{٣} = ٢٧$

$\Leftarrow \text{ص}^{٣} = (٣)^{٣}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ص} = ٣}$

بشكل عام، يوجد أساسان لهما أهمية كبرى في التطبيقات :

أ) الأساس ١٠ (اللوغاريتم العادي أو العشري)

وهذا النوع من الأساس لا يكتب أسفل اللوغاريتم .

مثال :- $لو_{١٠} ١٠٠ = ٢ \Leftarrow لو ١٠٠ = ٢ \Leftarrow ١٠^{٢} = ١٠٠$ (log)

٢) الأساس للعدد $e = هـ = ٢,٧١٨$ (هـ : عدد ثابت)

ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي . (ln)

- خواص اللوغاريتمات :-

١) $لو_{م} ١ = صفر$ (م عدد حقيقي) ،

$لو_{١٠} ١ = صفر$ ، $لو_{هـ} ١ = صفر$.

٢) $لو_{م} م = ١$

$لو_{١٠} ١٠ = ١$ ، $لو_{هـ} هـ = ١$.

٣) $لو_{م} N^{س} = س \, لو_{م} N$.

مثال : اوجد ناتج المقدار التالي بأبسط صورة

$لو_{٥} ٥^{س} = س \, لو_{٥} ٥ = س \times ١ = س$

مثال: اكتب المقدار $\text{لو}_{١٠}\,١٠٠٠$ بأبسط صورة ؟

لو ١٠٠٠

الحل: $\text{لو}_{١٠}\,١٠٠٠ = \text{لو}_{١٠}\,١٠^{٣} = ٣\,\text{لو}_{١٠}\,١٠ = ٣ \times ١ = ٣$

④ $\text{لو}_{م}(\text{س}\,\text{ص}) = \text{لو}_{م}\,\text{س} + \text{لو}_{م}\,\text{ص}$.

مثال: جد قيمة المقدار $\text{لو}\,٥٠$ بأبسط صورة ؟

الحل: $\text{لو}\,٥٠ = \text{لو}(١٠ \times ٥)$

$= \text{لو}_{١٠}\,١٠ + \text{لو}_{١٠}\,٥ = ١ + \text{لو}_{١٠}\,٥$.

⑤ $\text{لو}_{م}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{م}\,\text{س} - \text{لو}_{م}\,\text{ص}$.

مثال: اكتب المقدار التالي بأبسط صورة:

$\text{لو}\,\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ ؟

الحل: $\text{لو}\,\frac{١٠٠}{٢٠٠} = \text{لو}\,١٠٠ - \text{لو}\,٢٠٠$

$= \text{لو}\,١٠^{٢} - \text{لو}(٢ \times ١٠٠)$

$= ٢\,\text{لو}\,١٠ - (\text{لو}\,٢ + \text{لو}\,١٠٠)$

$= ٢ \times ١ - \text{لو}\,٢ - \text{لو}\,١٠^{٢}$

$= ٢ \times ١ - \text{لو}\,٢ - ٢\,\text{لو}\,١٠$

$= ٢ - \text{لو}\,٢ - ٢ \times ١$

$= \cancel{٢} - \text{لو}\,٢ - \cancel{٢} = -\text{لو}\,٢$.

مثال :- $\text{لو}_{10} (\text{س ص})^2$ كتابة هذا المقدار بأبسط صورة ؟

الحل :- $\text{لو}_{10} (\text{س ص})^2 = 2 \,\text{لو}_{10}(\text{س ص})$

$= 2 \left(\text{لو}_{10} \text{س} + \text{لو}_{10} \text{ص}\right)$

$= 2 \,\text{لو س} + 2 \,\text{لو ص}$.

فلو فرضنا أنه قيم

س = ١٠ ، ص = ١٠ فيصبح المقدار في $٤٧_١$

ع النحو الآتي :-

$2 \,\text{لو س} + 2 \,\text{لو ص} = 2 \,\text{لو}\, 10 + 2 \,\text{لو}\, 10$

$= 2 \times 1 + 2 \,\text{لو}\, 10^2$

$= 2 + 4 \,\text{لو}_{10} = 2 + 4 \times 1$

$= 6$
#.

$\boxed{ح}$ $\text{لو}_{م} \frac{1}{\text{س}} = \text{لو}_{م} \text{س}^{-1} = -\text{لو}_{م} \text{س}$ ،

بمعنى $\text{لو}_{م} \frac{1}{\text{س}} = -\text{لو}_{م} \text{س}$ ،

مثال :- $\text{لو}_{٥} \frac{1}{٥} = -\text{لو}_{٥} ٥ = -1$ ،

مثال : $\text{لو} \frac{1}{1000} = \text{لو}\, 1000^{-1} = -\text{لو}\, 1000 = -\text{لو}\, 10^3$

$= -3 \,\text{لو}\, 10$

$= -3 \times 1 = -3$

٧) $\text{لو}_{م} \sqrt[ن]{س} = \text{لو}_{م} س^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن} \text{لو}_{م} س \quad (ن \geq ٢)$.

مثال :- $\text{لو}_{٣} \sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٢٧^{\frac{1}{٣}} = \frac{1}{٣} \text{لو}_{٣} ٢٧$

$= \frac{1}{٣} \text{لو}_{٣} ٣^{٣}$

$= \frac{1}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} \times \text{لو}_{٣} ٣$

$= ١ \times ١ \times ١ = ١$.

$\text{لو}_{٣} \sqrt[٣]{٢٧} = \text{لو}_{٣} ٣$

$= ١$ #

ج) كثيرات الحدود :

تعريف : ان كثيرة الحدود في متغير واحد هي عبارة عن تعبير جبري يكتب على الصورة التالية :-

$أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \cdots + أ_{١} س + أ_{\text{صفر}}$

حيث $ن \geq$ صفر وعدد صحيح

$أ_{ن} ، أ_{ن-١} ، \cdots ، أ_{١} ، أ_{٠}$ اعداد حقيقية .

الامثلة :-

$س^{٥} - س^{٣}$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

$ص^{٢} - ٣ص^{٤}$ (كثيرة حدود من الدرجة الرابعة)

$س^{٣} - س^{\text{صفر}} = س^{٣} - ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$س^{\text{صفر}} = ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الصفرية عدد ثابت)