محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الحادي عشر

الباب السابع : المحددات

كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة :-

إذا كان لدينا المصفوفة $\underline{أ}$ وأوجدنا مصفوفة أخرى ولتكن $\underline{ب}$ حيث

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{أ} = \text{مصفوفة الوحدة}$$

عندئذٍ نقول بأن $\underline{ب}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$.

ونرمز للنظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ بالرمز $\underline{أ}^{-1}$

ولإيجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة ٢، فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :-

نقول إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$$

فإن

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$$

مثال١ :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$.

الحل: الخطوة الأولى: اجد قيمة المحدد للمصفوفة $\underline{أ}$:

$$(١- \times ١) - \text{صفر} \times ٤ = |\underline{أ}|$$

$$. \; ١ = (١-) - \text{صفر} =$$

$$\begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} ١ = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \frac{١}{١} = \underline{أ}^{١-}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} =$$

للتأكد من صحة الحل:

هل $\underline{أ} \times \underline{أ}^{١-} =$ مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} ٤\times١- + ١\times٤ & ١-\times١- + \text{صفر}\times٤ \\ ٤\times\text{صفر} + ١\times١ & ١- \times \text{صفر} + \text{صفر}\times١ \end{bmatrix}$$

مثال ٢ :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \; ؟$$

الحل :-

١) نجد محدد المصفوفة ب :-

$$|ب| = (١ \times ٣) - (-١ \times ٢)$$
$$= ٣ - (-٢) = ٣ + ٢ = ٥$$

$$ب^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{-٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحة الحل :-

هل $ب \times ب^{-١} =$ مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{-٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$$

$$\frac{٥}{٥} \quad \begin{bmatrix} ١ \times \frac{٣}{٥} + ٢ \times \frac{١}{٥} & ١ \times \frac{-٢}{٥} + ٢ \times \frac{١}{٥} \\ -١ \times \frac{٣}{٥} + ٣ \times \frac{١}{٥} & -١ \times \frac{-٢}{٥} + ٣ \times \frac{١}{٥} \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$$

$\frac{صفر}{٥}$ $\quad$ $\frac{صفر}{٥}$ $\quad$ $\frac{٥}{٥}$

- طريقة كرامر لحل نظام من معادلات خطية بمتغيرين :-

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات في الصورة التالية :-

$$أ_{١١} س_١ + أ_{١٢} س_٢ = جـ_١$$
$$أ_{٢١} س_١ + أ_{٢٢} س_٢ = جـ_٢ \quad .$$

① سنعرف محدد المعاملات Δ (دلتا) كما يلي :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} \quad ، \text{ بفرض أن } \Delta \neq \text{صفر} \; .$$

حيث نلاحظ أن العمود الأول هو معاملات $س_١$ والعمود الثاني هو معاملات $س_٢$.

② سنكون مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول (معاملات $س_١$) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta س_١$:

$$\Delta س_١ = \begin{vmatrix} جـ_١ & أ_{١٢} \\ جـ_٢ & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$

وكذلك سنستبدل عناصر العمود الثاني (معاملات $س_٢$) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta س_٢$:

$$\Delta_{س_2} = \begin{vmatrix} أ_{11} & ج_1 \\ أ_{12} & ج_2 \end{vmatrix} .$$

③ لإيجاد قيمة $س_1$ نقسم $\Delta_{س_1}$ على Δ ، وقيمة $س_2$ نحصل عليها من خلال قسمة $\Delta_{س_2}$ على Δ بمعنى :-

$$س_1 = \frac{\Delta_{س_1}}{\Delta} \quad ، \quad س_2 = \frac{\Delta_{س_2}}{\Delta} .$$

مثال :- باستخدام طريقة كرامر، أوجد حل النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$3س_1 + 4س_2 = 2$$
$$2س_1 + 5س_2 = 3$$

(الصورة القياسية: المتغيرات في طرف والثوابت في الطرف الآخر)

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5 - 2\times4 = 15 - 8 = 7 .$$

$$\Delta_{س_1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5 - 3\times4 = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta_{س_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\times3 - 2\times2 = 9 - 4 = 5 .$$

$$س_1 = \frac{\Delta_{س_1}}{\Delta} = \frac{-2}{7} \quad ، \quad س_2 = \frac{\Delta_{س_2}}{\Delta} = \frac{5}{7} .$$

مثال :- حل النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر

٤س١ − ٢س٢ − ١٠ = صفر
٣س١ − ٥س٢ − ١١ = صفر

الحل: لابد من اعادة كتابة هذا النظام في الصورة القياسية :-

٤س١ − ٢س٢ = ١٠
٣س١ − ٥س٢ = ١١

١) نجد محدد المعاملات :-

Δ = | ٤   −٢ ؛ ٣   −٥ | = (٤ × −٥) − (٣ × −٢)
= −٢٠ − (−٦) = −٢٠ + ٦ = $\underline{-١٤}$ ≠ صفر

٢) نجد Δس١ :

Δس١ = | ١٠   −٢ ؛ ١١   −٥ | = (١٠ × −٥) − (١١ × −٢)
= −٥٠ − (−٢٢) = −٥٠ + ٢٢
= $\underline{-٢٨}$.

٣) نجد Δس٢ :-

Δس٢ = | ٤   ١٠ ؛ ٣   ١١ | = (٤ × ١١) − (٣ × ١٠)
= ٤٤ − ٣٠ = ١٤

٤) س١ = $\frac{-٢٨}{-١٤}$ ⟸ $\boxed{س١ = ٢}$ ، س٢ = $\frac{١٤}{-١٤}$ ⟸ $\boxed{س٢ = -١}$

وللتأكد من صحة الحل :-

٤س١ - ٢س٢ = ١٠

٣س١ - ٥س٢ = ١١

(س١ = ٢
س٢ = ١-)

المعادلة الأولى :-

(٤×٢) - (٢×١-) = ٨ - (٢-) = ٨+٢ = ١٠

المعادلة الثانية :

(٣×٢) - (٥×١-) = ٦ - (٥-) = ٦+٥ = ١١

فقط للتذكير أنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق بالصورة :-

٢س١ - س٢ = ٥

٣س١ - ٥س٢ = ١١

نهاية الفصل السابع من المحاضرات