المحاضرة الأولى من
الأسبوع الثامن

الباب الخامس: المعادلات

أنواع المعادلات :-

1) معادلات خطية في مجهول واحد (س).

أ س = ج .

2) معادلات خطية في مجهولين.

أ س + ب ص = ج .

3) معادلات خطية آنية في مجهولين.

أ س$_1$ + ب ص$_1$ = ج$_1$

أ س$_2$ + ب ص$_2$ = ج$_2$.

4) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد:

أ س^2 + ب س + ج = صفر .

ومنها :-

أ) أ س^2 + ب س = صفر (ج = صفر)

ب) أ س^2 + ج = صفر (ب = صفر)

ج) أ س^2 + ب س + ج = صفر (أ $\neq$ صفر، ب $\neq$ صفر، ج $\neq$ صفر)

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

1) طريقة التحليل (المقص).

٢) طريقة القانون العام :-

والصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو التالي :-

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \mp \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}} .$$

حيث أ : معامل س^2

ب : معامل س

جـ : الحد الثابت .

لاحظوا أنه المقدار $(\text{ب}^2 - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ})$ يسمى بالمميز ويرمز له بالرمز م

ويوجد هنالك ثلاث حالات للمميز :-

(١) اذا كانت م > صفر، يكون للمعادلة $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حلين حقيقيين مختلفين هما :-

$$\text{س}_١ = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{م}}}{٢\,\text{أ}} \quad ، \quad \text{س}_٢ = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{م}}}{٢\,\text{أ}} .$$

(ويسميان أيضاً جذرا المعادلة) .

(٢) اذا كانت م = صفر، يكون للمعادلة $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حل وحيد فقط وهو $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}}$.

(٣) اذا كانت م < صفر، يكون للمعادلة $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حلين غير حقيقيين (بمعنى أنه لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة)

مثال :- حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) $٢س^٢ + س - ١٥ = صفر$.

٢) $س^٢ + ٢س + ٣ = صفر$.

٣) $٢س^٢ - ٢س = -\frac{١}{٢}$.

الحل :

① $٢س^٢ + س - ١٥ = صفر$.

لاحظوا أن $أ = ٢$ ، $ب = ١$ ، $جـ = -١٥$.

وباستخدام قانون المميز نحصل على :-

$ب^٢ - ٤أجـ = ١^٢ - ٤(٢)(-١٥) = ١ + ١٢٠ = ١٢١$.

وبما أن المميز > صفر ، إذاً للمعادلة حلان حقيقيان هما :-

$س_١ = \frac{-١ + \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ + ١١}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$.

$س_٢ = \frac{-١ - \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ - ١١}{٤} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$.

② $س^٢ + ٢س + ٣ = صفر$.

لاحظوا أنه هنا $أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = ٣$.

وبحساب المميز $ب^٢ - ٤أجـ$ نحصل على :-

$٤ - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨ < صفر$.

لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة حيث أن المميز سالباً .

٣) $٢س^٢ - ٢س = \frac{-١}{٢}$.

لحل هذه المعادلة من الأفضل إعادة كتابتها على الصورة العامة

$٢س^٢ - ٢س + \frac{١}{٢} = صفر$.

$أ = ٢$ ، $ب = -٢$ ، $جـ = \frac{١}{٢}$.

وباستخدام قانون المميز نحصل على :

$(-٢)^٢ - ٤(٢)(\frac{١}{٢}) = ٤ - ٤ = صفر$

إذن المعادلة لها حل حقيقي واحد هو :

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢(٢)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$.

ولو أردنا التأكد من صحة الحل، فإننا نقوم بتعويض قيمة

$س = \frac{١}{٢}$ في المعادلة الأصلية لنحصل على :

$٢س^٢ - ٢س = \frac{-١}{٢}$

عندما $س = \frac{١}{٢}$:

$٢(\frac{١}{٢})^٢ - ٢(\frac{١}{٢}) \stackrel{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$٢(\frac{١}{٤}) - ١ \stackrel{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$\frac{١}{٢} - ١ \stackrel{?}{=} \frac{-١}{٢}$

$\frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٢}$ ∴ الحل صحيح .

ملاحظة: عند استخدام القانون العام لإيجاد جذور معادلة تربيعية بمتغير واحد، لابد من كتابة المعادلة في الصورة العامة:

$$أ س^2 + ب س + جـ = صفر$$

⑤ المتراجحات الخطية بمجهول واحد:-

- تعريف: المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ احد الاشارات التالية:-

$<$ ، $>$ ، $\leq$ ، $\geq$ بدلاً من اشارة المساواة

مثال: $3س + 11 < 5س - 1$ (متراجحة خطية بمجهول واحد).

$$4س + 3 \geq 1$$

هي امثلة على متراجحات خطية بمجهول واحد.

- عملية حل المتراجحات الخطية بمجهول واحد (س) هي عبارة عن إيجاد قيمة ~~المتغ~~ المتغير س الذي يحقق طرفي المتراجحة المعطاة، ويجب ملاحظة أن اشارة المتراجحة تتغير عند الضرب أو القسمة بعدد سالب، أما بقية العمليات كالجمع أو الطرح من عدد موجب أو سالب وكذلك القسمة والضرب لعدد موجب فتبقى اشارة المتراجحة كما هي دون تغيير.

مثال ١ : اوجد حل المتراجحة التالية :

٣س + ١١ ≥ ٥س − ١ .

الحل : نستخدم نفس الاسلوب المتبع في طريقة حل المعادلات الخطية في مجهول واحد حيث نقوم بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والاعداد الحقيقية في الطرف الآخر .

٣س − ٥س ≥ −١ − ١١

−٢س ≥ −١٢

وبالقسمة على معامل س (−٢) نحصل على :

س ≤ ٦ (لاحظوا ان اشارة المتراجحة تغيرت عند القسمة على العدد −٢)

وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي : {س ∈ ح : س ≤ ٦}

أو

(−∞ ، ٦] .

مثال : اوجد مجموعة حل المتراجحة :

٤س + ٣ ≥ ١ ؟

الحل : ٤س ≥ ١ − ٣

٤س ≥ −٢

س ≥ $\frac{-٢}{٤}$ (قسمة الطرفين على معامل س = ٤)

$\text{س} \geq -\frac{1}{2}$.

مجموعة الحل $= \{ \text{س} \in \text{ح} : \text{س} \geq -\frac{1}{2} \} = [-\frac{1}{2} , \infty)$.

- بعض التمارين على الباب الخامس :-

س: أوجد حل كل من المعادلات التالية :-

أ) $-٤\text{س} - ٥ = -٦\text{س} + ٥$.

الحل: $-٤\text{س} + ٦\text{س} = ٥ + ٥$ (تجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والأعداد الحقيقية في الطرف الآخر) .

$٢\text{س} = ١٠$

$\boxed{\text{س} = ٥}$

ب) $٣\text{س} - ٥ = ٢\text{ص}$.

الحل: $\frac{٣\text{س}}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٣}$

$\boxed{\text{س} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٣}}$

نلاحظ أنه لدينا عدد لا نهائي من الحلول حيث أن قيمة المتغير س تعتمد على قيمة المتغير ص .

نفرض أن: ص = ٥ ، فتصبح قيمة س كالتالي :-

$\text{س} = \frac{٢(٥) + ٥}{٣} \Leftarrow \text{س} = \frac{١٥}{٣} \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٥}$

ج) ٢س − ٣ص = ٧ ——— (١)

٣س + ص = ٥ ——— (٢)

الحل: باستخدام طريقة الحذف، نحصل على:

نضرب المعادلة الثانية بالعدد ٣:

٢س − ~~٣ص~~ = ٧

٩س + ~~٣ص~~ = ١٥

١١س = ٢٢ ⇐ س = ٢٢ / ١١ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٢}$

بتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢)، نحصل على:

٣(٢) + ص = ٥ ⇐ ص = ٥ − ٦ ⇐ $\boxed{\text{ص} = -١}$

حل آخر: باستخدام طريقة التعويض:

من خلال المعادلة الثانية، نجد كتابة ص بدلالة س:

$\boxed{\text{ص} = ٥ - ٣\text{س}}$ ——— (٣)

نعوض المعادلة (٣) في المعادلة (١) لنحصل على:

٢س − ٣(٥ − ٣س) = ٧

٢س − ١٥ + ٩س = ٧

١١س = ٧ + ١٥

١١س = ٢٢ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٢}$

وبتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢) نحصل على قيمة ص أيضاً:

٣(٢) + ص = ٥

$\boxed{\text{ص} = -١}$

د) $٣ س^٢ + ٥س = $ صفر .

الحل : بأخذ س العامل مشترك من الطرف الأيمن، نحصل على :

س (٣س + ٥) = صفر ،

$\boxed{\text{س = صفر}}$ أو ٣س + ٥ = صفر

$٣س = -٥ \Leftarrow \boxed{س = \frac{-٥}{٣}}$

هـ) $٤س^٢ - ١٢س + ٩ = $ صفر

الحل: باستخدام القانون العام، يمكن ايجاد حل هذا النوع من المعادلات (لاحظوا أن معامل $س^٢ \neq ١$).

من خلال المميز :

$م = ب^٢ - ٤أجـ = (-١٢)^٢ - ٤(٤)(٩)$
$= ١٤٤ - ١٤٤$
$=$ صفر .

∴ للمعادلة حل وحيد فقط :

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-١٢)}{٢(٤)} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$.

للتأكد :

$٤(\frac{٣}{٢})^٢ - ١٢(\frac{٣}{٢}) + ٩ \stackrel{?}{=}$ صفر $\Leftarrow ٩ - ١٨ + ٩ =$ صفر
صفر = صفر

∴ الحل صحيح