# الباب الأول: مجموعات الأعداد

١- مفهوم المجموعة:

- يعتبر مفهوم المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات. والمجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما. تكتب عناصر أي مجموعة داخل قوسين على الشكل التالي { }، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف العربية س، ص، ع، ...

ومثال على ذلك، يمكن التعبير عن مجموعة الاعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ على النحو الآتي:

س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

- يمكن التعبير عن عناصر المجموعات بأحد الطريقتين التاليتين:

أ- ذكر العناصر: وهي الطريقة التي يتم فيها سرد جميع عناصر المجموعة بين القوسين { } كما في المثال السابق.

ب- طريقة الوصف (القانون): وتتم من خلال ذكر الخاصية أو الصفة التي تميز عناصر هذه المجموعة، ففي المثال السابق يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٥ على الصورة التالية:

س = { س: س عدد صحيح أكبر من أو يساوي ١ وأقل من أو يساوي ٥ }

## ٢- مجموعات الأعداد:

سنتعرف في هذا البند على بعض من مجموعات الأعداد الشهيرة ومنها:

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية ( الاعداد الموجبة):

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب على النحو الآتي:

ط = { ١، ٢، ٣، ... }

ب – مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز ص وتكتب على النحو الآتي:

ص = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ... }

جـ - مجموعة الأعداد النسبية:

ويرمز لها بالرمز ن وهي جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث ب

لا تساوي صفر، أ، ب عددان حقيقيان، ومن الأمثلة على ذلك $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٥}$ .

د – مجموعة الأعداد غير النسبية:

ورمزها نَ وهي جميع الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل عدد نسبي، زمن الأمثلة عليها $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ .

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية:

ورمزها ح وهي المجموعة التي تحتوي جميع الأعداد في المجموعات سابقة الذكر.

المحاضرة المسجلة الثانية

# محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الأول

- بعض التعريفات حول المجموعة :-

① المجموعة الجزئية :-

نقول بأن المجموعة $P$ هي مجموعة جزئية من $ب$ إذا كان كل عنصر موجود في $P$ موجود أيضاً في $ب$.

فمثلاً إذا كانت

$P = \{ ١ ، ٣ ، ٥ \}$ .

$ب = \{ س : س \text{ عدد صحيح} \}$ .

نقول بأن $P \subset ب$ .

ونلاحظ أيضاً إذا كان لدينا المجموعة

$ج = \{ \frac{١}{٢} ، ١ ، ٥ \}$ .

نقول بأنه $ج \not\subset ب$ (ج ليست مجموعة جزئية من ب)

② المجموعة الكلية :-

ورمزها لها $ك$، وهي عبارة عن المجموعة التي تضم جميع المجموعات الجزئية قيد الدراسة .

ملاحظة : إذا لم المجموعة الكلية في مسألة ما، نعتبر المجموعة مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الكلية .

٤) المجموعة الخالية : يرمز لها بالرمز $\phi$ أو $\{\}$ .
وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر .

- ملاحظة : اذا كان لدينا المجموعة

$P = \{٥، ٧، ٩\}$ ، $ب = \{٣، ٥، ٧، ٩، ١١\}$

فنقول بأن العنصر $٥ \in P$ ، أما العنصر $١١ \notin P$ .

(عملية الانتماء تكون بين عنصر ومجموعة) .

اما عملية الاحتواء فتكون بين مجموعة واخرى .

فنقول بأن المجموعة $P \subset$ المجموعة ب .

$ب \not\subset P$

- ملاحظة : تساوي مجموعتين مثل P، ب إذا تساوت جميع العناصر في المجموعتين .

فمثلاً إذا كانت

$P = \{١، ٣، ٤، ٢\}$ ، $ب = \{١، ٤، ٣، ٢\}$

فنقول بأن $P = ب$ .

## ٥ العمليات الجبرية على المجموعات :

### ١) عملية الاتحاد :

تعريف: إذا كان أ، ب أي مجموعتين في ك فإن اتحاد أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ أو الموجودة في ب .

الرمز : $أ \cup ب = \{ س : س \in أ \text{ أو } س \in ب \}$

مثال : إذا كانت

$أ = \{ ٣، ٤، ٥ \}$ .

$ب = \{ ٣، ٧، ٩ \}$ .

فإن ناتج عملية اتحاد أ مع ب هي :

$أ \cup ب = \{ ٣، ٤، ٥، ٧، ٩ \}$ .

### ٢ عملية التقاطع :

تعريف : اذا كان أ، ب مجموعتين في ك، فإنه تقاطع أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ والموجودة في ب ( العناصر المشتركة لكلا المجموعتين ) .

الرمز : $أ \cap ب = \{ س : س \in أ \text{ و } س \in ب \}$ .

وبالرجوع إلى المثال السابق نلاحظ أن $أ \cap ب = \{ ٣ \}$ .

③ المكملة (المتممة) للمجموعة .

تعريف : إذا كان لدينا المجموعة الجزئية $P$ في $ك$ ، فإن متممة المجموعة $P$ ويرمز لها بالرمز $\overline{P}$ هي جميع العناصر التي تنتمي الى $ك$ ولا تنتمي إلى $P$ .

بالرموز : $\overline{P} = \{س : س \in ك \text{ و } س \notin P\}$ .

مثال :- اذا كانت $ك = \{1، 2، 3، \ldots، 10\}$

وكانت $P = \{1، 3، 5، 7، 9\}$ ⇐ الاعداد الفردية من $ك$ ،

مجموعة جزئية من $ك$ فإن

$\overline{P} = \{2، 4، 6، 8، 10\}$ ⇐ الاعداد الزوجية من $ك$

وعكس التحقق من أن $P \cup \overline{P} = ك$ .

$P \cap \overline{P} = \emptyset$ .

(عملية اتحاد اي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الكلية $ك$)

(عملية تقاطع اي مجموعة مع متممتها يعطينا المجموعة الخالية $\emptyset$)

④ الفرق بين مجموعتين :

تعريف : اذا كان لدينا المجموعتين $P$ ، $ب$ فإن الفرق بينهما هو جميع العناصر التي تنتمي الى $P$ ولا تنتمي إلى $ب$ .

بالرموز : $P - ب = \{س : س \in P \text{ و } س \notin ب\}$ .

مثال : إذا كانت

ك = {س : س عدد صحيح موجب أقل من العدد ١٠} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨}

حيث كانت أ، ب مجموعات جزئية من ك ، فإن

١) ك - أ =

٢) ك - ب =

٣) أ - ب =

٤) ب - أ =

٥) أ - ك =

الحل : ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨} .

١) ك - أ = {٦، ٧، ٨، ٩} .

٢) ك - ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٩}

٣) أ - ب = {١، ٢، ٣، ٤} .

٤) ب - أ = {٦، ٧، ٨} .

٥) أ - ك = ∅ .

مثال :- اذا كانت

ك = {١، ٢، ٣، ٤، ... ، ١٠}

أ = {س : س عدد فردي} = {١، ٣، ٥، ٧، ٩}

ب = {ص : ص عدد زوجي} = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠}

حيث أ، ب ⊂ ك ، اثبت صحة العلاقات التالية :

١) أ ∪ ب = ك .

٢) أ ∩ ب = ∅ .

٣) $\overline{أ}$ ∪ ب = ب ∪ ب = ب .

٤) $\overline{أ}$ ∩ $\overline{ب}$ = $\overline{ب}$ ∩ أ = ∅ .

٥) أ − ب = أ .

٦) ب − أ = ب .

٧) ك ∩ أ = أ .

٨) ك ∪ ب = ك .

٩) $\overline{ك}$ = ∅ .

١٠) $\overline{∅}$ = ك .

$\overline{ك}$ = ∅
$\overline{∅}$ = ك
أ ∩ ك = أ
أ ∪ ك = ك
ك − أ = $\overline{أ}$
أ − ك = ∅

أنهينا الباب الأول لمقرر مبادئ الرياضيات
نلتقي في المحاضرة الثانية من الأسبوع الأول .

## الباب الثاني :- العمليات الأساسية في الجبر .

في العادة، يوجد لدينا أربع عمليات أساسية في الجبر وهي

① الجمع ، ② الطرح ، ③ الضرب ، ④ القسمة .

أولاً :- سنتعرف على كيفية إجراء العمليات الجبرية الأربع مع الأعداد الحقيقية :-

① مثلاً : إذا كان لدينا العددين ٢ ، -٥

فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

٣ + (-٥) = -٢ (إذا كانت الإشارات مختلفة في عملية الجمع فإننا نأخذ الفرق بينهما مع وضع إشارة العدد الأكبر)

وكذلك نقول بأن :

-٣ + ٥ = ٢ .

أما إذا كان لدينا العددين -٣ ، -٥

فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

-٣ + -٥ = -٨ (إذا كانت الإشارات متشابهة لكلا العددين، فإننا نجمع العددين مع وضع الإشارة نفسها) .

وكذلك نقول بأن :-

٣ + ٥ = ٨ ،

٢) عملية الطرح :-

يمكن النظر الى عملية الطرح بأنها عكس لعملية الجمع وبذلك يمكن تطبيق القواعد السابقة في عملية الطرح .

مثال :- إذا اردنا أن نجد الفرق بين العددين

٢ ، ٥ فنقول بأن :-

$$٢ - ٥ = ٢ + (-٥) = -٣$$

وكذلك

$$-٣ - ٥ = -٣ + (-٥) = -٨ .$$

وكذلك

$$-٤ - ٩ = -٤ + (-٩) = -١٣ .$$

وكذلك

$$-٣ - (-٢) = -٣ + (+٢) = -١$$

* يمكن استنتاج أن عملية الجمع والطرح هي عملية واحدة لكن عملية الجمع لجبرى .

٣) عملية الضرب :-

مثلاً :- اذا كان لدينا العددين ٣- ، ٥

فإن حاصل ضربهما هو ٣- × ٥ = ١٥-

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين مختلفين في الإشارة ، فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع إشارة العدد السالب)

وكذلك ٣ × ٥- = ١٥-

أما اذا كان لدينا العددين ٢، ٥ أو ٢-، ٥-

فإن حاصل الضرب هو :-

٢ × ٥ = ١٠

٢- × ٥- = ١٠

(نجد أنه عند ضرب عددين متشابهين في الإشارة فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع إشارة الموجب)

٤) عملية القسمة :-

اذا اردنا تقسيم العددين ١٥، ٣ فإنه يمكن كتابة الناتج في الصورة التالية :-

١٥ ÷ ٣ = ١٥/١ × ١/٣ = ١٥/٣ = ٥

(نجد أنه عند تحويل عملية القسمة الى عملية ضرب نأخذ مقلوب العدد الثاني)

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية :-

١) $-٢٠ \div ٤ = -٢٠ \times \frac{١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$

٢) $٢٠ \div -٤ = ٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$ .

٣) $-٢٠ \div -٤ = -٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$ .

النتيجة :- نلاحظ أن عملية الضرب والقسمة هي عملية واحدة
بحيث تحول عملية القسمة الى ضرب مع تطبيق قواعد الضرب عليها ) .

- بعض الملاحظات على الأولويات عند ايجاد ناتج مقدار عددي :

اذا اردنا ان نجد ناتج المقادير التالية :-

١) $-٢ + ٥ \times -٣ = -١٧ = (-١٥) + -٢$

٢) $(-٢ + ٥) \times -٣ = (٣) \times -٣ = -٩$

٣) $١٠ \div ٢ - ٥ = ٥ - ٥ = صفر$ .

٤) $٢ \times -٣ + ٢ \div (١ - ٥) = ٢ \times -٣ + ٢ \div (-٤)$

$= -٩ + \frac{-٢}{٤}$

$= \frac{-٩ \times ٢}{٢ \times ١} + \frac{-١ \times ١}{٤ \times ١} = \frac{-١٨}{٢} + \frac{-١}{٤}$

$= \frac{-٣٩}{٤}$ .

الاستنتاج :

دائماً الأولوية للعمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية على النحو الآتي :

1) في حال وجود الأقواس، فإننا نجري العملية داخل هذه الأقواس.

2) تكون الأولوية لعملية الضرب والقسمة.

3) آخر الأولويات لعملية الجمع والطرح.

مثال: أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

1) $-٩ \div ٣ \times ٤ = -٣ \times ٤ = -١٢$

2) $(-٩ \div ٣) \times ٤ = -٣ \times ٤ = -١٢$

3) $(-٩ - ٣) + ٤ \times ٢ = -١٢ + ٦ = -٦$

ملاحظة :-

i) عند ضرب عدد كسري بعدد كسري فإننا نضرب البسط في البسط ومقسوماً على المقام في المقام.

مثال: $\frac{-٣}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{-٣}{٢٠}$

ii) في حالة الجمع، فإنه لابد من توحيد المقامات قبل إجراء عملية الجمع.

مثال: $\frac{-٣ \times ٥}{٤ \times ٥} + \frac{١ \times ٤}{٥ \times ٤} = \frac{-١٥}{٢٠} + \frac{٤}{٢٠} = \frac{-١١}{٢٠}$



نلتقي محاضرة يوم الأحد من الأسبوع القادم

بداية محاضرة الأسبوع الثاني عشر

- الكسور

نشاط: إذا أردنا أن نجد ناتج المقدار التالي:

$$\frac{٤}{١٠} + \frac{٥}{١٠} = \frac{٤ \times ١}{٤ \times ٥} + \frac{١ \times ٥}{٤ \times ٥}$$

$$= \frac{٧}{١٠}$$

$$\frac{٣ \times ٢}{٧ \times ٤} - \frac{١ \times ٤}{١ \times ١٤} = \frac{٦}{١٤} - \frac{٤}{١٤} = \frac{٤}{١٤}$$

إذا النتيجة في حالة جمع وطرح الأعداد الكسرية، لابد من عملية توحيد المقامات أولاً باستخدام المضاعف المشترك الأصغر، وبعدها نقوم بجمع أو طرح البسط مع البسط محتفظاً على المقام نفسه

نشاط: لو أردنا أن نجد قيمة المقدار التالي:

$$\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٣ \times ٤}{٣٦} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

(نضرب البسط مع البسط والمقام في المقام)

لو أخذنا المثال السابق وأجرينا عليه عملية القسمة

$$\frac{٣}{٤} \div \frac{٤}{٩} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٢٧}{٨}$$

(لابد من تحويل الإشارة للصحة إذا خرجت مع أخذ مقلوب الكسر الثاني)

خصائص الأعداد الطبيعية :-

إذا كان لدينا س ، ص ∈ ع فإن هذه الأعداد تحقق الخواص التالية :-

1) الخاصية الإبدالية :-

س + ص = ص + س .

مثال :- ٣ + ٥ = ٥ + ٣ = ٨ .

٣- + ٥ = ٥ + ٣- = ٢ .

على الجمع

2) الخاصية التجميعية :-

(س + ص) + ع = س + (ص + ع)

مثال :-

(٥- + ١٣) + ٢ = ٥- + (١٣ + ٢)

٨ + ٢ = ١٣ + (٣-)

١٠ = ١٠

على عملية الجمع

(٥ × ٢) × ٤ = ٥ × (٢ × ٤)

(١٠) × ٤ = ٥ × (٨)

٤٠ = ٤٠

على عملية الضرب

(س ص) ع = س (ص ع) .

٣ خاصية التوزيع :- (توزيع الضرب على الجمع)

$س(ص + ع) = س ص + س ع$ .

مثال :- $-٣(٥ + ٢) = (-٣ \times ٥) + (-٣ \times ٢)$

$= -١٥ - ٦$

$= -٢١$ .

٤ خاصية الاختصار (الحذف) :-

$س + \underline{س} = ص + \underline{س} \Leftarrow ع + \underline{س} = ص + \underline{س} \Leftarrow ع = ص$

مثال :- $ع + ٣ = -٥ + ٣ \Leftarrow ع + ٣ = -٥ + ٣$

$\boxed{ع = -٥}$

$\underline{س} ص = \underline{س} ع \Leftarrow ص = ع$ .

مثال : $٣ \times ص = ٣ \times ٩ \Leftarrow \boxed{ص = ٩}$

٥ خاصية النظير :-

أ) نظير الجمع :-

$س + (-س) = ٠ = (-س) + س$ .

مثال :- $١٠ + (-١٠) = ١٠ - ١٠ = ٠$ .

٥) نظير الضرب :-

$س \times \frac{1}{س} = 1$ حيث $س \neq 0$

$\frac{1}{س}$ :- النظير الضربي للمتغير س (مقلوب المتغير س)

مثال :- $-3 \times \frac{1}{-3} = 1$

٦) خاصية الحذف :-

إذا كان $س ص = ع ص \iff س = ع$ أو $ص = 0$

مثال :- $س ص = 0 \Rightarrow ص = 0$ أو $س = 0$

وكذلك $-3 س ص = ع ص \Rightarrow -3 س = ع \Rightarrow س = \frac{ع}{-3}$

أو

$ص = 0$

- سندرس ايضاً بعض من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات ومنها :-

١ الأسس والجذور .

٢ اللوغاريتمات .

٣ كثيرات الحدود .

---

بدايةً سنبدأ في مفهوم الأسس :-

## الأسس :-

تعريف :- اذا كان م عدداً موجباً وكان س ، ص عددين حقيقيين ، فيمكن تعريف القواعد التالية لأسس :-

١ $س^{م} = س \times س \times س \times \dots \times س$ (م من المرات)

م - من المرات

مثال :- $س^{٢} = ص \times ص \times س \times س$ .

حالة خاصة :- $س^{صفر} = ١$ ، $س \neq صفر$

[٢] $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$ ، $س \neq ٠$ ، $م \in ط$ .

مثال :- $(٥)^{-٣} = \frac{١}{٥^{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$ .

مثال :- $\frac{١}{٢^{-٣}} = ٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ .

[٤] $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{م}$ ، $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ ، $م \in ط$

مثال :- $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$ .

## مفهوم الأُسس :-

إذا كان س عدد حقيقي ، وكانت ن عدد صحيح فإن

$س^{ن} = س \times س \times س \times \dots \times س$ (ن مرة)

$س^{صفر} = 1$

$س^{-م} = \frac{1}{س^{م}}$ .

$(\frac{س}{ص})^{-م} = (\frac{ص}{س})^{م}$ .

## خواص الأُسس :-

إذا كانت س ، ص ∈ ح ، وكان م ، ن ∈ ص فإن

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$ .

(الأس ، الأساس)

مثال :-

$س^{٣} \times س^{٥} = س^{٨}$ .

$س^{-٣} \times س^{-٥} = س^{-٨} = \frac{1}{س^{٨}}$ .

$س^{٣} \times ص^{٤}$ (الناتج هو في أبسط صورة)

$س^{٣} \times ص^{٤} \neq (س ص)^{٧}$

ج) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، حيث $س \neq ٠$ ، $م, ن$ أعداد صحيحة.

مثال :- $\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = س^{٣-٥} = س^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$.

إعادة كتابة المقدار في الصورة الثانية :-

$\frac{س^{٣}}{س^{٥}} = \frac{س \times س \times س}{س \times س \times س \times س \times س} = \frac{١}{س^{٢}}$.

مثال :- $\frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = س^{-٣-٥} = س^{-٨} = \frac{١}{س^{٨}}$.

$\frac{س^{-٣}}{س^{٥}} = \frac{١}{س^{٣} \times س^{٥}} = \frac{١}{س^{٨}}$.

ج) $\frac{س^{-٢}}{س^{-٥}} = س^{-٢-(-٥)} = س^{-٢+٥} = س^{٣}$.

أو استطيع حلها بطريقة أخرى :-

$\frac{س^{-٢}}{س^{-٥}} = \frac{س^{٥}}{س^{٢}} = س^{٥-٢} = س^{٣}$.

٣ $(س^{م})^{ن} = س^{مـن}$ .

مثال :- $(س^{٣})^{-٢} = س^{-٦} = \frac{١}{س^{٦}}$ ⇐ ارفع الأس ١ لصورة

$(\frac{١}{٥}س)^{١٠} = س^{\frac{١}{٥} \times ١٠} = س^{\frac{١٠}{٥}} = س^{٢}$ .

٤ $(س ص)^{م} = س^{م} ص^{م}$ .

مثال :- $(٥ ص)^{٢} = ٥^{٢} \times ص^{٢}$

$= ٢٥ ص^{٢}$ .

مثال :- اذا اردنا ان نكتب المقدار التالي بابسط صورة

$(٤ س ص)^{-٢} = \frac{١}{(٤ س ص)^{٢}} = \frac{١}{١٦ س^{٢} ص^{٢}}$ .

٥ $(\frac{س}{ص})^{م} = \frac{س^{م}}{ص^{م}}$ ، $ص \neq ٠$ .

مثال : $(\frac{٢٥}{١٦})^{٢} = \frac{(٢٥)^{٢}}{(١٦)^{٢}} = \frac{٦٢٥}{٢٥٦}$ .

$(\frac{٣س^{-٢}}{٥ ص^{٣}})^{-٣} = (\frac{٥ ص^{٣}}{٣ س^{-٢}})^{٣} = (٥ ص^{٣} \times \frac{س^{-٢}}{٣})^{٣}$

$= (٥ س^{-٢} ص^{٣})^{٣}$

$$(٥\ س^{٢}\ ص^{٣})^{٣} = (٥)^{٣}\ س^{٦}\ ص^{٩} .$$

مثال :- اوجد المقدار التالي ابسط صورة :-

$$\left(\frac{س^{-٣}\ ص^{-٦}}{ع^{٤}\ ج^{-٢}}\right)^{-٣} = \frac{س^{٩}\ ص^{١٨}}{ع^{-١٢}\ ج^{٦}}$$

$$= \frac{ع^{١٢}\ ج^{٦}}{٨\ س^{٩}\ ص^{١٨}}$$

نكمل محاضرة يوم الثلاثاء من الاسبوع الثاني

بداية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع الثالث

* الجذور :-

تعريف : اذا كان ن ∈ ط ، ص ∈ ح فان العدد س يسمى الجذر النوني للعدد ص إذا كان :

$س^{ن} = ص$ حيث ن : عدد صحيح .

مثال : نقول بان العدد ٥ هو الجذر التربيعي للعدد ٢٥

حيث $٥^{٢} = ٢٥$

وكذلك نقول بانه العدد ٣ هو الجذر التكعيبي للعدد ٢٧

حيث $٣^{٣} = ٢٧$

نلاحظ أنه في نظام الاعداد الحقيقية ما يلي :-

١) كل عدد موجب له جذران تربيعيان (احدهما موجب والآخر سالب)

مثال :- $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$ .

٢) اذا كان العدد سالباً ، فليس له جذر تربيعي .

مثال :- $\sqrt{-٢٥}$ (ليس له جذور حقيقية) .

٣) اذا كان العدد سالباً ، فإن له جذر تكعيبي واحد فقط واشارته سالبة .

مثال :- $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ $(-٢٧ = -٣ \times -٣ \times -٣)$

تعريف :- اذا كانت $N \geq 2$ ، حيث N عدد صحيح فإن

$س^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{س}$ (يسمى الجذر النوني للعدد س)

$س \in ح$ .

الأس الكسري .

مثال :- يمكن كتابة كل من المقادير التالية على الصورة كما هو موضح في الأسفل :

أ) $(١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦} = \pm ٤$ .

ب) $(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

ج) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

د) $(\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \pm \frac{١}{٢}$ .

قواعد خاصة بالأس الكسري :

اذا كانت $س ، ص \in ح$ ؛ $س ، ص$ اعداد موجبة ، ويفرض أن $N ، م$ اعداد صحيحة فإن :

١) $\sqrt[N]{س^{N}} = س^{\frac{N}{N}} = س$ .

٢) $\sqrt[N]{س^{م}} = س^{\frac{م}{N}}$ .

٣) $\sqrt[N]{س ص} = \sqrt[N]{س} \times \sqrt[N]{ص} = س^{\frac{١}{N}} ص^{\frac{١}{N}}$ .

٤) $\sqrt[N]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[N]{س}}{\sqrt[N]{ص}} = \frac{س^{\frac{١}{N}}}{ص^{\frac{١}{N}}}$ ، $ص \neq$ صفر .

مثال :- اكتب المقادير التالية على الصورة الجذرية ثم على الصورة الأسية بأبسط صورة :-

١) $\sqrt[٥]{س^{٥}} = س^{\frac{٥}{٥}} = س$ .

٢) $\sqrt[٤]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٤}} = س^{\frac{١}{٢}} \leftarrow \sqrt{س}$ .

٣) $\sqrt[٣]{س^{٢} ص} = \sqrt[٣]{س^{٢}} \sqrt[٣]{ص} = س^{\frac{٢}{٣}} ص^{\frac{١}{٣}}$ .

٤) $\frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٢س}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٢س}} = \frac{٥ \pm}{س}$ . $(\sqrt{٢} = ٢^{\frac{١}{٢}})$

$= ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢$

٥) $\sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧} س^{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧}} \times \sqrt[٣]{س^{٣}}$

$= \frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{٢٧}} \times س$

$= \frac{٢}{٣} \times س^{\frac{٣}{٣}} = \frac{٢}{٣} س$ .

---

## ٥ اللوغاريتمات :-

نشأت فكرة مفهوم اللوغاريتم عند محاولة إيجاد حل للمعادلة

$س = ص^{م}$ بالنسبة للمجهول م .

~~حل~~ إذا كان كل من س، ص عددين موجبين، بحيث ص ≠ ١ فإنه يوجد عدد حقيقي م بحيث $ص^{م} = س$ وتسمى العدد م لوغاريتم العدد س للأساس ص ويكتب على الصورة التالية :

لو$_{\text{ص}}$ س = م .

وباختصار شديد، يمكن كتابة العلاقة الأسية المعادلة السابقة كما يلي :

$$\text{ص}^{\text{م}} = \text{س} \iff \text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \text{م}$$

ص > صفر ، ص ≠ ١
س > صفر

**الأمثلة**

**(١)** اكتب العبارات التالية على الصورة الأسية :

١) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ٣ ⇐ $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠

٢) لو$_{٣}$ ٩ = ٢ ⇐ $٣^{٢}$ = ٩

٣) لو$_{٢٥}$ $\frac{١}{٢}$ = ٥ ⇐ $(٢٥)^{\frac{١}{٢}}$ = ٥

$\sqrt{٢٥}$ = ٥

**(٢)** حول العبارات التالية الى الصورة اللوغاريتمية :

١) $(٨١)^{\frac{١}{٢}}$ = ٩ ⇐ لو$_{٨١}$ ٩ = $\frac{١}{٢}$

٢) $(\frac{١}{٤})^{٢}$ = $\frac{١}{١٦}$ ⇐ لو$_{\frac{١}{٤}}$ $\frac{١}{١٦}$ = ٢

٣) $(٥)^{٣}$ = ١٢٥ ⇐ لو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣

٣ اذا كان لدينا المقدار

لو ١٠٠٠ = م

والمطلوب فهو ايجاد قيمة م ؟

الحل :- لو ١٠٠٠ = م ⇐ $(١٠)^{م} = ١٠٠٠$

$(١٠)^{م} = ١٠^{٣}$ ⇐

م = ٣ ⇐

٤ اذا كان لدينا المقدار

لو$_{٩}$ س = ٢

والمطلوب هو ايجاد قيمة المتغير س ؟

الحل : لو$_{٩}$ س = ٢ ⇐ $س = ٩^{٢}$ ⇐ س = ٨١

٥ اذا كان لدينا المقدار

لو$_{س}$ ٢٧ = ٣

والمطلوب هو ايجاد قيمة ص ؟

الحل :- لو$_{ص}$ ٢٧ = ٣ ⇐ $ص^{٣} = ٢٧$ (٣ ↔ ١)

$ص^{٣} = (٣)^{٣}$ ⇐

ص = ٣ ⇐

بشكل عام، يوجد أساسان لهما أهمية كبرى في التطبيقات:

1) الأساس ١٠ (اللوغاريتم العادي أو العشري)
وهذا النوع من الأساس لا يكتب أسفل اللوغاريتم.

مثلاً: $\log 100 = 2 \Leftarrow \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100$

2) الأساس للعدد $e = هـ = 2.718$ (هـ: عدد ثابت)
ويسمى هذا النوع من اللوغاريتم الذي أساسه هـ باللوغاريتم الطبيعي. ($\ln$)

- بعض من اللوغاريتمات:

1) $\log_م 1 = صفر$ (م عدد حقيقي).
$\log_{10} 1 = صفر$، $\log_هـ 1 = صفر$.

2) $\log_م م = 1$
$\log_{10} 10 = 1$، $\log_هـ هـ = 1$.

3) $\log_م N^{س} = س \log_م N$.

مثال: أوجد ناتج المقدار التالي بأبسط صوره

$\log_5 5^{س} = س \log_5 5 = س \times 1 = س$

مثال:

١) اكتب المقدار $\log_{10} 1000$ بأبسط صورة ؟

الحل :- $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3 \times 1 = 3$

٤) $\log_م (س ص) = \log_م س + \log_م ص$ .

مثال :- بحذف المقدار $\log_{10} 50$ بأبسط صورة ؟

الحل :- $\log_{10} 50 = \log_{10} (10 \times 5)$

$= \log_{10} 10 + \log_{10} 5 = 1 + \log_{10} 5$ .

٥) $\log_م \frac{س}{ص} = \log_م س - \log_م ص$ .

مثال :- اكتب المقدار التالي بأبسط صورة :-

$\log_{10} \frac{100}{200}$ ؟

الحل : $\log_{10} \frac{100}{200} = \log_{10} 100 - \log_{10} 200$

$= \log_{10} 10^2 - \log_{10} (100 \times 2)$

$= 2 \log_{10} 10 - (\log_{10} 2 + \log_{10} 100)$

$= 2 \times 1 - \log_{10} 2 - \log_{10} 10^2$

$= 2 - \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 10$

$= 2 - \log_{10} 2 - 2 \times 1$

$= 2 - 2 - \log_{10} 2 = -\log_{10} 2$ .

مثال :- $\log_{10}(س ص)^{ج}$ كتابة هذا المقدار بأبسط صورة ؟

الحل :- $\log_{10}(س ص)^{ج} = ج \log_{10}(س ص)$

$= ج(\log_{10} س + \log_{10} ص)$

$= ج \log_{10} س + ج \log_{10} ص$ .

فلو فرضنا أن مثلاً

$س = 10$ ، $ص = 10$ فيصبح المقدار $10^{47}$

فالحل الآتي :-

$ج \log_{10} س + ج \log_{10} ص = ج \log_{10} 10 + ج \log_{10} 10$

$= ج \times 1 + ج \log_{10} 10^{2}$

$= ج + 2 \log_{10} 10 = ج + 2 \times 1$

$= 6$

# .

$\log_{\frac{1}{ب}} س = \log_{ب^{-1}} س = -\log_{ب} س$ ،

بعكس $\log_{\frac{1}{ب}} س = -\log_{ب} س$ .

مثال :- $\log_{\frac{1}{5}} 5 = -\log_{5} 5 = -1$ ،

مثال : $\log_{\frac{1}{100}} 100 = \log_{100^{-1}} 100 = -\log_{10} 100$

$= -\log_{10} 10^{2}$

$= -2 \log_{10} 10$

$= -2 \times 1 = -2$

٧) $\log_{\sqrt[N]{م}} س = \log_م س^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \log_م س$ $(N \geq ٢)$.

مثال :- $\log_{\sqrt[٣]{٢٧}} ٣ = \log_٣ ٢٧^{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣} \log_٣ ٢٧$

$= \frac{١}{٣} \log_٣ ٣^٣$

$= \frac{١}{٣} \times ٣ \times \log_٣ ٣$

$= ١ \times ١ \times ١ = ١$.

$\log_٣ \sqrt[٣]{٢٧} = \log_٣ ٣$

$= ١$

#

## ج) كثيرات الحدود :

تعريف : الـ كثيرة الحدود في متغير واحد هي عبارة عن تعبير جبري يكتب على الصورة التالية :-

$ص_N س^N + ص_{N-١} س^{N-١} + \cdots + ص_١ س + ص_٠$

حيث $N \geq$ صفر وعدد صحيح

$ص_N ، ص_{N-١} ، \cdots ، ص_١ ، ص_٠$ أعداد حقيقية .

والأمثلة :- $س^٥ - س^٣$ (كثيرة حدود من الدرجة الخامسة)

$٣ س^٤ - ٣ س$ (كثيرة حدود من الدرجة الرابعة)

$س^٣ - س$ صفر $= س^٣ - ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$ص$ صفر $= ١$ (كثيرة حدود من الدرجة الصفرية)

عدد ثابت



نهاية المحاضرة ليوم الأحد من الأسبوع الثالث

بداية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الثالث

## المقادير الجبرية والعمليات عليها :-

تعريف : المقدار الجبري هو عبارة عن أي تركيب من الرموز والأعداد والمرتبطة فيما بينها عن طريق العمليات الجبرية الأساسية (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة).

مثال : كل من المقادير التالية تمثل مقداراً جبرياً حيث :-

$٥ + ٢ص$ ( يتكون من حدين )

$٣س - ص$ ( يتكون من حدين )

$(س^{٢} - ص^{٢}) ع$ . ( يتكون من حدين )

$= س^{٢}ع - ص^{٢}ع$ .

تعريف : أي مقدار جبري يتكون من عدة أجزاء منفصلة بإشارة الجمع أو الطرح يسمى مجموعاً جبرياً ويعتبر كل جزء منفصل حداً في المجموع.

مثال : $٣(٥س^{٢} - ٢ص + ٥)$ (مقدار جبري يتكون من ثلاثة حدود)

* العمليات الجبرية على المقادير الجبرية :-

1 الجمع والطرح :

لجمع او طرح مقادير جبرية (كثيرات الحدود) ، فإننا نجمع المعاملات العددية للمتغيرات بعد ترتيب متغيرات كل مقدار وذلك باستخدام الطريقة الأفقية أو الرأسية العمودية

مثال :- اوجد ناتج جمع المقدارين

$$(٣س^{٣}ص - ٧ص^{٢} + ٥) + (س^{٣} + ٤س^{٢}ص - ٩)$$

- الطريقة الأفقية :-

$$(٣س^{٣}ص - ٧ص^{٢} + ٥) + (س^{٣} + ٤س^{٢}ص - ٩) = ٤س^{٣} + ٤س^{٢}ص - ٧ص^{٢} - ٤$$

- الطريقة العمودية :-

$$\begin{array}{r} ٣س^{٣}ص - ٧ص^{٢} + ٥ \\ + \quad س^{٣} + ٤س^{٢}ص \quad - ٩ \\ \hline ٤س^{٣} + ٤س^{٢}ص - ٧ص^{٢} - ٤ \end{array}$$

مثال :- اوجد ناتج ما يلي :

$$(٣س^{٣} - ٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣} - ٥س^{٣}) - (٢ص^{٣} + ٢س^{٣} - ٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣})$$

بالطريقة الأفقية :-

$$(٣س^{٣} - ٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣} - ٥س^{٣}) - (٢ص^{٣} + ٢س^{٣} - ٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣})$$

$$= ٢س^{٣} + ٢س^{٢}ص - ٢ص^{٣} - ٢ص^{٣} .$$

نغير اشارة السالب الى قوسين بالطريقة الافقية :-

$$(٣س^{٣} - ٤س^{٢}ص + ٢ص^{٣} - ٥س^{٣}) + (-٢ص^{٣} - ٢س^{٣} + ٤س^{٢}ص - ٢ص^{٣})$$

$$= ٢س^{٣} + ٢س^{٢}ص - ٢ص^{٣} .$$

بالطريقة العمودية :-

$$٢س^{٣} + ٢س^{٢}ص - ٢ص^{٣}$$

$$\pm ٥س^{٣} \pm ٤س^{٢}ص \pm ٢ص^{٣}$$

$$٢س^{٣} + ٢س^{٢}ص - ٢ص^{٣} \Longleftarrow ٢س^{٣} + ٢س^{٢}ص - ٢ص^{٣}$$

مثال :- اوجد ناتج طرح المقدارين

$$(س^{٥} - ٣\sqrt[٤]{س^{٢}} + ٥\sqrt[٣]{س}) - (٤ + ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt[٤]{س} + \sqrt[٣]{٣})$$

الحل:

$$س^{٥} + ٣\sqrt[٤]{س^{٢}} + ٥\sqrt[٣]{س} - ٤ - ٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt[٤]{س} - \sqrt[٣]{٣}$$

$$= س^{٥} + ٣\sqrt[٤]{س^{٢}} - ٥\sqrt[٤]{س} + ٥\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt{٢} - ٤$$

$$= س^{٥} + ٣\sqrt[٤]{س^{٢}} - ٥\sqrt[٤]{س} + ٥\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt{٢} - ٤$$

* * * * * * *

٥ حاصل ضرب كثيرات الحدود (المقادير الجبرية):

لإيجاد حاصل ضرب كثيرات حدود فإننا نستخدم قوانين التوزيع وقوانين الأسس مع مراعاة الإشارات ثم تجميع الحدود المتشابهة.

مثال: اوجد ناتج عملية ضرب المقدارين

$$(٣ - \sqrt[٣]{٢}) (٤ + \sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٢})$$

الحل باستخدام الطريقة الأفقية:

$$= \sqrt{٢}(٤ + \sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٢}) + ٣-(٤ + \sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٢})$$

$$= \sqrt{٦} + ١٢ - \sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٤]{٦}$$

$$= \sqrt{٦} + ١٢ - \sqrt[٣]{٩} - \sqrt[٣]{٨} + \sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٤]{٦}$$

الحل باستخدام الطريقة العمودية :

$$\begin{array}{r} ٣س^{٤} - ٢س^{٣} + ٤ \\ \times \quad س^{٣} - ٣ \\ \hline -٩س^{٤} + ٦س^{٣} - ١٢ \\ + \quad ٣س^{٥} - ٢س^{٤} + ٨س^{٣} \\ \hline ٣س^{٥} - ٦س^{٤} + ٢س^{٣} - ٩س^{٢} + ٦س - ١٢ \end{array}$$

في المثال السابق فإننا قد اتبعنا الخطوات التالية لإيجاد ناتج ضرب مقدارين جبريين :-

١ قمنا بترتيب كل حد في كل مقدار بأكبر أس للمتغير .

٢ نقوم بضرب كل حد في المقدار الثاني بجميع حدود المقدار الأول .

٣ نقوم بعملية تجميع لعبارات الحدود المتشابهة .

مثال :- أوجد ناتج المقدار التالي بأبسط صورة .

$$(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٢س + ٥)$$

الحل : $(س^{٣} - ١)(س^{٢} - ٢س + ٥) = (س^{٢} - ٢س + ٥)س^{٣} + (س^{٢} - ٢س + ٥)(-١)$

$$= س^{٥} - ٢س^{٤} + ٥س^{٣} - س^{٢} + ٢س - ٥$$

٣) حسبة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-
(نستخدم قوانين الأسس ، قوانين الكسور ، قواعد الأشارات) .

١- حسبة حد على حد :-

$$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن} \quad ، \quad س \neq ٠$$

مثال :- بسط المقادير التالية

١) $\frac{٢٥ س^{٣}}{-٥} = \frac{٢٥ س^{٣}}{-٥ س^{٢}} = -٥ س^{٣-٢} = -٥ س^{١}$ .

$\Downarrow$

عكن كتابة ١ بالصورة التالية

$$\frac{٢٥ س^{٣}}{-٥ س^{٢}} = \frac{٣ \times ٣ \times ٢ \times ٥ \times ٢}{-٥ \times ٢} = -٥ س^{١} .$$

٢) $\frac{٤ س^{٥} ص^{٤}}{(-٢ س^{٣} ص^{-٢})} = -٨ س^{٥+٣} ص^{٤+٢}$

$= ٨ س^{٨} ص^{٦}$ .

٣) $\frac{٨ س^{٥} ص^{٣} ع^{٥}}{-٢ س^{-١} ص^{-٣} ع^{٣}} = \frac{٨}{-٢} \times س^{٥-(-١)} \times \frac{ص^{٣}}{ص^{-٣}} \times \frac{ع^{٥}}{ع^{٣}}$

$= -٤ س^{٦} ص^{٦} ع^{٢}$ .

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء صباح الأسبوع الثالث

# تمارين ومسائل

## الباب الأول :

اذا كانت ك = مجموعة الاعداد الحقيقية .

وكانت P مجموعة جزئية في ك ، أجب عن الأسئلة التالية :

أ) ك \ P =

ب) ك ∩ P =

ج) $\overline{P}$ =

د) $\overline{ك}$ =

هـ) $\overline{\phi}$ =

الحل :

أ) ك \ P = ك

ب) P ∩ ك = P

ج) $\overline{P}$ = ك − P

د) $\overline{ك}$ = $\phi$ .

هـ) $\overline{\phi}$ = ك .

الباب الثاني :

السؤال الأول : ارجد ناتج ما يلي بأبسط صورة :

أ) $\frac{٧}{١٠} - \frac{٢}{٥}$

ب) $\frac{٧}{١٠} \div \frac{٣}{٥}$

ج) $٥ \times ٢ - (٥ \div ١٠)$

الحل : أ) $\frac{٧}{١٠} - \frac{٢ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٧}{١٠} - \frac{٦}{١٠} = \frac{١}{١٠}$

ب) $\frac{٢}{٥} \div \frac{٧}{١٠} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١٠}{٧} = \frac{٣٠}{٣٥}$

ج) $٥ \times ٢ - (٥ \div ١٠)$

$= ٥ \times ٢ - (٥ \div ١٠)$

$= ٢٠ - ١٠ = ١٠$

السؤال الثاني :-

١) أوجد قيمة ما يلي دائماً صورة:

أ) $(\frac{1}{8})^{-\frac{1}{3}}$ =

ب) لو ٤ + لو ٢٥ =

ج) لو $\frac{1}{100}$ =

الحل :- أ) $(\frac{1}{8})^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

ب) لو ٤ + لو ٢٥ = لو (٤×٢٥)

= لو ١٠٠ = لو ١٠ = ٢ لو ١٠ = ٢

ج) لو $\frac{1}{100}$ = لو $10^{-2}$ = -٢ لو ١٠ = -٢×١ = -٢

٢) أوجد قيمة س في كل مما يلي :

لو$_{25}$ س = $\frac{1}{2}$

الحل :- س = $(25)^{\frac{1}{2}}$

س = $\sqrt{25}$

س = ٥ ، لاحظوا ان قيمة س في اللوغاريتمات دائماً موجبة

# اسئلة المناقشة الأولى

أوجد ناتج كلا من المقادير التالية بأبسط صورة:

١) $(-٥+٣) \times ٤ \div ٢ =$

الحل: $(-٢) \times ٤ \div ٢$

$-٨ \div ٢ = -٤$

٢) $\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٧} =$

الحل: توحيد المقامات:

$\frac{١ \times ٧}{٢ \times ٧} - \frac{٣ \times ٢}{٧ \times ٢} = \frac{٧}{١٤} - \frac{٦}{١٤} = \frac{١}{١٤}$

٣) $-\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٧} =$

الحل: ضرب البسط في البسط مقسوما على المقام في المقام.

$\frac{-٣}{١٤}$

٤) $٩ \div ٣ \times ٢ - ٥ =$

الحل:

$٣ \times ٢ - ٥ = ٦ - ٥ = ١$

لاحظ أن القسمة والضرب لها الأولوية نفسها في التقييم في هذه الحالة نصحح الأولوية للعملية التي ترد أولاً (من اليمين الى اليسار).

# اسئلة المناقشة الثانية

اجب عن الأسئلة التالية:

١- قيمة المقدار - لو ١٠٠٠-٣

الحل: لاحظ أن الأساس غير المكتوب في اللوغاريتم يعتبر العدد ١٠ .

$$-\text{لو}_{10}\,1000 = -\text{لو}_{10}\,10^3 = -3 \times (-3) = 9$$

$$\text{لو}_{10}\,10 = 1$$

$$9 \times 1 = 9$$

٢- قيمة المتغير س في المقدار لو س = ٣ تساوي؟

الحل :- $\text{لو}_{10} س = 3 \Leftarrow س = 10^3 \Leftarrow س = 1000$

٣- ابسط صورة للمقدار $س^{-3} \times س^{5} + س^{2}$ تساوي

الحل: الأولوية للعمليات هي عملية الضرب .

$$س^{-3} \times س^{5} + س^{2} = س^{2} + س^{2} = 2س^{2}$$

٤- ناتج المقدار لو ١٠٠ - لو٥ ( ٢٥ ) + لو٥ $(5^{-3})$ - ٢ يساوي

الحل: يمكن العادة كتابة المقدار على الصورة التالية :

$$\Leftarrow \text{لو}_{10} 10^{2} - \text{لو}_{5} 5^{2} + \text{لو}_{5} 5^{-3} - 2$$

$$\Leftarrow 2\,\text{لو}_{10} 10 - 2\,\text{لو}_{5} 5 + 3\,\text{لو}_{5} 5 - 2 \Leftarrow 2 - 2 + 3 - 2 = -1$$

٥- الجذر التكعيبي للعدد لو ١٠ -١ ؟

الحل :- $\sqrt[3]{\text{لو}_{10}^{-1}} = \sqrt[3]{-1\,\text{لو}_{10} 10} = \sqrt[3]{-1 \times 1} = \sqrt[3]{-1}$

$$= -1$$

[٣] قسمة مقدار جبري على مقدار جبري آخر :-

١) قسمة مقدار جبري يكون مجموع واحد على مقدار جبري آخر أيضاً يكون مجموع واحد :-

$$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن} \quad ، \quad س \neq صفر$$

٢) قسمة مقدار جبري يكون به أكثر من حد على مقدار جبري آخر يكون مجموع واحد :-

ولقسمة هذا النوع من كثيرات الحدود ، فإننا نستخدم الخاصية التالية :

$$\frac{أ_{١} + أ_{٢} + \cdots + أ_{م}}{ب} = \frac{أ_{١}}{ب} + \frac{أ_{٢}}{ب} + \cdots + \frac{أ_{م}}{ب}$$

مثال :- اوجد ناتج القسمة للمقدار التالي بابسط صورة :-

$$\frac{١٥ س^{٤} ص^{٣} + ٥ س^{٣} ص^{٥} - ٢٥ س^{٣} ص^{٤}}{٥ س^{٣} ص^{٤}}$$

$$= \frac{١٥ س^{٤} ص^{٣}}{٥ س^{٣} ص^{٤}} + \frac{٥ س^{٣} ص^{٥}}{٥ س^{٣} ص^{٤}} - \frac{٢٥ س^{٣} ص^{٤}}{٥ س^{٣} ص^{٤}}$$

$$= ٣ س + ص^{٢} - ٥ ص .$$

مثال :- أكتب ناتج قسمة المقدار الجبري التالي في أبسط صورة

$$\frac{٥ع^{٣}ل^{-٣} + ٢٥ع^{-٥}ل^{٣}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}}$$

الحل :-

$$= \frac{٥ع^{٣}ل^{-٣}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}} + \frac{٢٥ع^{-٥}ل^{٣}}{٥ع^{-٢}ل^{-٥}}$$

$$= \frac{ع^{٣}ع^{٥}ل^{٥}}{ل^{٣}} + ٥ع^{٦}ل^{٣}ل^{٥}$$

$$= ع^{٥}ل^{٣} + ٥ع^{٣}ل^{٨}$$

(٣) قسمة مقدار جبري حدوده من أكثر من حد على مقدار جبري آخر حدوده من أكثر من حد :-

في هذه الحالة، فإننا نستخدم القسمة الطويلة لإيجاد الناتج، وتتلخص الخطوات التالية :-

١- نكتب المقدار الجبري (المقسوم والمقسوم عليه) في صورة وبنية ترتيباً تنازلياً من حيث الأس لأحد المتغيرات .

ب- نقسم الحد الأول في المقدار الجبري المقسوم على الحد الأول من المقدار الجبري في المقسوم عليه .

جـ - نضرب خارج القسمة الذي حصلنا عليه في الخطوة (ب) في المقسوم عليه ثم نقوم بعملية طرح حاصل الضرب من المقسوم فنحصل على مقدار جديد.

د - نكرر الخطوتين ب، جـ حتى نحصل على باقي الطرح مساوياً للصفر أو أن تكون درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه.

مثال :- اوجد خارج قسمة المقدارين

$$(س^{٥} - ٣س^{٤} + ٣س^{٣}) \div (س - ٣).$$

الحل :-

$$\begin{array}{r|l} س^{٥} - ٣س^{٤} + ٣س^{٣} & س - ٣ \\ \hline س^{٥} - ٣س^{٤} & \leftarrow \text{المقسوم عليه} \\ \hline \quad ٠ + ٣س^{٣} & \\ \quad ٣س^{٣} - ٩س^{٢} & \\ \hline \quad ٠ + ٩س^{٢} & \\ \quad ٩س^{٢} - ٢٧س & \\ \hline \quad ٠ + ٢٧س & \\ \quad ٢٧س - ٨١ & \\ \hline \quad ٠ + ٨١ & \end{array}$$

المقسوم

خارج القسمة $س^{٤} + ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٧س + ٨١$ والباقي صفر (تتوقف عملية القسمة)

أن خارج القسمة هو مقدار $س^{٤} + ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٧س + ٨١$ والباقي صفر.

مثال :- أوجد خارج قسمة المقدار :-

$(س^3 + 3س^2 + 5س + 15) \div (س + 3)$ .

الحل :

$$\begin{array}{r|l} س^3 + 3س^2 + 5س + 15 & س + 3 \\ \hline س^3 + 3س^2 & س^2 + 5 \\ \hline 5س + 15 \\ 5س + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

أي خارج القسمة $(س^2 + 5)$ والباقي 0 .

نلاحظ في هذا المثال ، أنه قد استخدمنا بعض المواضيع التي سبق أن درسناها في الباب الثاني .

---

الباب الثالث : تحليل المقادير الجبرية

أولاً : حاصل ضرب بعض المقادير الجبرية الخاصة :

أ) $(س + ص)(ع + ن) = س ع + س ن + ص ع + ص ن$ .

ب) $(س + ص)(س - ص) = س^2 - ص^2$ .

ج) $(س + ص)^2 = (س + ص)(س + ص) = س^2 + 2س ص + ص^2$

د) $(س - ص)^2 = (س - ص)(س - ص) = س^2 - 2س ص + ص^2$

هـ) $(س - ص)^3 = (س - ص)(س - ص)(س - ص)$

$= (س - ص)(س^2 - 2س ص + ص^2) = س^3 - 2س^2 ص + س ص^2 - س^2 ص + 2س ص^2 - ص^3$

$= س^3 - 3س^2 ص + 3س ص^2 - ص^3$

و) $(س+ص)^3 = (س+ص)(س+ص)(س+ص)$

$= (س^2+2س ص+ص^2)(س+ص)$

$= س^3 + 2س^2 ص + س ص^2 + س^2 ص + 2س ص^2 + ص^3$

$= س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3$

أمثلة :- (حسب خاصية المقادير الجبرية بأبسط صورة):

أ) $\sqrt{5}(3س - ص) = 15س - س ص\sqrt{5}$ .

ب) $(3س^2 - 4ص)^2 = (3س^2 - 4ص)(3س^2 - 4ص)$

$= 9س^4 - 24س^2 ص + 16ص^2$ .

ج) $(ص - 2)^3 = (ص-2)(ص-2)(ص-2)$

$= (ص^2 - 4ص + 4)(ص-2)$

$= ص^3 - 2ص^2 - 4ص^2 + 8ص + 4ص - 8$

$= ص^3 - 6ص^2 + 12ص - 8$

ثانياً: التحليل : هي الطرق التي سنتعرف عليها في تحليل المقادير الجبرية :

1) إخراج العامل المشترك

ملاحظة : التحليل هو عملية عكسية لعملية حاصل ضرب مقادير جبرية والمقصود بتحليل المقدار الجبري إلى عوامله الأولية (أي لا يمكن تحليل عوامله إلى حاصل ضرب عوامل جبرية أخرى) .

تعريف :- اذا كان لدينا $ص = أ س^{ن} + ب س^{ن-1} + \ldots$ ، فيمكننا اخراج عامل مشترك $س^{ن}$ او $س^{ن-1}$ او اي من الحدود الاصغر التالية.

$ص = س^{ن}(أ + \frac{ب}{س} + \ldots)$ .

مثال :- حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية

1) $٥ س^{٥} + ١٥ س^{٣} = ٥ س^{٣}(س^{٢} + ٣)$ .

2) $٣ س^{٣} - ٢٧ س = ٣ س(س^{٢} - ٩)$ .

3) $٢ س^{٣} ص^{٣} - ٨ س^{٢} ص^{٤} = ٢ س^{٢} ص^{٣}(س - ٤ ص)$.

4) $٥ س^{٤} ع^{٣} - ٢٥ س^{٣} ع^{٢} + ١٥ س^{٢} ع^{٢}$

$= ٥ س ع(س^{٣} ع^{٢} - ٥ س^{٢} + ٣ س ع)$ .

للتأكد من صحة الحل، نقوم بضرب ناتج الخطوة الأولى

$٥ س^{٤} ع^{٣} - ٢٥ س^{٣} ع^{٢} + ١٥ س^{٢} ع^{٢}$.

* * * * * * *

نلتقي في محاضرة يوم السبت الأسبوع القادم

بداية المحاضرة يوم الثلاثاء
الأسبوع الثاني

# الباب الثالث: تحليل المقادير الجبرية

## ٣) الفرق بين مربعين:

الصيغة العامة للفرق بين مربعين:-

$$س^٢ - ص^٢ = (س - ص)(س + ص)$$

مثال: حلل المقدار الجبري التالي

١) $س^٢ - ٩ = س^٢ - ٣^٢ = (س - ٣)(س + ٣)$

٢) $٤س^٢ - ٩ص^٢ = (٢س)^٢ - (٣ص)^٢$

$= (٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص)$.

٣) $س^٤ - ١ =$

$= (س^٢)^٢ - (١)^٢$

$= (س^٢ - ١)(س^٢ + ١)$ ← نفس المربعين ونعيد

$= (س - ١)(س + ١)(س^٢ + ١)$ (وكتبوا في أبسط صورة)

تأكد من صحة الحل:-

$(س - ١)(س + ١)(س^٢ + ١)$

$(س^٢ - ١)(س^٢ + ١) = س^٤ + س^٢ - س^٢ - ١$

$= س^٤ - ١$

٤) $(١٦ - ص^٤) = (٤^٢ - (ص^٢)^٢) = (٤ - ص^٢)(٤ + ص^٢)$

$= (٢ - ص)(٢ + ص)(٤ + ص^٢)$.

٣ الفرق بين مكعبين :-

الصيغة العامة للفرق بين مكعبين تكتب على الصورة التالية :-

$$(\text{الحد الأول})^3 - (\text{الحد الثاني})^3 = (\text{الحد الأول} - \text{الحد الثاني})(\text{مربع الحد الأول} + \text{الحد الأول} \times \text{الحد الثاني} + \text{مربع الحد الثاني})$$

$$(س^3 - ص^3) = (س - ص)(س^2 + س ص + ص^2)$$

- مثال :- حلل المقادير الجبرية التالية إلى عواملها الأولية :-

١) $٢٧ س^3 - ص^3 = (٣س)^3 - (ص)^3$

$= (٣س - ص)(٩س^2 + ٣س ص + ص^2)$

٢) $٨ س^6 - ١٢٥ ص^9 = (٢س^2)^3 - (٥ص^3)^3$

$= (٢س^2 - ٥ص^3)(٤س^4 + ١٠ س^2 ص^3 + ٢٥ ص^6)$

٤ مجموع مكعبين :

الصيغة العامة لهذا القانون تكتب كالتالي :-

$$(\text{الحد الأول})^3 + (\text{الحد الثاني})^3 = (\text{الحد الأول} + \text{الحد الثاني})(\text{مربع الحد الأول} - \text{الحد الأول} \times \text{الحد الثاني} + \text{مربع الحد الثاني})$$

$$(س^3 + ص^3) = (س + ص)(س^2 - س ص + ص^2)$$

- مثال :- $(٢٧ س^3 + ١) = (٣س)^3 + (١)^3$

$= (٣س + ١)(٩س^2 - ٣س + ١)$

$(١٢٥ س^6 + ٨) = (٥س^2)^3 + (٢)^3$

$= (٥س^2 + ٢)(٢٥ س^4 - ١٠ س^2 + ٤)$

٥ تحليل المقدار التالي :-

نستعرض الآن طريقة تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية وهي على الصيغة :-

$أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، حيث أ ، ب ، جـ : أعداد ثابتة .

السير لإعادة كتابة المقدار :-

$أ س^{٢} + ب س + جـ = (هـ س + و_{١})(هـ_{٢} س + و_{٢})$

والمطلوب إيجاد قيمة كل من هـ ، هـ_{١} ، و ، و_{٢} .

مثال :- حلل المقدار التالي :-

١) $س^{٢} + ١س - ٦ = (س + ٣)(س - ٢)$

$+١س = -٢س + ٣س$

| | |
|---|---|
| $-٢$ أو $١ \times$ | $س$ |
| $٣$ أو $-٦ \times$ | $س$ |

٢) $س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣)$

إشارة الحد الثابت موجبة تأكد الإشارة موجبة تكون الإشارتان موجبتين

| | |
|---|---|
| $٦$ أو $٢ \times$ | $س$ |
| $١$ أو $٣ \times$ | $س$ |

٣) $س^٢ - ٥س - ١٤ = (س + ٢)(س - ٧)$

إشارة الطرف سالبة ← مختلفة

إشارة الوسط تعطي للعدد الأكبر

٤) $س^٢ - ٢س - ٨ = ؟؟$

| | |
|---|---|
| $س$ | $+٤$ |
| $س$ | $-٤$ |

أو

| | |
|---|---|
| $س$ | $+١$ |
| $س$ | $-٨$ |

إشارة الوسط تذهب للعدد الأكبر

$س^٢ - ٢س - ٨ = (س - ٤)(س + ٢)$ .

تحدد شكل إشارة المقدارين

فإذا كانت سالبة، تكون إشارة المقدارين مختلفين ( + و - ) .

أما إذا كانت إشارة الطرف (الحد الثابت) موجبة فتكون إشارة المقدارين في الناتج متشابهين.

٥) $(س^٢ - ٢س + ١) = (س - ١)(س - ١)$

٦) $٦س^٢ + ٥س - ٤ = (٢س - ١)(٣س + ٤)$ الحل الصحيح

أو $(٢س + ٤)(٣س - ١)$ ✗

أو $(٢س - ٤)(٣س + ١)$ ✗

أو $(٢س + ١)(٣س - ٤)$ ✗

| | |
|---|---|
| $٣س$ | $+٤$ |
| $٢س$ | $-١$ أو $-٢$ |



نهاية الباب الثالث (حل المعادلات الجبرية)

# الفصل الرابع : المقادير الكسرية

## ما هو المقدار الكسري :-

تعريف :- المقدار الكسري (النسبي) هو عبارة عن خارج قسمة كثيرة حدود بحيث يسمى المقسوم بالبسط والمقسوم عليه بالمقام .

وهو الأشكال التالية :-

مقادير كسرية .

① $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \leftarrow \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \leftarrow \frac{س - ٤}{س^{٢} + ٣س}$

② $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \leftarrow \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \leftarrow \frac{س^{٣} + ٣س^{٢}}{١ - ٤س^{٢}}$

③ $\frac{١}{س^{٤}} + \frac{س^{٤}}{١} = س^{-٤} + س^{٤}$ .

$= \frac{١}{س^{٤}} + \frac{س^{٤} \times س^{٤}}{١ \times س^{٤}}$

$= \frac{١}{س^{٤}} + \frac{س^{٦}}{س^{٤}} = \frac{١ + س^{٦}}{س^{٤}}$ .

## العمليات الجبرية على المقادير الكسرية :-

### 1 جمع وطرح المقادير الكسرية :

عند جمع أو طرح مقادير كسرية ، يجب ملاحظة مايلي :-

أ) إذا كانت المقادير الكسرية لها نفس المقام ، فيكون المجموع الجبري لها له نفس المقام وبسطه يكون ناتج جمع بسط المقدار الأول مع بسط المقدار الثاني .

بصورة الرموز :-

$$\frac{س}{ص} + \frac{ع}{ص} = \frac{س + ع}{ص} \quad (ص \neq 0)$$

$$\frac{س}{ص} - \frac{ع}{ص} = \frac{س - ع}{ص} \quad (ص \neq 0)$$

مثال :- اوجد ناتج المقادير النسبية بابسط صورة :-

أ) $\frac{س + ٣}{س - ٤} - \frac{س}{س - ٤} = \frac{(س + ٣) - (س)}{س - ٤}$

$= \frac{٣}{س - ٤}$ .

ب) $\frac{٣ - س}{٤ - س} + \frac{ج}{٤ - س} = \frac{ج + ٣ - س}{٤ - س} = \frac{ج + ٣}{٤ - س}$ .

ب) اذا كانت المقادير الكسرية لها مقامات مختلفة، نقوم بتحويلها الى كسور متكافئة وذلك بضرب بسط ومقام كل كسر بكمية محدودة مناسبة لكي تحصل على الكسور لها نفس المقام ثم نتبع الطريقة السابقة في أ .

بصورة رمزية :-

$$\frac{س}{ص} + \frac{ع}{ل} = \frac{ل \times س}{ص \times ل} + \frac{ص \times ع}{ص \times ل}$$

$$= \frac{ل س}{ل ص} + \frac{ص ع}{ل ص}$$

$$= \frac{ل س + ص ع}{ل ص}$$

$$\frac{س}{ص} - \frac{ع}{ل} = \frac{ل \times س}{ص \times ل} - \frac{ص \times ع}{ص \times ل}$$

$$= \frac{ل س - ص ع}{ل ص}$$

مثال :- اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{٣}{س+١} + \frac{٥}{س}$$

الحل :

$$\frac{س+١}{س+١} \times \frac{٥}{س} + \frac{٣}{س+١} \times \frac{س}{س}$$

$$= \frac{٥(س+١)}{س(س+١)} + \frac{٣س}{س(س+١)} = \frac{٥س+٥+٣س}{س^{٢}+س} = \frac{٨س+٥}{س^{٢}+س}$$

مثال :- اختصر ناتج الجذرين الثاليين إلى أبسط صورة :

$$\frac{٣}{س} - \frac{٥}{٢-س}$$

الحل :

$$\frac{٣ \times (٢-س)}{س \times (٢-س)} - \frac{٥ \times س}{(٢-س) \times س}$$

$$= \frac{٣(٢-س)}{س(٢-س)} - \frac{٥س}{س(٢-س)} = \frac{٦-٣س-٥س}{٢س-س^{٢}}$$

$$= \frac{٦-٨س}{٢س-س^{٢}}$$

ملاحظة : (في عملية جمع وطرح مقادير كسرية)
عند استخدام الطريقة (ب)، يجب تحليل مقامات الكسور إلى عواملها الأولية إن أمكن .

مثال :- أوجد ناتج طرح الجذرين

$$\frac{٤}{س+١} - \frac{٤س}{١-س^{٢}}$$

الحل :

$$\frac{٤}{(س+١)} - \frac{٤س}{(س+١)(١-س)}$$

$$= \frac{٤(١-س)}{(س+١)(١-س)} - \frac{٤س}{(س+١)(١-س)}$$

$$= \frac{٤-٤س-٤س}{(س+١)(١-س)} = \frac{٤-٨س}{١-س^{٢}}$$

$$= \frac{٤}{(س+١)(١-س)}$$

مثال :- اوجد ناتج جمع المقدارين

$$\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٥}}$$

الحل : $\frac{٥ \times ٥}{٥ س \times س} + \frac{٤ \times س}{س^{٥} \times س}$

$$= \frac{٢٥ + ٤س}{٥س^{٦}} = \frac{٤س}{٥س^{٦}} + \frac{٢٥}{٥س^{٦}}$$

٣) ضرب وقسمة المقادير الكسرية :

أ) ضرب المقادير الكسرية :-

القاعدة : لضرب كسرين $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ع}{ل}$ ، نستخدم القاعدة التالية :

$$\frac{س}{ص} \times \frac{ع}{ل} = \frac{س ع}{ص ل}$$

(ضرب بسط الاول × بسط الثاني) / (ضرب مقام الاول × مقام الثاني)

مثال :- بسط المقادير التالية :-

$$\frac{٣س}{س-١} \times \frac{٤س}{س+١}$$

الحل : $\frac{٣س \times ٤س}{(س+١)(س-١)} = \frac{٦س^{٢}}{س^{٢}-١}$

مثال :- اوجد ناتج مايلي

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}^2} \times \text{س}$$

الحل :

$$\frac{\text{س}}{1} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}^2} = \frac{\text{س ص}}{\text{س}^2} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

ب) عملية قسمة مقادير جبرية :

القاعدة :- لقسمة مقدارين كسريين $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ فإننا نستخدم القاعدة التالية :-

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} \div \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ع}} = \frac{\text{س ل}}{\text{ص ع}}$$

(لقسمة مقدار كسري على مقدار كسري آخر، نقوم بتحويل إشارة القسمة إلى ضرب ونأخذ مقلوب الكسر الثاني)

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

١) $\frac{\text{٣}}{\text{س}} \div \frac{\text{ص}}{\text{س}^2}$

الحل :

$$\frac{\text{٣}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^2}{\text{ص}} = \frac{\text{٣ س}^2}{\text{س ص}} = \frac{\text{٣ س}}{\text{ص}}$$

٢) $\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 1} \div \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1}$

الحل :-

$$\frac{س^٤+١}{س-١} \times \frac{س+١}{س^٣-١} = \frac{س^٤+١}{س-١} \times \frac{س+١}{(س-١)(س^٢+س+١)}$$

$$= \frac{س^٤+١}{(س-١)(س-١)(س^٢+س+١)}$$

$$= \frac{س^٤+١}{(س-١)^٢(س^٢+س+١)}$$

$$= \frac{س^٤+١}{س^٤+س^٣+س^٢-س^٣-س^٢-س+س^٢+س+١}$$

$$= \frac{س^٤+١}{س^٤+س^٢+١}$$

نهاية الفصل الرابع

(مفهوم العدد الكسري)

+

(العمليات الأربع على الأعداد الكسرية)

نهاية محاضرة يوم الأحد
من الأسبوع السادس

بداية محاضرة الأسبوع السادس وليوم السبت ١٤٣٢/١/٢٨

# الباب الخامس: المعادلات

تعريف: المعادلة هي عبارة عن تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مع إشارة التساوي، وهذا التعبير له طرفان أيمن وأيسر تفصل بينهما إشارة (=) بحيث تدعى هذه المتغيرات بالمجاهيل. وعملية حل المعادلة معناه إيجاد كل القيم (الاعداد) التي تجعل المعادلة صحيحة، وتحويه هذه الحلول تسمى حل المعادلة.

وبدأ سنتعرف على بعض من أشكال المعادلات وهي:-

١- المعادلات الخطية في مجهول (متغير) واحد س:

الصورة العامة لمعادلة خطية بمتغير واحد هي:-

أ س = جـ ، أ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

مثال:- أوجد قيمة س من المعادلة

٥س - ٢٥ = ٠

الحل: بداية نقول بنقل العدد الثابت (١) الطرف الأيمن، وداءاً عند نقل عدد ثابت أو متغير من طرف لآخر نقوم بتغير إشارته.

٥س = ٢٥

سنتخلص من معامل س للحصول العدد واحد، وذلك عن طريق قسمة طرفي المعادلة على ذلك المعامل.

$\frac{\text{صـ}}{\text{س}} = \frac{\text{ك}^2}{\text{د}}$

$\boxed{\text{س} = 0}$ حل المعادلة.

(ملاحظة: دائماً المعادلات من الدرجة الأولى لها حل واحد فقط)

وللتأكد من صحة الحل، نقوم بتعويض الناتج $(\text{س} = 0)$ في المعادلة الأصلية:

$\text{ك}^2 - \text{ك}^2 = \text{صـ}$

$0 \times 0 - 0^2 = \text{صـ}$ (الحل صحيح).

$\text{صـ} = \text{صـ}$

مثال: أوجد حل المعادلة التالية:

$\text{ك}^2 - \text{ك}^4 = \text{صـ}$

الحل: $\frac{-\text{ك}^4}{-\text{ك}^2} = \frac{-4}{-2} \Leftarrow \boxed{\text{ك} = 2}$

للتأكد من صحة الحل:

$(2)^2 - (2)^4 = 4 - 4 = \text{صـ}$

بعض مواضيع الإعداد لصفية لتغذية حل المعادلات :

① اذا كانت $أ = ب$ فإن :

$أ + ج = ب + ج$ ، $(أ + ج = ب + ج)$

$أ - ج = ب - ج$ ، $(أ - ج = ب - ج)$

$أ ج = ب ج$ ، $(أ ج = ب ج)$

$\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج}$ ، $(\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج})$

② اذا كانت $أ + ج = ب + ج \Leftarrow أ = ب$

③ اذا كانت $أ ج = ب ج \Leftarrow أ = ب$

④ " " $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{ج} \Leftarrow أ = ب$

⑤ " " $أ - ج = ب - ج \Leftarrow أ = ب$

مثال :- $س - ٧ = ١٠$ (معادلة خطية)

لو اردنا أن نجد حل لهذه المعادلة :-

$س = ١٠ + ٧ \Leftarrow \boxed{س = ١٧}$

بالحل ١ خ :-

$٧ + (١٠) = ٧ + (س - ٧)$

$\boxed{س = ١٧}$

مثال :- أوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{1}{ج} ص = ٦ - ٢ = ٢$$
$$٦+ \quad ٦+$$

$$\frac{1}{ج} س = ٨ \Leftarrow ٦ + ٢ = \frac{1}{ج} س$$

وللتخلص من معامل $س$ وهو $(\frac{1}{ج})$، نقوم بضرب كل الحدين بالعدد ج :

$$ج \times \frac{1}{ج} س = ٨ \times ج \Leftarrow \boxed{س = ١٦}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$ج = ٦ - (١٦) \frac{1}{ج}$$
$$ج = ٦ - ٨$$
$$ج = ٢$$

٢- المعادلات الخطية في متحولين :-

تعريف : المعادلة الخطية في متحولين $س$ ، $ص$ هي عبارة عن معادلة على الصورة $أ س + ب ص = جـ$

حيث $أ$ ، $ب$ ، $جـ$ ثوابت ، $أ$ ، $ب \neq$ صفر .

نلاحظ أنه حل هذا النوع من المعادلات ليس وحيداً (بمعنى أنه سيكون لدينا عدد لانهائي من الحلول) .

حيث أنه $\boxed{س = \frac{جـ - ب ص}{أ}}$ بمعنى أن لكل قيمة للمتغير $ص$ توجد قيمة للمتغير $س$ .

مثال :- أوجد حل المعادلة الآتية

$$٣ص + ٥س = ١٥$$

الحل :-

$$\frac{٥س}{٥} = \frac{١٥ - ٣ص}{٥}$$

$$\boxed{س = \frac{١٥ - ٣ص}{٥}}$$

نقول عندما $ص = ٢ \Leftarrow$

$$س = \frac{١٥ - ٣(٢)}{٥}$$

$$= \frac{١٥ - ٦}{٥} = \frac{٩}{٥} = ١٫٨$$

نتأكد من صحة الحل :

نعوض كل من قيمة $س = ١٫٨$ و $ص = ٢$ في المعادلة الأصلية :-

$$١٥ \stackrel{؟}{=} ٣(٢) + ٥(١٫٨)$$

$$١٥ = ٦ + ٩$$

$$١٥ = ١٥ \quad \checkmark$$ الحل صحيح .

وكذلك عندما $ص = ٣ \Leftarrow$

$$س = \frac{١٥ - ٣(٣)}{٥}$$

$$= \frac{١٥ - ٩}{٥} = \frac{٦}{٥} = ٣$$

وللتأكد من صحة الحل :-

$$١٥ = ٣(٣) + ٥(٣)$$

$$١٥ = ٩ + ٦$$

$$١٥ = ١٥ \quad \checkmark$$ الحل صحيح

مثال :- أوجد حل المعادلة $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$ عندما $ص = -1$ ؟

الحل :-

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$$

$$\sqrt{5} = \frac{3ص + 3^2}{5}$$

هذه الصورة العامة للحل .

عندما $ص = -1$ :

$$\sqrt{5} = \frac{3(-1) + 3^2}{5}$$

$$= \frac{-3 + 3^2}{5}$$

$$= \frac{3^0}{5}$$

$$\boxed{س = 3}$$

للتأكد :- $3^2 = 5 \times 3 - 3(-1)$ ؟

$$3^2 = 4 + 3^0$$

$$3^2 = 3^2$$ ✓

عندما $ص = 3$ :

$$\sqrt{5} = \frac{3 \times 3 + 3^2}{5}$$

$$\sqrt{5} = \frac{3^2 + 8}{5}$$

$$\boxed{س = \frac{3\sqrt{3}}{5}}$$

للتأكد بصورة أخرى :

$$3^2 = 3(3) \leftarrow 5 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$ ؟

$$3^2 = 3^2 - 8$$ ✓ الحل صحيح

٣- معادلات خطية آنية في متغيرين :-

ويأخذ هذا النوع من المعادلات الصورة :

$$أ_1 س + ب_1 ص = ج_1$$
$$أ_2 س + ب_2 ص = ج_2$$

حيث $أ_1، أ_2، ب_1، ب_2، ج_1، ج_2 \in ح$ .

$أ_1، ب_1$ أحدهما على الأقل $\neq صفر$ .

$أ_2، ب_2$ = = = $\neq صفر$ .

وحل هذا النظام الآني من المعادلات هو عبارة عن زوج من الأعداد س، ص يحقق كل المعادلتين معاً .

في هذا البند، سنوضح طريقتين لحل هذا النوع من المعادلات :-

١- طريقة الحذف :-

خطوات هذه الطريقة :-

الخطوة الأولى : إذا لم تكن معاملات إحدى المتغيرين س أو ص متساوية، فنضرب المعادلتين في عددين حقيقيين تصبح معاملات أحد المتغيرين متساوية .

الخطوة الثانية : إذا كانت الإشارتين للمعاملين متساويتين غير متشابهتين فنقوم بعملية جمع لكل المعادلتين، أما إذا كانت متشابهتين نقوم بعملية الطرح .

الخطوة الثالثة : نحذف أحد المتغيرين ثم نعوض في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة المتغير الآخر .

مثال :- أوجد حيث س، ص من المعادلتين :-

$$\begin{aligned} 5س + ص &= 1 \\ -س - ص &= 2 \end{aligned} \quad +$$

لاحظ أن معامل ص = ١ في المعادلتين متساويين واشاراتهم مختلفين، نقوم بعملية الجمع مباشرة

$$4س + 0 = 3$$

$$س = \frac{3}{4} \Leftarrow \boxed{س = \frac{1}{4}}$$

نقوم بإيجاد قيمة المتغير الآخر الوحيد ص من إحدى المعادلتين

$$س - ص = 2 \quad \text{وبدلنا} \quad س = \frac{1}{4} :-$$

$$\frac{1}{4} - ص = 2 \Leftarrow ص = \frac{1}{4} - 2$$

$$ص = -1 \times 1{,}5 \times -1$$

$$\boxed{ص = -1{,}5}$$

للتأكد من صحة الحل :-

المعادلة الأولى

$$5(\frac{1}{4}) + (-1{,}5) = 1$$

$$1{,}25 - 0{,}75 = 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

المعادلة الثانية

$$-(\frac{1}{4}) - (-1{,}5) = 2$$

$$-0{,}25 + 1{,}5 = 2$$

$$2 = 2 \quad \checkmark$$

# محاضرة البث المباشر الثانية

## مادة: مبادئ الرياضيات

د. رائد الخصاونة

المحاضرة المباشرة الثانية

## الباب الخامس (المعادلات)

١) معادلات خطية في مجهول واحد (س).

$أ س = جـ$ حيث $أ، ب$ : أعداد ثابتة، $أ \neq 0$

مثال: $-٤س = ٠$

من خلال قسمة طرفي المعادلة على معامل س نحصل على:-

$$\frac{-٤س}{-٤} = \frac{٠}{-٤} \Leftarrow \boxed{س = ٠}$$

٢) معادلات خطية في مجهولين:

$أ س + ب ص = جـ$ ؛ $أ، ب، جـ$ : أعداد ثابتة
$أ، ب \neq 0$.

مثال: أوجد حل المعادلة

$٤س - ٥ص = ٢٥$

عندما $ص = ٥$ ؟

الحل:- $٤س - ٥ص = ٢٥$

$٤س = ٢٥ + ٥ص$

$$\boxed{س = \frac{٢٥ + ٥ص}{٤}}$$ الحل العام

عندما $ص = ٥$ :-

$$س = \frac{٢٥ + ٥(٥)}{٤}$$

$$س = \frac{٥٠}{٤}$$

$$\boxed{ص = ١٢,٥}$$

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين :-

والصورة العامة لهذا النوع من المعادلات

$$أ_1 س + ب_1 ص = جـ_1$$

$$أ_2 س + ب_2 ص = جـ_2$$

حيث $أ_1 ، أ_2 ، ب_1 ، ب_2 ، جـ_1 ، جـ_2$ : أعداد ثابتة ،

$أ_1 ، ب_1$ أحدهما على الأقل $\neq$ صفر

$أ_2 ، ب_2$ أحدهما على الأقل $\neq$ صفر .

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

أ) طريقة الحذف .

ب) طريقة التعويض .

حيث قمنا في المحاضرة الماضية من الأسبوع السادس على شرح طريقة الحذف وفي المثال التالي سنوضح المزيد من خطوات هذه الطريقة مع ملاحظة أن هذا النوع من المعادلات له حل وحيد فقط .

مثال :- أوجد قيمة س ، ص ، ع من :-

$$٣س + ٥ص + ٧ع = ٣ \quad \text{---} \quad (١) \quad \times ٣$$

$$٤س + ٣ص + ٧ع = -١ \quad \text{---} \quad (٢) \quad \times ٢$$

الحل :- نقوم بضرب المعادلة الأولى بالعدد ٣ ، والمعادلة الثانية بالعدد ٢ :-

$$٩س + ١٥ص + ٢١ع = ٩$$

$$-٨س - ٦ص - ١٤ع = -٢$$

$$س + ٩ص + ٧ع = ٧$$

$$١١س = ١١ \Leftarrow \frac{١١س}{١١} = \frac{١١}{١١}$$

$$\boxed{س = ١}$$

نعوض قيمة س في المعادلة الأولى : (لإيجاد قيمة المتغير ص)

$$٣ = ٥ص + ٢(١)$$

$$٣ = ٥ص + ٢ \Leftarrow ٥ص = ٣ - ٢$$

$$\frac{٥ص}{٥} = \frac{٥}{٥} \Leftarrow \boxed{ص = ١}$$

للتأكد من صحة الحل :-

$$٣ = ٥(١) + ٢ع$$

$$٣ = ٥ + ٢ع$$

$$٢ع = ٣ - ٥$$

$$ع = -١$$

$$-١ = ٣(١) + ٤ع$$

$$-١ = ٣ + ٤ع$$

$$٤ع = -١ - ٣$$

$$ع = -١$$

٢- طريقة التعويض :

تستخدم هذه الطريقة في إيجاد قيمة أحد المجهولين بدلالة الآخر ومن ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى، نحصل على معادلة بمجهول واحد وبحلها نجد قيمته ثم نعوض به في أحد المعادلتين للحصول على قيمة المجهول الآخر.

مثال :- أوجد قيمة س، ص من النظام

$$٤ = ص - ٢س \quad \text{---} \quad (١)$$

$$-٣ = ص٢ + س \quad \text{---} \quad (٢)$$

الحل : نكتب المتغير س بدلالة ص من المعادلة (٢) للحصول على

$$-٣ = ص٢ + س \Leftarrow \boxed{س = -٣ - ص٢}$$

الآن، نعوض هذا الناتج في المعادلة (١) :

$$٤ = ص - ٢س \quad \text{---} \quad (١)$$

$$٤ = ص - (-٣ - ص٢)٢$$

$$٤ = ص - ٦ - ص٤$$

$$٤ = ص٥ - ٦$$

$$١٠ = ص٥ \Leftarrow ٦ + ٤ = ص٥ \Leftarrow \boxed{ص = ٢}$$

نعوض قيمة ص في المعادلة رقم (١) :

$$٤ = ٢ + س٢ \Leftarrow ٤ = ٢ + ٢س$$

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢س}{٢} \Leftarrow \boxed{س = ١}$$

مثال :- اوجد قيمة س ، ص ، ع في المعادلة

$$س + ٢ص = ١ \quad \text{---} \quad (١)$$

$$ص - ع = ٢ \quad \text{---} \quad (٢)$$

(الحل بالطريقة السابقة $س = \frac{١}{٢}$ ، $ص = -١$ ، $ع = -٣$)

الحل : نعوض المعادلة (٢) في المعادلة (١) لنحصل على قيمة المتغير س بالصورة :-

$$ع + ص = س \Leftarrow ع = ص - س$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على :-

$$١ = ص + ٢س$$

$$١ = ص + ٢(ع + ص)$$

$$١ = ص + ٢ع + ٢ص$$

$$٣ص + ٢ع = ١ \Leftarrow ٣ص = ١ - ٢ع$$

$$ص = \frac{١ - ٢ع}{٣}$$

بالتعويض قيمة ص في المعادلة (٢) :-

$$ع = ص - س \Leftarrow ع = \left(\frac{١ - ٢ع}{٣}\right) - س$$

$$٣ع = ١ - ٢ع + ٣س$$

$$٥ع = ١ + ٣س$$

$$ع = \frac{١ + ٣س}{٥}$$

٤ - معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد :-

يكتب هذا النوع من المعادلات على الصورة التالية :

$$أ س^{٢} + ب س + ج = صفر$$

حيث $أ، ب، ج \in ح$ ، $أ \neq صفر$

بعض الحالات المختلفة من هذه الصيغة :-

أ - في حالة $ب = صفر$ :- (يصبح شكل المعادلة السابقة على النحو الآتي)

$$أ س^{٢} + ج = صفر$$ (تسمى معادلة ثنائية)

وحل هذا النوع من المعادلات يكون على الصورة :-

$$س = \pm \sqrt{\frac{-ج}{أ}}$$ ($\frac{-ج}{أ}$ : عدد غير سالب)

مثال :- اوجد قيم س من المعادلة

$$س^{٢} - ٤٩ = صفر$$

الحل :- $س^{٢} = ٤٩$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$$س = \pm \sqrt{٤٩} = \pm ٧$$

$$س^{٢} + ٤٩ = صفر$$

$$س^{٢} = -٤٩ \Leftarrow س = \pm \sqrt{-٤٩}$$ (عدد غير حقيقي)

لا يوجد حل .

ب) اذا كانت $أ س^{٢} + ب س = صفر$ ، $أ \neq صفر$ .

يتم حل هذا النوع من المعادلات بأخذ $س$ كعامل مشترك لتصبح المعادلة على الصورة :

$$أ س^{٢} + ب س = صفر$$

$$س ( أ س + ب ) = صفر$$

حل هذه المعادلة يكون على النحو الآتي :

$$\boxed{س = صفر}$$ أو $أ س + ب = صفر$

ومنه $\boxed{س = \frac{-ب}{أ}}$

مثال : حل المعادلة

$$٥ س^{٢} + ٩ س = صفر$$

الحل :- $س ( ٥ س + ٩ ) = صفر$

إما $\boxed{س = صفر}$ وإما $٥ س + ٩ = صفر$

$$٥ س = -٩$$

$$\boxed{س = \frac{-٩}{٥}}$$

مثال :- حل المعادلة

$$٣ س^{٢} - ٩ س = صفر$$

اخراج عامل مشترك $\Leftarrow$ $٣ س ( س - ٣ ) = صفر$

$\boxed{س = صفر} \Leftarrow ٣ س = صفر$

$\boxed{س = ٣} \Leftarrow س - ٣ = صفر$

جـ إذا كانت $ص = أ س^{2} + ب س + جـ$ ، $أ \neq 0$ ، $ب \neq 0$ ، $جـ \neq 0$

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطريقتين التاليتين :-

1) طريقة التحليل : وتتم من خلال تحليل المعادلة التربيعية إلى مقدارين خطيين نستخدم القاعدة التالية :-

قاعدة : حاصل ضرب مقدارين خطيين يساوي صفر فهذا يعني أن أحد المقدارين يساوي صفر أو المقدار الآخر يساوي صفر .

مثال 1 :- أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

$س^{2} - ٧س + ١٠ = ص = 0$

$ص = (س - ٢)(س - ٥)$

$س - ٢ = ص \Leftarrow$ $\boxed{س = ٢}$

$س - ٥ = ص \Leftarrow$ $\boxed{س = ٥}$ (حلا المعادلة التربيعية)

مثال 2 : أوجد قيم س التي تحقق المعادلة

$س^{2} - ٢س + ١ = ص = 0$

$ص = (س - ١)(س - ١)$

$س - ١ = ص \Leftarrow$ $\boxed{س = ١}$ (لاحظوا أن للمعادلة التربيعية حل واحد فقط)

للتأكد من صحة الحل :

$ص = (١)^{2} - ٢(١) + ١$

$ص = ١ - ٢ + ١ = 0$

# حل اسئلة الواجب الأول

س ١ : ناتج قسمة المقدار

$٥س^{٤} - ٥س^{٣} + ٥س^{٢}$

على المقدار

$٥س$ ؟

الحل:

$$\frac{٥س^{٤} - ٥س^{٣} + ٥س^{٢}}{٥س} = \frac{٥س^{٤}}{٥س} - \frac{٥س^{٣}}{٥س} + \frac{٥س^{٢}}{٥س}$$

$$= س^{٣} - س^{٢} + ١$$

س ٢ : قيمة المقدار $لو (١٠٠ \times ١٠^{-٢})$ ؟

الحل: $لو (١٠٠ \times ١٠^{-٢}) = لو (١٠٠ \times \frac{١}{١٠^{٢}})$

$= لو (١٠٠ \times \frac{١}{١٠٠})$

$= لو \frac{١٠٠}{١٠٠} = لو ١ = صفر$

طريقة أخرى :-

$لو (١٠٠ \times ١٠^{-٢}) = لو ١٠٠ + لو ١٠^{-٢}$

$= لو ١٠^{٢} + لو ١٠^{-٢}$

$= ٢ لو ١٠ - ٢ لو ١٠$

$= ٢(١) - ٢(١) = صفر$

س٣ : إذا كان $(٢ س^{٢} - ٧ ص)^{٢}$ فما قيمة المقدار $(٢ س^{٢} + ٧ ص)^{٢}$ ؟

الحل :- $(٢ س^{٢} + ٧ ص)^{٢} = (٢ س^{٢} - ٧ ص)^{٢}$

$= (٢ + ٢)^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦$ .

س٤ : إذا كانت $\log_{١٠} س = ص$ فإن قيمة $س$ تساوي ؟

الحل :- $\log_{١٠} س = ص \Leftarrow س = ١٠^{ص}$

$١٠^{٣} = ١٠^{ص} \Leftarrow ص = ٣$

س٥ : ناتج جمع المقدار $٣ س^{٢} - ٥ ص^{٣} - ٢ ع^{٤}$

والمقدار $٤ ص^{٣} + ٢ ع^{٤} - ٢ س^{٢}$ ؟

الحل : إعادة ترتيب حدود المقدار الأول والثاني مع وضع علامة الجمع :

$$\begin{array}{r} ٣ س^{٢} - ٥ ص^{٣} - ٢ ع^{٤} \\ + \quad -٢ س^{٢} + ٤ ص^{٣} + ٢ ع^{٤} \\ \hline ص^{٣} - ص^{٣} + ص^{٣} \end{array}$$

س٦ : الجذر التكعيبي للمقدار $١٢٥ س^{-٣} ص^{٦}$ ؟

$$\sqrt[٣]{١٢٥ س^{-٣} ص^{٦}} = \sqrt[٣]{١٢٥} \times \sqrt[٣]{س^{-٣}} \times \sqrt[٣]{ص^{٦}} = ٥ س^{-١} ص^{٢}$$

$$= \frac{٥ ص^{٢}}{س}$$

شكراً لحضوركم وحسن استماعكم

د. رائد الخصاونة

# الباب الخامس: المعادلات

## أنواع المعادلات :-

١) معادلات خطية في مجهول واحد (س) .

أ س = ب .

٢) معادلات خطية في مجهولين .

أ س + ب ص = جـ .

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين .

أ١ س + ب١ ص = جـ١

أ٢ س + ب٢ ص = جـ٢ .

٤) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ص .

وفقاً :-

أ) أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ص ( ص = ٠ )

ب) أ س$^{٢}$ + جـ = ص ( ب = ٠ )

جـ) أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ص ( أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ ، جـ ≠ ٠ )

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بإحدى الطرق التالية :-

١) طريقة التحليل (المقص) .

٢) طريقة القانون العام :-
والصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو التالي :-

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

حيث أ : معامل $س^{٢}$
ب : معامل س
جـ : الحد الثابت .

لاحظوا أنه لهذا ($ب^{٢} - ٤ أ جـ$) يسمى بالمميز ويرمز له بالرمز م
وترتب على ذلك ثلاث حالات للمميز :-

١) اذا كانت م > صفر ، يكون للمعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر$
حلين حقيقيين مختلفين هما :-

$$س_{١} = \frac{-ب + \sqrt{م}}{٢ أ} \quad ، \quad س_{٢} = \frac{-ب - \sqrt{م}}{٢ أ} .$$

(ويسميان ايضا جذرا المعادلة) .

٢) اذا كانت م = صفر ، يكون للمعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر$
حل وحيد فقط وهو $س = \frac{-ب}{٢ أ}$ .

٣) اذا كانت م < صفر ، يكون للمعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر$
حلين غير حقيقيين (بمعنى أنه لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة)

مثال :- حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) $س^{٢} + ٢س - ١٥ = صفر$ .

٢) $س^{٢} + ٢س + ٣ = صفر$ .

٣) $س^{٢} - ٢س = -\frac{١}{٤}$ .

الحل :

١) $س^{٢} + ٢س - ١٥ = صفر$ .

لاحظوا أن $أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = -١٥$ .

وباستخدام قانون المميز نحصل على :-

$ب^{٢} - ٤أجـ = ٢^{٢} - ٤(١)(-١٥) = ٤ + ٦٠ = ٦٤$ .

وبما أن المميز $> صفر$ ، إذاً المعادلة طرفي حقيقيان هما :-

$س_{١} = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٢ + ٨}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$ .

$س_{٢} = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٢ - ٨}{٢} = \frac{-١٠}{٢} = -٥$ .

٢) $س^{٢} + ٢س + ٣ = صفر$ .

لاحظوا أنه حيث $أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٣$ .

وحساب المميز $ب^{٢} - ٤أجـ$ نحصل على :

$٤ - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨ < صفر$ .

لذا لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة حيث أن المميز سالباً .

٣) $\int_{-1}^{1} c^{x}\,dx = c - c^{-1} = c - \frac{1}{c}$ .

لحل هذه المعادلة من الأفضل عمل إعادة كتابة على الصورة العامة

$$\text{صفر} = \frac{1}{c} + c - c^{x}$$

$$\text{أ} = 1 ,\ \text{ب} = -1 ,\ \text{ج} = \frac{1}{c} .$$

وباستخدام قانون المميز نحصل على :

$$\text{صفر} = 4 - 4 = (\frac{1}{c})(1)(4) - (-1)^{2}$$

إذاً المعادلة لها حل حقيقي واحد هو :

$$x = \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} = \frac{-(-1)}{(2)(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} .$$

ولو أردنا التأكد من صحة الحل، فإننا نقوم بتعويض قيمة $x = \frac{1}{2}$ في المعادلة الأصلية للتحقق من :

$$c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} = c - \frac{1}{c}$$

عندما $x = \frac{1}{2}$ :

$$c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} = c - \frac{1}{c}$$

$$c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{2} - 1}{c}$$

$$c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{2}}{c} - \frac{1}{c}$$

$$c^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} = c - \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c} = c - \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

∴ الحل صحيح .

ملاحظة : عند استخدام القانون العام لإيجاد جذور معادلة تربيعية بمتغير واحد ، لابد من كتابة المعادلة على الصورة العامة :

$$أ س^2 + ب س + ج = صفر$$

⊙ المتراجحات الخطية بمجهول واحد :-

- تعريف : المتراجحة هي عبارة عن معادلة ولكنها تأخذ أحد الأشكال التالية :-

$$<\ ,\ >\ ,\ \leq\ ,\ \geq$$ بدلاً من إشارة المساواة

مثلاً : $٥ - ٥س > ١١ + ٤س$ (متراجحة خطية بمجهول واحد)

$$١ \leq ٣ + ٤س$$

هي أمثلة على متراجحات خطية بمجهول واحد .

- عملية حل المتراجحة الخطية بمجهول واحد (س) هي عبارة عن إيجاد قيمة المتغير س الذي يحقق طرفي المتراجحة المعطاة. ويجب ملاحظة أنه إشارة المتراجحة تتغير عن الضرب أو القسمة بعدد سالب ، أما بقية العمليات كالجمع أو الطرح من عدد موجب أو سالب وكذلك القسمة والضرب بعدد موجب فتبقى إشارة المتراجحة كما هي دون تغيير .

مثال ١ : أوجد حل المتراجحة التالية :

$$-١ \leq ٣س + ١١ \leq ٥$$

الحل : نستخدم نفس الأسلوب المتبع في طريقة حل المعادلات الخطية في مجهول واحد حيث نقوم بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والأعداد الحقيقية في الطرف الآخر .

$$-١ - ١١ \leq ٣س \leq ٥ - ١١$$

$$-١٢ \leq ٣س \leq -٦$$

وبالقسمة على معامل س (٣) نحصل على :

$$-٤ \leq س \leq -٢$$

(لاحظوا أن اتجاه المتراجحة تغير عند القسمة على العدد -٣)

وبالتالي فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي : $\{س \in ح : -٤ \leq س \leq -٢\}$

أو

$[-٤ ، -٢]$ .

مثال : أوجد مجموعة حل المتراجحة :

$$١ < ٣ + ٤س < ٩ ؟$$

الحل : $-٣ < ٤س < ٩ - ٣$

$$-٢ < ٤س < ٦$$

$$\frac{-٢}{٤} < س < \frac{٦}{٤}$$

(قسمة المتراجحة على معامل س = ٤)

$س \geq -\frac{1}{2}$ .

مجموعة الحل $= \{ س \in ح : س \geq -\frac{1}{2} \} = [-\frac{1}{2}, \infty)$ .

- بعض القارئين على الباب الخامس :-

س١ : أوجد حل كل من المعادلات التالية :-

(أ) $-٤س - ٥ = -٦س + ٥$ .

الحل : $-٤س + ٦س = ٥ + ٥$ . (نجمع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والأعداد الحقيقية في الطرف الآخر)

$٢س = ١٠$

$\boxed{س = ٥}$

(ب) $٣س - ٥ = ٢ص$ .

الحل : $\frac{٣س}{٣} = \frac{٢ص + ٥}{٣}$

$\boxed{س = \frac{٢ص + ٥}{٣}}$

نلاحظ أنه لدينا عدد لا نهائي من الحلول حيث أنه قيمة المتغير س تعتمد على قيمة المتغير ص .

نفرض أن : ص = ٥ ، فتصبح قيمة س كالتالي :-

$س = \frac{٢(٥) + ٥}{٣} \Leftarrow س = \frac{١٥}{٣} \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

ب) $ص - ٣س = ٧$ ـــــ (١)

$٣س + ص = ٥$ ـــــ (٢)

الحل: باستخدام طريقة الحذف، نحصل على:

بضرب المعادلة الثانية بالعدد $+٣$:

$ص - ٣س = ٧$

$٣ص + ٩س = ١٥$

$١١س = ٢٢ \Leftarrow س = \frac{٢٢}{١١} \Leftarrow س = ٢$

بتعويض قيمة $س = ٢$ في المعادلة (٢)، نحصل على:

$٣(٢) + ص = ٥ \Leftarrow ص = ٥ - ٦ \Leftarrow ص = -١$

حل آخر: باستخدام طريقة التعويض:

من المعادلة الثانية، نعبر كتابة $ص$ بدلالة $س$:

$ص = ٥ - ٣س$ ـــــ (٣)

نعوض المعادلة (٣) في المعادلة (١) لنحصل على:

$ص - ٣س = ٧$

$(٥ - ٣س) - ٣س = ٧$

$١٥ + ٩س = ٧$

$١١س = ٧ + ١٥$

$س = ٢ \Leftarrow ١١س = ٢٢$

وبتعويض قيمة $س = ٢$ في المعادلة (٣) نحصل على قيمة $ص$ حيث:

$ص = ٥ + ٣(٢)$

$ص = -١$

ج) $٣س^{٢} + ٥س = صفر$ .

الحل: بأخذ س العامل مشترك من الطرف الأيسر، نحصل على:-

$س(٣س + ٥) = صفر$ .

$س = صفر$ أو $٣س + ٥ = صفر$

$٣س = -٥ \Leftarrow س = -\frac{٥}{٣}$

د) $٤س^{٢} - ١٢س + ٩ = صفر$

الحل: باستخدام القانون العام، يمكنه إيجاد حل هذا النوع من المعادلات (لاحظوا أن معامل $س^{٢} \neq ١$).

من خلال المميز:-

$م = ب^{٢} - ٤أجـ = (-١٢)^{٢} - ٤(٤)(٩)$

$= ١٤٤ - ١٤٤$

$= صفر$ .

∴ للمعادلة حل وحيد فقط:-

$س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-١٢)}{(٤)٢} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ .

للتأكد:-

$٤(\frac{٣}{٢})^{٢} - ١٢(\frac{٣}{٢}) + ٩ = صفر \Leftarrow صفر = ٩ + ١٨ - ٩ = صفر$

$صفر = صفر$

∴ الحل صحيح

بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الثامن

# الباب السادس (المصفوفات)

تعريف :- المصفوفة هي عبارة عن تنظيم للأعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمدة في جدول مستطيل الشكل بحيث يتكون هذا المستطيل من م من الصفوف و ن من الأعمدة ، يرمز للمصفوفات بحروف عربية كبيرة كما هو مثل أ ، ب ، جـ ، .... ولذلك ليتميز المصفوفة عن عناصرها .

يرمز الأعداد المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة ، وتكتب أي المصفوفة على الصورة العامة من الرتبة م × ن كالتالي :-

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & \cdots & أ_{1ن} \\ أ_{21} & (أ_{22}) & \cdots & أ_{2ن} \\ \vdots & & & \\ أ_{م1} & أ_{م2} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix}$$

لاحظوا أن العنصر $أ_{22}$ هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني ، وهكذا بقية العناصر .

مثال :-

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ (-١) & ٥ & ٠ \\ ١ & ٧ & -٢ \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة و ٩ عناصر ، والعنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث = -١

يقال أن رتبة أي مصفوفة هي عدد الصفوف × عدد الأعمدة
فالمصفوفة السابقة أ هي من الرتبة ٣×٣ .

مثال :- $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ← صف واحد وثلاثة أعمدة

مصفوفة من الرتبة ١×٣ .

مثال :- $ج = \begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ ← عدد واحد، ٣ صفوف

مصفوفة من الرتبة ٣×١

* أنواع المصفوفات :

١) المصفوفة المستطيلة :- هي عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة .

مثال :- $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & -١ & ٤ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢×٣

عدد عناصر = ٦

٢) المصفوفة المربعة : إذا كانت المصفوفة من الرتبة ٢×٢ (أي عدد الصفوف = عدد الأعمدة) فنقول بأنه المصفوفة مربعة الشكل .

مثال :- $ب = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة رتبتها ٢×٢ ومحتوى ٤ عناصر .

٣) المصفوفة الصفرية :- وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ورمز لها بالرمز صفر ، مثال :- $صفر_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤) المصفوفة القطرية :- هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العناصر الواقعة على القطر (على الأقل أحد عناصر القطر لا يساوي صفراً).

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & صفر & صفر \\ صفر & ٤ & صفر \\ صفر & صفر & صفر \end{bmatrix}_{٣\times٣}$ مصفوفة قطرية .

٥) مصفوفة الوحدة :- هي المصفوفة القطرية التي يكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد واحد .

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٢×٢ .

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & صفر & صفر \\ صفر & ١ & صفر \\ صفر & صفر & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة ٣×٣ .

تعريف :- يقال أن المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :-

(١) رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ = رتبة المصفوفة $\underline{ب}$ .

(٢) العناصر المتناظرة في كل المصفوفتين متساوية .

عنصر $أ_{هـ و}$ = عنصر $ب_{هـ و}$ حيث $هـ = ١، ٢، ... م$
$و = ١، ٢، ... ن$

مثال :- أوجد قيمة س ، ص حيث

$$\begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٤ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} س = ١ \\ ص = ٣- \end{matrix}$$

- العمليات الجبرية على المصفوفات :-

١) جمع مصفوفتين ، ٢) طرح مصفوفتين ، ٣) ضرب مصفوفة بعدد ثابت
٤) ضرب مصفوفتين .

١) جمع مصفوفتين :- إذا كان $\underline{أ} = [أ_{هـ و}]$ ، $\underline{ب} = [ب_{هـ و}]$

م رتبة ٣×٢ ، ن فإن مجموعهما هو المصفوفة $[أ_{هـ و} + ب_{هـ و}]$ م رتبة ٣×٢ .

نعني $\underline{أ} + \underline{ب} = [أ_{هـ و}] + [ب_{هـ و}] = [أ_{هـ و} + ب_{هـ و}]$

مثال :- إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥- \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}_{٣×٢} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ٥ \\ ١ & ١- & ٣ \end{bmatrix}_{٢×٣}$$

أوجد ١) $\underline{أ} + \underline{ب}$

٢) $\underline{ب} + \underline{أ}$

٣) $\underline{أ} + \underline{أ}$

الحل :- $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٣ & ١- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٥+٣ & ٤+٢ & ٣-+١ \\ ٣+٥- & ١-+١- & صفر+١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ١ \end{bmatrix}_{٢×٣}$

$\underline{ب} + \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٣ & ١- & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٣+٥ & ٢+٤ & ١+٣- \\ ٥-+٣ & ١-+١- & صفر+١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ١ \end{bmatrix}$

نقول بأن عملية الجمع على المصفوفات عملية ابدالية .

$\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

$\underline{أ} + \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ١٠- & ٢- & صفر \end{bmatrix}$

ومن الواضح نلاحظ أن $\underline{أ} + \underline{أ} = ٢\underline{أ}$

مثال :- اوجد $\underline{أ} + \underline{أ} + \underline{أ} + \underline{أ} = ٤\underline{أ} = ٤ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٢ & ٨ & ٤ \\ ٢٠- & ٤- & صفر \end{bmatrix}$

٢) طرح مصفوفتين :-

إذا كانت $\underline{أ} = [أ_{هو}]$ ، $\underline{ب} = [ب_{هو}]$ مصفوفتين من الرتبة $م \times ن$

فإن

$$\underline{أ} - \underline{ب} = [أ_{هو}] - [ب_{هو}] = [أ_{هو} - ب_{هو}]$$

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -ج \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ج \\ ٣ & صفر \end{bmatrix}$$

أوجد :-

أ) $\underline{أ} - \underline{ب}$

ب) $\underline{ب} - \underline{أ}$

الحل: $\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -ج \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ج \\ ٣ & صفر \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٣-١ & ٥-ج \\ ١-٣ & -ج-صفر \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٥-ج \\ -٢ & -ج \end{bmatrix}$$

$\underline{ب} - \underline{أ}$

$$= \begin{bmatrix} ج-٥ & -٢ \\ ٢ & ج \end{bmatrix}$$

نستنتج أن $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$ .

$\underline{أ} - \underline{ب} = -(\underline{ب} - \underline{أ})$ .

نلاحظ من المثال السابق أنه عملية الجمع والطرح تتم من خلال العناصر المتناظرة منهما ولا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من رتبتين مختلفتين .

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

حيث $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ج & 1 \\ 1 & 3- \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$

1) $\underline{ج} + \underline{ب}$

2) $\underline{ب} - \underline{ج}$

3) $\underline{ج} - \underline{ج}$

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 0 & ج \\ 1- & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$

الحل: 1) $\underline{ج} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ج & 1 \\ 1 & 3- \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 0 & ج \\ 1- & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ج-1 & 2 \\ 1 & ج-3 \\ 1- & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$

2) $\underline{ب} - \underline{ج} = \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 0 & ج \\ 1- & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ج & 1 \\ 1 & 3- \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2- & 0 \\ ج-1 & 6 \\ 1- & 6 \end{bmatrix}$

3) $\underline{ج} - \underline{ج} =$ صفر $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$

بداية محاضرة يوم الأحد من الأسبوع الثاني

متابعة الباب السادس: المصفوفات

٣) ضرب مصفوفة في عدد حقيقي:

إذا كانت $\underline{أ} = [\ ]_{م \times ن}$ مصفوفة من الرتبة $م \times ن$ وكان $ك$ أي عدد حقيقي فإن حاصل ضرب المصفوفة $\underline{أ}$ بالعدد $ك$ هو المصفوفة $ك\underline{أ} = [\ ]_{م \times ن}$.

مثال: إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة $٥\underline{أ}$ هي:

$$٥\underline{أ} = ٥ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥ \\ ١٠ & -٥ \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت $\underline{أ}، \underline{ب}$ مصفوفتين من الرتبة $م \times ن$، وكان $ك، ل \in ح$ فإن:

١) $ك(\underline{أ} + \underline{ب}) = ك\underline{أ} + ك\underline{ب}$

٢) $ك(ل\underline{أ}) = (ك ل)\underline{أ}$

٣) $ك\underline{أ} = صفر$ إذا وفقط إذا $ك = صفراً$ أو $\underline{أ} = صفر$

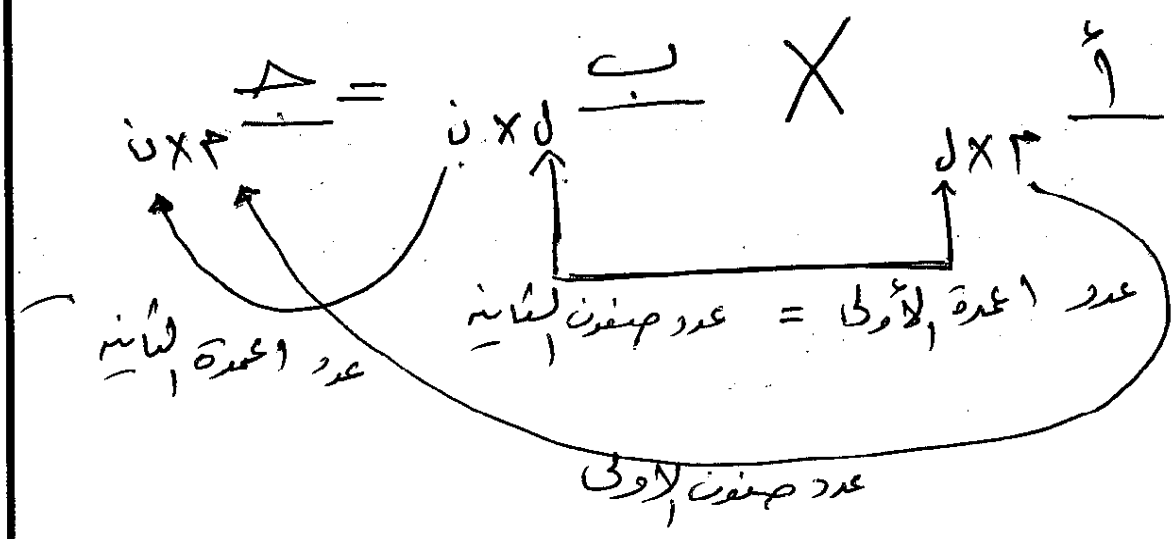
٤) $١\underline{أ} = \underline{أ}١ = \underline{أ}$.

٥) إذا كانت $ك \neq صفر$ وكانت $ك\underline{أ} = ك\underline{ب}$ فإن $\underline{أ} = \underline{ب}$.

٤) ضرب مصفوفتين :-

إذا كانت $\underline{أ} = [أ_{هـ و}]$ مصفوفة رتبتها $م \times ل$ ، وكانت $\underline{ب} = [ب_{هـ و}]$ مصفوفة رتبتها $ل \times ن$ ، فإن ضرب المصفوفة $\underline{أ}$ في المصفوفة $\underline{ب}$ هو المصفوفة $\underline{ح} = [ح_{هـ و}]$ ورتبتها $م \times ن$ .

بشكل آخر :-




(حتى تكون عملية ضرب المصفوفات معرفة ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية ، ورتبة حاصل ضربهما تساوي عدد صفوف الأولى مضروب في عدد أعمدة الثانية)

وتتم عملية ضرب مصفوفتين على النحو الآتي :-

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١أ & ١٢أ \\ ٢١أ & ٢٢أ \\ ٣١أ & ٣٢أ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١١ب & ١٢ب \\ ٢١ب & ٢٢ب \end{bmatrix}$$

$٣ \times ٢$ ← متشابهين → $٢ \times ٢$

$\underline{أ ب}$ $٣ \times ٢$

وتتم عملية الضرب على النحو التالي :-

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} ج_{11}ب_{11} + ج_{12}ب_{21} & ج_{11}ب_{12} + ج_{12}ب_{22} \\ ج_{21}ب_{11} + ج_{22}ب_{21} & ج_{21}ب_{12} + ج_{22}ب_{22} \\ ج_{31}ب_{11} + ج_{32}ب_{21} & ج_{31}ب_{12} + ج_{32}ب_{22} \end{bmatrix}$$

مثال :- إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 1 & -ج \\ ج & جس \end{bmatrix}_{2\times2}, \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -ج & 5 \\ 4 & ج \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} 1\times(-ج) + (-ج)\times ج & 1\times 5 + (-ج)\times ج \\ ج\times(-ج) + جس\times ج & ج\times 5 + جس\times ج \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}\,\underline{أ} = \begin{bmatrix} -ج\times 1 + 5\times ج & -ج\times(-ج) + 5\times جس \\ 4\times 1 + ج\times ج & 4\times(-ج) + ج\times جس \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5ج - ج^2 \\ 4 + ج^2 & -4ج + ج^2س \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $\underline{أ}\,\underline{ب} \neq \underline{ب}\,\underline{أ}$ (ضرب اى مصفوفتين عملية غير ابدالية)

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٠ & -١ & ٧ \end{bmatrix}_{٢\times٣}, \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ \\ -٤ & ٧ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

المطلوب ايجاد:

أ) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ج) $\underline{ب} \times \underline{أ}$

الحل:

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٠ & -١ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ \\ -٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢\times٢ + ٣\times٣ + (-٤)\times(-٤) & ٢\times٠ + ٣\times(-١) + (-٤)\times٧ \\ ٠\times٢ + (-١)\times٣ + ٧\times(-٤) & ٠\times٠ + (-١)\times(-١) + ٧\times٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ + ٩ + ١٦ & ٠ - ٣ - ٢٨ \\ ٠ - ٣ - ٢٨ & ٠ + ١ + ٤٩ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٩ & -٣١ \\ -٣١ & ٥٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}\,\underline{أ} = \underset{٣\times٢}{\underline{ب}} \times \underset{٢\times٣}{\underline{أ}}$$

(معرفة)

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -١ \\ -٤ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٠ & -١ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤+٠ & ٦+٠ & -٨+٠ \\ ٦+٠ & ٩+١ & -١٢-٧ \\ -٨+٠ & -١٢-٧ & ١٦+٤٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & -٨ \\ ٦ & ١٠ & -١٩ \\ -٨ & -١٩ & ٦٥ \end{bmatrix}$$

٢٧٣

تعريف: إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة، فإن المصفوفة التي نحصل عليها بتبديل الصفوف مع الأعمدة تسمى مبدل أو منقول المصفوف $\underline{أ}$ ويرمز له بالرمز $\underline{أ}'$

مثال: إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{أ}' = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

تعريف: إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة وكان $\underline{أ} = \underline{أ}'$ فإن $\underline{أ}$ تسمى مصفوفة متماثلة.

مثال: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ -٢ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$، $\underline{أ}' = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ -٢ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

لاحظ أن $\underline{أ} = \underline{أ}'$ ($\underline{أ}$ مصفوفة متماثلة)

تعريف: إذا كانت $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة.

$\underline{أ}\,\underline{ب} = \underline{ب}\,\underline{أ}$ = مصفوفة الوحدة فإن $\underline{ب}$ تسمى النظير الضربي (معكوس ضربي) للمصفوفة $\underline{أ}$.

مثال: إذا كانت

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & \text{صفر} \\ -١ & ١+ \end{bmatrix}$، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \text{صفر} \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

$$\underline{أ}\,\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢+ & صفر \\ ١+ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & صفر \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \times صفر + \frac{١}{٢} \times ٢ & صفر \times صفر + (-١) \times ٢ \\ \frac{١}{٢} \times ١ + \frac{-١}{٢} \times ١ & صفر \times ١ + (-١) \times (-١) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}_{٢ \times ٢}$$

وهي مصفوفة الوحدة.

∴ المصفوفة ب هي نظير ضربي للمصفوفة أ.

وفي الباب الساد

بداية محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الثاني عشر

# الباب السابع : المحددات

تعريف : إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة من الرتبة $N \times N$ ، فإنه يرافقها عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة $A$ ويرمز له بالرمز $|A|$.

وسنتعرف في هذا الفصل على محدد مصفوفة من الرتبة $1 \times 1$ ، $2 \times 2$ و أخيراً مصفوفة من الرتبة $3 \times 3$.

أولاً : محدد مصفوفة من الرتبة $1 \times 1$ :-

إذا كانت $A = [a_{11}]$ ، نعرف محدد $A$ بأنه

$|A| = a_{11}$ .

مثال :- إذا كان لدينا المصفوفة

$A = [5]$ ، فإن $|A| = 5$ .

ثانياً : محدد مصفوفة من الرتبة $2 \times 2$ :-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد $A$ نعرفه على النحو الآتي :-

$|A| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ .

( محدد مصفوفة $2 \times 2$ = حاصل ضرب عناصر القطر الأول − حاصل ضرب عناصر القطر الثاني.

مثال :- اوجد محدد المصفوفات التالية :-

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

الحل ① $|\underline{أ}| = ٥×٥ - (٢-×١)$

$= ٤ - (٢-) = ٤ + ٢ = ٧$ .

② $|\underline{ب}| = ٤×٠ - (٣×٥) = ٠ - ١٥ = -١٥$ .

ثالثاً : محدد مصفوفة من رتبة ٣×٣ :-

اذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١ & ٥ & ٣ \\ ١٤ & ٤٥ & ٣٥ \\ ١٣ & ٤٣ & ٣٣ \end{bmatrix}$

فإنه يمكن حساب محدد هذا النوع من المصفوفات بأحد الطرق التالية :-

١- $|\underline{أ}| = ١١ \begin{vmatrix} ٤٥ & ١٥ \\ ٤٣ & ١٣ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ١٤ & ١٥ \\ ١٣ & ١٣ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١٤ & ٤٥ \\ ١٣ & ٤٣ \end{vmatrix}$

$= ١١ (٤٥ ١٣ - ٤٣ ١٥) - ٥ (١٤ ١٣ - ١٣ ١٥) + ٣ (١٤ ٤٣ - ١٣ ٤٥)$ .

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٥- \\ ٦- & ٥- & ١ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل :- $|\underline{أ}| = ٣\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} + (-٢)\begin{vmatrix} -٥ & ٦ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٣(٣ - ٤ \times -٥) - ٢(٠ - ٤ \times ٦) - ٢(٠ - ٣ \times ٦)$

$= ٣(١٨) - ٢(-٢٤) - ٢(-١٨)$

$= ٥٤ + ٤٨ + ٣٦ = ١٣٨$

مثال : اوجد محدد المصفوفة

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل :- $|\underline{ب}| = ٠\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + (-١)\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$

$= صفر - ١(٠ - ٥ \times ١) - ١(-٣ - ٢ \times ١)$

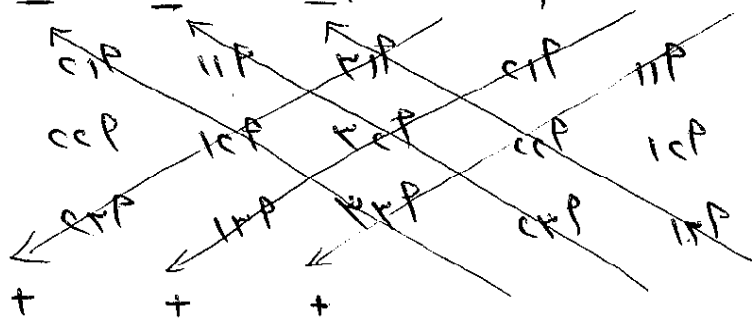
$= ٥ + ٥ = ١٠$

© طريقة ساروس :-

تلخص هذه الطريقة بأن نكتب العمود الأول والعمود الثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي بالشكل الموضح أدناه :-

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١ & ١٢ & ١٣ \\ ٢١ & ٢٢ & ٢٣ \\ ٣١ & ٣٢ & ٣٣ \end{bmatrix}$

نقوم بإعادة كتابة المصفوفة أ على الصورة :-



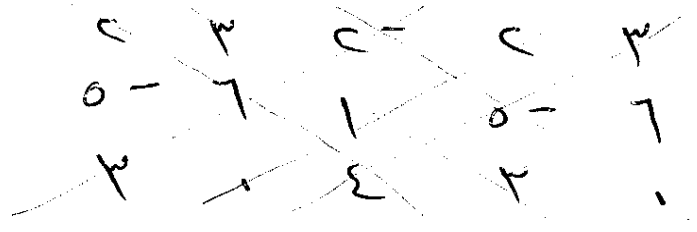
وعليه فإن محدد المصفوفة أ يصبح على الصورة التالية :-

$$|\underline{أ}| = (ج_{31} ب_{22} أ_{13} + ب_{12} ج_{23} ج_{31} + أ_{32} ج_{21} ب_{11}) - (ج_{31} ب_{22} أ_{32} + ب_{12} ج_{21} ج_{33} + أ_{13} ج_{23} ب_{11})$$

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -ج & ج & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $|\underline{أ}|$

الحل :- (حسب القاعدة الأولى)

$$|\underline{أ}| = -105$$



$$|\underline{أ}| = (3 \times 6 \times -ج + 0 \times 1 \times ج + 4 \times -5 \times 3) - (ج \times 6 \times 4 + 3 \times 1 \times 3 + -ج \times -5 \times 0)$$

$$= (-36 - 60) - (96 + 9)$$

$$= -57 - 96$$

$$= -105$$

مثال : أوجد محدد المصفوفة :-

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} صفر & ١ & ١- \\ ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & ١- & صفر \end{bmatrix}$$

$|\underline{ب}| = ١٠$
حسب الطريقة الأولى .

الحل :-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١- | ١ | ٠ | ٢ |
| ٣ | ٢ | ٥ | ٣ | ٢ |
| ١- | ١ | ٠ | ١- | ١ |

$|\underline{ب}| = (٠ \times ٢ \times ١ + ١ \times ٥ \times ١ + ٣ \times ٢ \times ٠) - (١ \times ٢ \times ٠ + ٠ \times ٥ \times ١- + ١- \times ٣ \times ١)$

$= (٢ + ٥) - (٣-) = ٧ + ٣ = ١٠$ .

---

* خواص المحددات :-

سوف نستعرض في هذا البند بعض خواص المحددات والتي تفيد الطالب في عملية حساب محدد ، وسم هذه الخواص :-

١) إذا وجد صف أو عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره أصفار ، فإن محدد تلك المصفوفة = صفر .

مثال :-

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} = صفر$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ١- & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = صفر .$$

$$\begin{vmatrix} ١- & ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٧ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} = صفر$$

٢) لا تتغير قيمة المحدد اذا استبدلنا الأعمدة بالصفوف والصفوف بالأعمدة:-

مثال:- ① $\begin{vmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = -١٣$

④ $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -٤$

٣) عند استبدال صف بصف آخر او عمود بعمود آخر فإن إشارة المحدد تتغير:-

مثال:- $\begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٤$

$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٣(-٨) - (-١)(\text{صفر}) = -٤$

مثال: $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = -١٠$

$٣ \times ٢ - ٤ \times ١ = ٦ - ٤$

$-(٢ \times ٤ - ٣ \times ١) = -(٨ - ٣) = -١٠$

٤) إذا ساوت العناصر المقابلة لعمودين (وصفين) في مصفوفة $\underline{أ}$، فإن $|\underline{أ}| =$ صفر.

مثال:-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

العمود الثالث = عناصر العمود الثاني.

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$$

(لاحظوا أن عناصر الصف الثاني = عناصر الصف الأول)

٥) إذا ضربت عناصر عمود أو صف لمصفوفة $\underline{أ}$ بعدد ثابت ولتكن م، فإن قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروباً في العدد م.

مثال: إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \Longleftarrow |\underline{أ}| = (-١ \times ٢) - ٥ \times ٣$$
$$= -٢ + ١٥ = ١٣$$

وضربنا عناصر الصف الأول في العدد -٢

فتصبح المصفوفة الجديدة :-

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \Longleftarrow |\underline{ب}| = (٢ \times ٢) - (٥ \times -٦)$$
$$= ٤ - (-٣٠)$$
$$= ٣٤$$

مثال :- اذا كان محدد المصفوفة $\underline{أ} = ١٠$
وضرب الصف الثاني بالعدد $-٥$ ، فإن
محدد المصفوفة الجديد يساوي :-

$$١٠ \times -٥ = -٥٠ .$$

٦) محدد المصفوفة المقابلة يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

مثال :- اوجد محدد المصفوفة

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & صفر & صفر \\ صفر & -١ & صفر \\ صفر & صفر & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|\underline{أ}| = ٢ \times -١ \times ١$$
$$= -٢ .$$

# المحاضرة المباشرة الثالثة

مقرر مبادئ الرياضيات

د. رائد الخصاونة

الاحد: 11-1-1434 هـ

الساعة : الرابعة مساءاً

## حل أسئلة الفقرة الأولى

- أوجد ناتج كلاً من المقادير التالية بأبسط صورة:

١) $٤ - = ٢ \div ٨ - = ٢ \div ٤ \times (-٢) = ٢ \div ٤ \times (٣ + ٥ -)$

٢) $\frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٧} - \frac{١ \times ٧}{٢ \times ٧} = \frac{٣}{٧} - \frac{١}{٢}$

$= \frac{٦}{١٤} - \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{١٤}$ .

٣) $\frac{١}{٢} - \times \frac{٣}{٧} = \frac{٣}{١٤} -$ .

٤) $٩ \div ٢ \times ٢ - ٥ = ٥ - ٢ \times ٣$

$= ٥ - ٦$

$= ١$

## حل أسئلة الفقرة الثانية

أجب عن الأسئلة التالية:

١) حيث المقدار $٣ - ٢$ لو ١٠٠٠

الحل: $٣ - ٢$ لو ١٠٠٠ $= ٣ - ٢ \times ١$ لو ١٠

$= ٣$ لو $١٠^{٣}$ $= ٢ \times ٢ \times ٢$ لو ١٠

$= ٩ \times ١ = ٩$ .

٢) قيمة المتغير س في المقدار لو س = ٣ ؟

الحل: لو س = ٣ ⇐ س = ١٠ ⇐ س = ١٠٠٠

٣) اكتب صورة المقدار $س^{-٣} \times س^{٥} + س^{٢}$ ؟

الحل: $س^{-٣} \times س^{٥} + س^{٢} = \frac{س^{٥}}{س^{٣}} + س^{٢} = س^{٢} + س^{٢}$

$= ٢ س^{٢}$

٤) ناتج المقدار لو ١٠٠ − لو ٢٥ + لو $٥^{-٢}$ − ٢ ؟

الحل: لو ١٠٠ − لو ٢٥ + لو $٥^{-٢}$ − ٢

⇓

لو $١٠^{٢}$ − لو $٥^{٢}$ − ٢ لو ٥ − ٢

٢ لو ١٠ − ٢ لو ٥ − ٢ لو ٥ − ٢

٢ − ١ × ٢ − ١ × ٢ − ١ × ٢

٢ − ٢ − ٢ = −٢

٥) الجذر التكعيبي للعدد لو $١٠^{-١}$ ؟

$\sqrt[٣]{\text{لو } ١٠^{-١}} = \sqrt[٣]{-\text{لو } ١٠} = \sqrt[٣]{-١}$

$= -١$

# الملازمة الثالثة

السؤال الأول: إذا كان لديك المقدارين

$(س^3 - ص^2)$ ، $(س^2 - ص)$ أوجد:

١) $(س^2 - ص^2) + (س^2 - ص) = س^3 - ٤س^2 - ص$

٢) $(س^2 - ص) - (س^3 - ص^2) = (س^2 - ص) - س^3 + ص^2$

$= -س^3 + ٦س^2 - ص$

٣) $(س^3 - ص^2)(س^2 - ص) = س^3 س^2 - ص س^3 - ص^2 س^2 + ص^2 ص$

$= س^5 - ص^4 - ص^4 + ص^3$

$= س^5 - ٢ص^4 + ص^3$

٤) $(س^2 - ص^2) \div (س^2 - ص)$

باستخدام القسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r|l} س^3 - ص^2 & س^2 - ص \\ \hline س^3 - ص^2 & س \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

خارج القسمة = س

والباقي = صفر

حل أسئلة الجلسة الثانية

السؤال الأول : حلل المقادير الجبرية التالية إلى عواملها الأولية :

أ) $٣س ص - ٩س^{٢} ص^{٣} + ٢٧ ص^{٤} = ٣ص(س - ٣س^{٢} ص^{٢} + ٩ص^{٣})$
(اخراج عامل مشترك)

ب) $(٢٥ س^{٤} - ٨١ ص^{٢}) = (٥س - ٩ص)(٥س + ٩ص)$
(الفرق بين مربعين)

ج) $(٤^{٣} + ٢٧)(٤ + ٣) = (٤^{٢} - ٣٤ + ٩)$
(مجموع تكعيب)

د) $س^{٢} - ١٠س + ١٦ = (س - ٨)(س - ٢)$

السؤال الثاني : اذا كان لدينا المقدارين

$$\frac{١}{١ - س^{٢}} \text{ ، } \frac{٢}{١ + س}$$

١) $\frac{١}{١ - س^{٢}} + \frac{٢}{١ + س} = \frac{١}{(١ + س)(١ - س)} + \frac{٢}{١ + س} \times \frac{١ - س}{١ - س}$

$$= \frac{٢ - ٢س + ١}{(١ + س)(١ - س)}$$

$$= \frac{٣ - ٢س}{١ - س^{٢}} .$$

ج - حاصل قسمة :-

$$\frac{1}{1-ج^2 س} \div \frac{ج}{1+س} = \frac{1}{1-ج^2 س} \times \frac{1+س}{ج}$$

$$= \frac{1}{(1+س)(1-س)} \times \frac{1+س}{ج}$$

$$= \frac{1}{(1-س)ج}$$

## تمارين رسائل على الفصل الخامس
## ( المعادلات )

- اوجد حل كل من المعادلات التالية :-

أ) $٧س - ج = ٨ - ٣س$

الحل : نجمع الحدود التي تحوي على المتغير س في طرف والثوابت في الطرف الآخر

$$٧س + ٣س = ٨ + ج \Leftarrow ١٠س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$$

ج) $٦س - ٣ص + ٥ = صفر$ عندما $ص = -١$ ؟

الحل :- $٦س = ٣ص - ٥$

$$\Leftarrow س = \frac{٣ص - ٥}{٦}$$

عندما $ص = -١ \Leftarrow س = \frac{٣(-١) - ٥}{٦} \Leftarrow س = \frac{-٨}{٦}$

$$س = -\frac{٤}{٣}$$

(٣) $٧س^{٢} = ١٢س$ . (معادلة من الدرجة الثانية حيث نلاحظ أنه فيها الحد الثابت = صفر)

الحل:

$٧س^{٢} - ١٢س = صفر$

وباخراج عامل مشترك للمتغير س :-

$س(٧س - ١٢) = صفر$

$\Leftarrow$ $س = صفر$

أو

$٧س - ١٢ = صفر \Leftarrow ٧س = ١٢ \Leftarrow س = \frac{١٢}{٧}$

$\Leftarrow س = ٢$ .

(٤) $٢س^{٢} - ٣س - ١ = صفر$ .

الحل :- معادلة من الدرجة الثانية حيث نلاحظ وجود جميع حدود المعادلة، نحن خلال استخدام المميز والقانون العام يمكننا إيجاد جذور هذه المعادلة :-

$المميز = ب^{٢} - ٤أجـ = (-٣)^{٢} - ٤(٢)(-١)$

$= ٩ + ٨ = ١٧ > صفر$

إذن للمعادلة جذران مختلفان :-

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ} \Leftarrow س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{١٧}}{(٢)٢}$

$س_{١} = \frac{٣ + \sqrt{١٧}}{٤}$

$س_{٢} = \frac{٣ - \sqrt{١٧}}{٤}$

٥) $٤س - ٦ > ٦س + ٤$ .

الحل :- متباينة بمتغير واحد :-

$٤س - ٦س > ٦ + ٤$

$-٢س > ١٠$ قسمة الطرفين ÷ معامل س = $-٢$

$س < \frac{١٠}{-٢} \Leftarrow س < -٥$

(لاحظ أنه عند تغير اشارة المتباينة س اصغر لا اكبر لسالب عدد سالب)

٦) $٢س - ٢ص = ١٠$ ـــــ (١)

$س - ص = ٥$ ـــــ (٢)

الحل :- باستخدام طريقة الحذف :

(نضرب المعادلة الثانية في العدد ٢)

$٢س - ٢ص = ١٠$

$+ -٢س + ٢ص = -١٠$ نجمع مع تغير اشارة الثاني

$٠ + ٠ = ٠$

$س = ص$

بالتعويض في المعادلة الثانية :-

$ص - ص = ٥ \Leftarrow ٠ = ٥$

$ص = -٥$

الحل باستخدام طريقة التعويض :

من المعادلة الثانية :

$س = ص + ٥$ ـــــ (٣)

بالتعويض في المعادلة (١) :-

$٢(ص + ٥) - ٢ص = ١٠$

$٢ص + ١٠ - ٢ص = ١٠$

$ص = ١٠ - ١٠$

$ص = -٥$

بالتعويض في ٣ :-

$س = -٥ + ٥ \Leftarrow س = ٠$

# تمارين ومسائل على الفصل السادس
## المصفوفات

١- إذا كان لدينا

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ج \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ج \end{bmatrix}$$

أوجد :

١) $\underline{أ} - \underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ج \\ ١ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ج \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥-٤ & ج-٣ \\ ١-(-١) & ج-١- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ج & ٣- \end{bmatrix}$$

٢) $ج\underline{أ} + \underline{ب}$

$$= ج\begin{bmatrix} ٥ & ج \\ ١ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ج \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ ج & ج- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ج \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٧ \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$$

٣) $\underline{أ} \times \underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ج \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ج \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤ \times ٥ + ج \times ١- & ٣ \times ٥ + ج \times ج \\ ٤ \times ١ + ١- \times ١- & ٣ \times ١ + ج \times ١- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١- & ٥- \end{bmatrix}$$

- إذا كان لدينا

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ج & ١ & ٣ \\ ١- & ١ & صفر \\ ٤ & ٥ & ج \end{bmatrix}$$

أوجد $|\underline{أ}|$ ؟

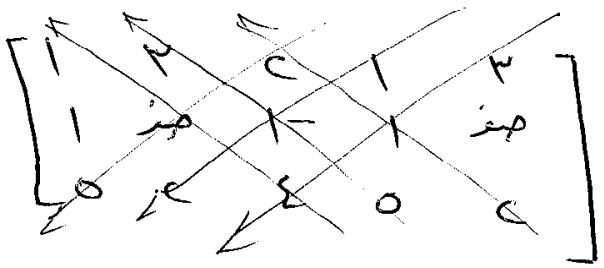
$$|\underline{أ}| = ٣\begin{vmatrix} ١ & صفر \\ ٥ & ج \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ١- & صفر \\ ٤ & ج \end{vmatrix} + ج\begin{vmatrix} ١- & ١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٤+٥) - ١(ج) + ج(-ج)$$

$$= ٢٧ - ج - ٤ = ٢١ \cdot$$

وأيضاً أخرى :- سأوريكا .

$|أ| = ؟$



$$|أ| = (٥ \times صفر \times ج + ج \times ١- \times ١ + ٤ \times ١ \times ٣)$$

$$- (١ \times صفر \times ٤ + ٣ \times ١- \times ٥ + ٢ \times ١ \times ج)$$

$$= ١٠ + ١١ = ج١$$

شاكراً للجميع
حسن الحضور والاستماع

# الباب السابع : المحددات

## كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة :-

إذا كان لدينا المصفوفة $\underline{أ}$ وأوجدنا مصفوفة أخرى ولتكن $\underline{ب}$ حيث

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{أ} = \text{مصفوفة الوحدة}$$

عندئذ نقول بأن $\underline{ب}$ هو النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ .

ونرمز للنظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ بالرمز $\underline{أ}^{-1}$

ولإيجاد النظير الضربي لمصفوفة رتبة من الرتبة ٢ ، فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :-

نقول إذا كانت

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١١م & ١٢م \\ ٢١م & ٢٢م \end{bmatrix}$$

فإن $\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} ٢٢م & -١٢م \\ -٢١م & ١١م \end{bmatrix}$

مثال: أوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ١ & صفر \end{bmatrix}$$

الحل: الخطوة الأولى: أوجد قيمة المحدد للمصفوفة $\underline{أ}$:

$$|\underline{أ}| = صفر \times ٤ - (-١ \times ١)$$
$$= صفر - (-١) = ١$$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} صفر & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = ١ \begin{bmatrix} صفر & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} صفر & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل:

هل $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١}$ = مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} صفر & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ١ & صفر \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix} \stackrel{؟}{=} \begin{bmatrix} ٤ \times صفر + ١ \times ٤ & -١ \times -١ + صفر \times ٤ \\ ٤ \times ١ + ١ \times صفر & -١ \times صفر + ١ \times ١ \end{bmatrix}$$

مثال :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} ؟$$

الحل :-

١) نجد محدد المصفوفة $\underline{ب}$ :-

$$|\underline{ب}| = (٣ \times ١) - (-١ \times ٢)$$
$$= -٣ - (-٢) = ٢ + ٣ = ٥$$

$$\underline{ب}^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$$

ولتأكد من صحة الحل :-

هل $\underline{ب} \times \underline{ب}^{-١}$ = مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{١}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{-١}{٥} \times ١ & \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{٣}{٥} \times ١ \\ \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{-١}{٥} \times -١ & \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{٣}{٥} \times -١ \end{bmatrix}$$

- طريقة كرامر لحل نظام معادلات خطية بمتغيرين :-

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات بالصورة العامة :-

$$أ_{11} س_1 + أ_{12} س_2 = ب_1$$
$$أ_{21} س_1 + أ_{22} س_2 = ب_2 \quad .$$

① سنعرف محدد المعاملات $\Delta$ (دلتا) كالتالي :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{vmatrix} \quad ، \text{ نفرض أن } \Delta \neq صفر .$$

حيث نلاحظ أن العمود الأول هو معاملات $س_1$ والعمود الثاني هو معاملات $س_2$ .

② سنحدد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول (معاملات $س_1$) في $\Delta$ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} ب_1 \\ ب_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة وسنرمز له بالرمز $\Delta س_1$ :

$$\Delta س_1 = \begin{vmatrix} ب_1 & أ_{12} \\ ب_2 & أ_{22} \end{vmatrix}$$

وكذلك سنستبدل عناصر العمود الثاني (معاملات $س_2$) في $\Delta$ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} ب_1 \\ ب_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta س_2$ :

$$\Delta_{س_2} = \begin{vmatrix} أ_1 & ج_1 \\ أ_2 & ج_2 \end{vmatrix}$$

③ لإيجاد قيمة $س_1$ نقسم $\Delta_{س_1}$ على $\Delta$ ، وقيمة $س_2$ نحصل عليها من خلال قسمة $\Delta_{س_2}$ على $\Delta$ بحيث :-

$$س_1 = \frac{\Delta_{س_1}}{\Delta} \quad ، \quad س_2 = \frac{\Delta_{س_2}}{\Delta}$$

مثال :- باستخدام طريقة كرامر ، أوجد حل النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$٣س_1 + ٤س_2 = ٢$$
$$٥س_1 + ٢س_2 = ٣$$

(الصورة القياسية : المتغيرات في طرف والثوابت في الطرف الآخر)

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ \times ٢ - ٥ \times ٤ = ٦ - ٢٠ = -١٤$$

$$\Delta_{س_1} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ - ٣ \times ٤ = ٤ - ١٢ = -٨$$

$$\Delta_{س_2} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ \times ٣ - ٥ \times ٢ = ٩ - ١٠ = -١$$

$$س_1 = \frac{\Delta_{س_1}}{\Delta} = \frac{-٨}{-١٤} = \frac{٤}{٧} \quad ، \quad س_2 = \frac{\Delta_{س_2}}{\Delta} = \frac{-١}{-١٤} = \frac{١}{١٤}$$

مثال :- حل النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر

$$٤س_١ - ٣س_٢ = ١٠$$
$$٣س_١ - ٥س_٢ = ١١$$

الحل : لابد من إعادة كتابة هذا النظام على الصورة المناسبة :

$$٤س_١ - ٣س_٢ = ١٠$$
$$٣س_١ - ٥س_٢ = ١١$$

١) نجد محدد المعاملات :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ -٥ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - (-٥ \times -٣) = ١٢ - ١٥ = -٣ \neq ٠$$

٢) نجد $\Delta_{س_١}$ :

$$\Delta_{س_١} = \begin{vmatrix} ١٠ & -٣ \\ ١١ & -٥ \end{vmatrix} = (١٠ \times -٥) - (١١ \times -٣) = -٥٠ + ٣٣ = -١٧$$

٣) نجد $\Delta_{س_٢}$ :-

$$\Delta_{س_٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٣ & ١١ \end{vmatrix} = (٤ \times ١١) - (٣ \times ١٠) = ٤٤ - ٣٠ = ١٤$$

٤) $س_١ = \frac{-١٧}{-٣} = ٥\frac{٢}{٣}$ ، $س_٢ = \frac{١٤}{-٣} = -٤\frac{٢}{٣}$

ولتأكد من صحة الحل :-

$$\begin{cases} ٤ص_١ - ٥ص_٢ = ١٠ \\ ٣ص_١ - ٢ص_٢ = ١١ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} ص_١ = ٥ \\ ص_٢ = -١ \end{pmatrix}$$

المعادلة الأولى :-

$$(٤ \times ٥) - (٥ \times -١) = ٢٠ + ٥ = ٢٥$$

المعادلة الثانية :

$$(٣ \times ٥) - (٢ \times -١) = ١٥ + ٢ = ١٧$$

---

فقط للتنبيه أنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق بالصورة :-

$$٤ص_١ - ٥ص_٢ = ١٠$$
$$٣ص_١ - ٢ص_٢ = ١١$$

نهاية الفصل السابع من المحددات

بداية محاضرة يوم الاربعاء من الاسبوع الحادي عشر

# الباب الثامن :- المتواليات

تعريف : المتوالية هي عبارة عن متتابعة لمجموعة من الاعداد وبنية حسب قاعدة معينة أو صيغة معينة، كل عنصر من عناصرها يسمى حداً. فمثلاً $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$،

وايضا مجموعة الاعداد $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$،

وكذلك مجموعة الاعداد $\{1, 2, 5, 7, \dots\}$.

تقسم المتواليات الى قسمين :-

1) متواليات حسابية (عددية).
2) متواليات هندسية.

## أولاً :- المتوالية الحسابية :

تعريف : المتوالية الحسابية هي عبارة عن متتابعة من الاعداد كل حد من حدودها يزيد أو ينقص بمقدار ثابت عن الحد الذي يسبقه (باستثناء الحد الأول).

فإذا كان $a, b, c$ حدود فإن المتتابعة :-

$a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$ تسمى متوالية حسابية كل حد فيها (عدا الحد الأول) يكون عبارة عن اضافة العدد

$d$ هي العدد الذي يسبقه. بمعنى العدد $a$ بالحد الأول والعدد $d$ أساس المتوالية.

من خلال الصورة العامة للمتوالية الحسابية نلاحظ أن:-

$ح_1$ = الحد الأول = $a$.

$ح_2$ = الحد الثاني = $a + d$.

$ح_3$ = الحد الثالث = $a + 2d$.

⋮

وبالاستمرار بهذه الطريقة نستنتج أن الحد النوني $ح_ن$ للمتوالية الحسابية التي حدها الأول = $a$ وأساسها = $d$ هو:-

$$ح_ن = a + (ن - 1)d$$

، حيث $ن \geq 1$.

وكذلك يمكن إيجاد مجموع $ن$ من الحدود لمتوالية حسابية حسب القانون التالي:-

$$مـ_ن = \frac{ن}{2}\left[2a + (ن - 1)d\right]$$

حيث $a$: الحد الأول.

$d$: أساس المتوالية

$ن$: عدد الحدود المطلوب إيجاد مجموعها.

وأيضا اذا كانت لدينا متوالية حسابية حدها الأول أ
وحدها الأخير ل ، فإن مجموع ن من الحدود يعطى
بالصيغة التالية :

$$\text{مجـ}_{ن} = \frac{ن}{2} [\text{أ} + \text{ل}]$$

مثال : اوجد الحد السادس عشر من المتوالية ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ... ثم اوجد مجموع أول ستة حدود منها ؟

الحل : لدينا متوالية حسابية حدها الأول = ٤ ، أساسها = ٣

$$\text{د} = ٧ - ٤ = ٣ \quad \text{أو} \quad \text{د} = ١٠ - ٧ = ٣$$

نجد فيما بعد مجـ$_{ن}$ من خلال طرح أحد هذين المثالين .

$$\text{مجـ}_{ن} = \frac{ن}{2} [٢\text{أ} + (ن - ١) \text{د}]$$

$$\text{مجـ}_{١٦} = \frac{١٦}{2} [٢ \times ٤ + (١٦ - ١) \times ٣]$$

$$= ٤ + (٣ \times ١٥) = ٤ + ٤٥ = ٤٩$$

قيمة الحد السادس عشر

$$\text{ن} = \frac{\text{ن}}{2}\left[2\text{أ} + (\text{ن}-1)\text{د}\right]$$

$$\text{ن}_6 = \frac{6}{2}\left[2\times 4 + (6-1)\times 3\right]$$

$$= 3\left[8 + 15\right]$$

$$= 3\left[23\right] = 69$$

(والتي هي: ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩)

أول ستة حدود

$$69 = 19+16+13+10+7+4$$

مثال: أوجد مجموع أول ١٢ حداً من المتوالية الحسابية

٣، ٨، ١٣، ... ؟

الحل: $\text{أ} = 3$ ، $\text{د} = 8-3 = 5$ .

$$\text{ن} = \frac{\text{ن}}{2}\left[2\text{أ} + (\text{ن}-1)\text{د}\right]$$

$$\text{ن}_{12} = \frac{12}{2}\left[2\times 3 + (12-1)\times 5\right]$$

$$= 6\left[6 + 11\times 5\right]$$

$$= 6\left[6 + 55\right]$$

$$= 6\left[61\right] = 366$$

حدود المتوالية الحسابية:
٣، ٨، ١٣، ١٨، ٢٣، ٢٨، ٣٣، ٣٨، ٤٣، ٤٨، ٥٣، ٥٨

مثال ٣ : أوجد مجموع أول عشرة حدود المتوالية

حسابية فيها الحد الأول = ٥ والحد الأخير = ١٠٠ ؟

الحل : $ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$ .

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٥ + ١٠٠]$

$= ٥ [١٠٥] = ٥٢٥$ .

ثانياً : المتواليات الهندسية

تعريف : المتوالية الهندسية هي متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يمكن إيجاده بضرب الحد الذي قبله بعدد ثابت (باستثناء الحد الأول)، فإذا كان $أ$ ، $د \neq ٠$ فإن المتتابعة $أ$ ، $أ د$ ، $أ د^٢$ ، ..... تسمى متوالية هندسية حدها الأول $أ$ وأساسها $د$ ويمكن إيجاد قيمة $د$ بأن نأخذ قسمة حد ما على الحد الذي يسبقه مباشرة (باستناد الحد الأول)، وبعبارة أن :

$ح_١$ = الحد الأول = $أ$ .

$ح_٢$ = الحد الثاني = $أ د$ .

$ح_٣$ = الحد الثالث = $أ د^٢$

باستمرار بهذه الطريقة، نجد أنّ الحد النوني $ح_ن$ للمتوالية هندسية ذات الحد الأول $أ$ وأساسها $د$ يعطى بالصيغة التالية:-

$$ح_ن = أ د^{ن-1} \quad ، \quad ن \in ط .$$

وكذلك يمكن إيجاد مجموع $ن$ من حدود متوالية هندسية حدها الأول $أ$ وأساسها $د$ بالصيغة التالية:-

$$مجـ_ن = \frac{أ(د^ن - 1)}{د - 1} \quad ، \quad حيث \ د \neq 1$$

وكذلك يمكن إيجاد حدود لانهائية من حدود متوالية هندسية وتسمى المتوالية الهندسية اللانهائية من خلال الصيغة التالية:-

$$مجـ_\infty = \frac{أ}{1 - د} \quad حيث \ |د| < 1 .$$

نهاية محاضرة يوم الثلاثاء
من الأسبوع الحادي عشر

# المحاضرة المباشرة الرابعة

## مراجعة عامـــــة

# المحاضرة المباشرة الرابعة
## راجعة عامة

الباب الأول: مجموعات الأعداد.

سؤال (١): لتكن

ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

أ = {س : س عدد صحيح زوجي}.

ب = {ص : ص عدد صحيح أكبر من أو يساوي ٥}.

أجب عن الأسئلة التالية:

١) أ ∪ ب =

٢) أ ∩ ب =

٣) أ / (صفة أ)

٤) ب / (صفة ب)

٥) أ - ب =

٦) أ ∪ أ =

٧) ك =

الحل: نعيد كتابة المجموعتين أ، ب بطريقة ذكر العناصر:

أ = {١، ٢، ٥، ٧، ٩}.

ب = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}.

١) أ ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}.

٢) أ ∩ ب = {٣، ٥، ٧}.

٣) $\overline{أ} = \{٢، ٤، ٦، ٨\}$ .

٤) $\overline{ب} = \{١، ٢، ٩، ١٠\}$ .

٥) $أ - ب = \{١، ٩\}$ .

٦) $أ \cup \overline{أ} = ك$ .

٧) $\overline{ك} = \phi$ .

## الباب الثاني : المفاهيم الاساسية في الجبر

السؤال (٢): (أ) أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :-

١) $(-٢ + ٥) \times -٢ =$

٢) $٩ \times -\frac{١}{٣} =$

٣) $٩ \div -\frac{١}{٣} =$

٤) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} =$

٥) $\frac{١}{٢} \div (-٦ - ٤) =$

الحل :-

١) $(-٢ + ٥) \times -٢ = ٣ \times -٢ = -٦$

٢) $٩ \times -\frac{١}{٣} = \frac{-٩}{٣} = -٣$

٣) $٩ \div -\frac{١}{٣} = ٩ \times -٣ = -٢٧$ .

٤) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}$ (توحيد المقامات) $\Leftarrow \frac{١ \times ٥}{٢ \times ٥} + \frac{١ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٥}{١٠} + \frac{٢}{١٠} = \frac{٧}{١٠}$

٥) $\frac{1}{2} \div (-6 - 4) = \frac{1}{2} \div (-10) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{10} = \frac{-1}{20}$

(ب) : اوجد ناتج المقادير التالية بابسط صوره :

١) $\frac{1}{3^{-2}} =$

٢) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$

٣) $(س^{5})^{2} =$

٤) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} =$

٥) لو ١٠٠ =

٦) لو ٥ =

٧) لو ١ =

الحل: ١) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^{2} = 9$ (تغير اشارة الأس في المقام الى اشارة موجبة).

٢) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \frac{5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3} = \frac{25}{27}$.

٣) $(س^{5})^{2} = س^{5 \times 2} = س^{10}$.

٤) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

٥) لو ١٠٠ = لو $10^{2}$ = ٢ لو ١٠ = ٢ × ١ = ٢

٦) لو ٥ = لو $5^{1}$ = ١ لو ٥ = ١ × ١ = ١

جـ) أوجد ناتج العمليات التالية:

١) $(٥س - ص + ٣ع) + (ص - ٣ع - ٤س)$

٢) $(-٤ر - ص) - (-٢ص - س)$

٣) $٥س(س^٢ - ٢س + ٥)$

٤) $(٥ع^٢ل - ٥ل^٢ع) \div ٥ع ل$

الحل:-

١) نعيد ترتيب حدود المقدار الثاني

$(٥ر - ص + ٣ع) + (-٤س + ص - ٣ع)$

٢) $(-٤ر - ص) - (-٢ص - ر) = (ر - ٢ص) + (ص - ٤ر)$

$= (٣ص + س) + (ص - ٤ر)$

$= -س + ٤ص$ .

٣) $٥س(س^٢ - ٢س + ٥) = ٥س^٣ - ١٠س^٢ + ٢٥س$ .

٤) $\frac{(٥ع^٢ل - ٥ل^٢ع)}{٥ع ل} = ٥ع - ٤ل$ .

الباب الثالث :- تحليل المقادير الجبرية .

سؤال (٣) : حلل المقادير التالية

١) $(٩ س^{٢} ص - ٢٧ س ص^{٢}) =$

٢) $(س^{٢} - \frac{١}{٤}) =$

٣) $(٢٧ + ص^{٣}) =$

٤) $س^{٢} - ٥ س + ٦ =$

الحل : ١) اخراج العامل المشترك

$(٩ س^{٢} ص - ٢٧ س ص^{٢}) = ٩ س ص (س - ٣ ص)$ .

٢) الفرق بين مربعين

$(س^{٢} - \frac{١}{٤}) = (س - \frac{١}{٢})(س + \frac{١}{٢})$ .

٣) مجموع مكعبات

$(٢٧ + ص^{٣}) = (٣ + ص)(٩ - ٣ ص + ص^{٢})$ .

٤) مقدار ثلاثي :-

$س^{٢} - ٥ س + ٦ = (س - ٢)(س - ٣)$ .

الباب الرابع : المقادير الكسرية .

سؤال (٤) : أوجد ناتج مايلي :-

(١) $\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{ص}{س^{٢}} =$

(ب) $\frac{٤}{س^{٢}} - \frac{٣}{ع^{٢}س^{٢}} =$

(٣) $\frac{س}{ص^{٢}} \times \frac{ع^{٢}س}{ص^{٣}} =$

(٤) $\frac{س}{ص^{٤}} \div \frac{ص^{٢}ع}{س} =$

الحل :-

(١) المقامات متساوية (نجمع البسط مع البسط والمقام نفسه)

$$\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{ص}{س^{٢}} = \frac{ص + ٥}{س^{٢}}$$

ب) مقامات مختلفة، لابد من توحيد المقامات

$$\frac{٤}{س^{٢} \times ١} - \frac{٣}{ع^{٢} \times ١} = \frac{٤ \times ع^{٢}}{س^{٢} \times ع^{٢}} - \frac{٣ \times س^{٢}}{ع^{٢} \times س^{٢}} = \frac{٤ع^{٢} - ٣س^{٢}}{س^{٢}ع^{٢}}$$

(٣) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

$$\frac{س}{ص^{٢}} \times \frac{ع^{٢}س}{ص^{٣}} = \frac{س^{٢}ع^{٢}}{ص^{٥}} .$$

(٤) $\frac{س}{ص^{٤}} \div \frac{ص^{٢}ع}{س} = \frac{س}{ص^{٤}} \times \frac{س}{ص^{٢}ع} = \frac{س^{٢}}{ص^{٦}ع}$ .

الباب الخامس: المعادلات

سؤال (٥): أوجد حل المعادلات التالية:

(١) $ص = س^{٢} - ٥س + ٥$

(٢) $ص = س^{٢} - ٣ص - ٦س$ (معادلة بمتغيرين)

(٣) $س - ص = ١$
$٢س + ص = ٥$ (نظام 2 × 2 معادلتين).

(٤) $ص = ١٢٥ - ٥س^{٢}$.

(٥) $ص = س^{٢} - ٤س$.

(٦) $ص = ١٦ - ٦س - س^{٢}$.

الحل:

(١) $ص = س^{٢} - ٥س + ٥ \Leftarrow ص = ٥ \Leftarrow ٥س = ٥س$ $\boxed{س = ٥}$

(٢) $ص = س^{٢} - ٣ص - ٦س \Leftarrow -٣ص = -٦س$

$ص = \frac{-٦س}{-٣} \Leftarrow$ $\boxed{ص = ٢س}$

(٣) $س - ص = ١$
$٢س + ص = ٥$ (باستخدام طريقة الحذف)

$٣س = ٦ \Leftarrow س = \frac{٦}{٣}$ $\boxed{س = ٢}$

لتعويض قيمة $س = ٢$ في معادلة (١):

$٢ - ص = ١ \Leftarrow ص = ١ - ٢ \Leftarrow -ص = -١$ $\boxed{ص = ١}$

(٤) $ص = س^٥ - ١٢٥$ ⇐ $ص = ٠$ ⇐ $س^٥ = ١٢٥$

$س = \sqrt[٥]{١٢٥}$ ⇐ $س = ١٢٥^{\frac{١}{٥}}$

⇐ $س^٣ = ٢٥$ ⇐ $س = \pm ٥$ .

(٥) $ص = س^٣ - ٤س$ (عامل مشترك أخرج)

$ص = س(س^٢ - ٤)$ ⇐ $ص = ٠$ ⇐ $س = ٠$ أو $س^٢ - ٤ = ٠$

$س^٢ = ٤$

(٦) $ص = س^٤ - ٢س^٣ - ١٦$ .

$ص = (س^٢ - ٤)(س^٢ + ٨)$

$ص = (س - ٢)(س + ٢)(س^٢ + ٨)$

$ص = ٠$ ⇐ $س = ٢$ أو $س = -٢$ أو $س^٢ = -٨$

أو باستخدام القانون العام .

فرع (ب) : أوجد حل المتباينة :

$س^٢ - ٢س - ١٥ < ٠$

الحل : $(س + ٣)(س - ٥) < ٠$

$س = -٣$ ، $س = ٥$

$-٣ < س < ٥$ .

منطقة الحل : $(-٣ ، ٥)$

الباب الثاني: المصفوفات

سؤال (٦) :- إذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}، \quad ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$$

أجب عن الأسئلة التالية :

أ) $أ + ب$ =

ب) $أ - ب$ =

ج) $٥ أ$ =

د) $أ \times ب$ =

الحل :

أ) $$أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

ب) $$أ - ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

ج) $$٥ أ = ٥ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٠ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$$

د) $$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-٢ \times ٢) + (٢ \times ٣-) & (٥ \times ٢) + (١ \times ٢) \\ (-٢ \times ١-) + (١ \times ٣-) & (٥ \times ١-) + (١ \times ١) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١٠ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$$

الباب الرابع : المحددات

سؤال (٧) : فرع (أ) :

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ أوجد :-

① $|A| =$

② إذا ضرب الصف الثاني بالعدد $-١$ ، أوجد محدد المصفوفة الجديدة ؟

الحل :- ① محدد $A = -٢ \times ٢ - (-١ \times ٥)$

$= -٤ + ٥ = ١$

② بعد ضرب الصف الثاني في $A$ بالعدد $-١$ ، نحصل على :-

$$B = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$|B| = ٥ \times ١ - ١ \times ٢ = ٥ - ٣ = ٢$ .

أو نضرب متغيرة محدد المصفوفة $A$ بالعدد $-١$

فيكون الناتج $-١ \times ١ = -١$ .

فرع (ب) :- أوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ \text{صفر} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$ .

الحل :- نجد محدد $A$ :

$|A| = ٦ \times \frac{١}{٣} - ٣ \times \text{صفر} = ٢ - \text{صفر} = ٢$ .

لتقدم الصفة :-

$$م^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 & -4 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ف ع (ج) : اوجد محدد المصفوفة

$$م = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$|م| = 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 (3) - 4 (2 - 1) + 0$$

$$= 3 - 8 = -5$$

الباب الثامن : المتوالية

سؤال (٨) : ص (٢)

إذا كانت لدينا المتوالية

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ---

أجب عما يلي :-

١) أساس المتوالية .

٢) قيمة الحد العاشر .

٣) مجموع أول خمسة حدود .

الحل :-

١) أساس المتوالية = ٥

٢) ح١٠ = ٥ + ٥ × (٩) = ٥ + ٤٥ = ٥٠ .

لاحظ أن ح ن = ح١ + (ن - ١) ء .

٣) م٥ = ٥/٢ [٥ × ٢ + ٥ × (٥ - ١)]

= ٥/٢ [١٠ + ٢٠] = ٥/٢ [٣٠]

= ١٥٠/٢

= ٧٥

لاحظ أن م ن = ن/٢ [٢ ح١ + (ن - ١) ء] .

س٤ (ب) :-

إذا كان لدينا المتوالية

$-٢، ٤، -٨، ١٦، \ldots$

أوجد :-

١) أساس المتوالية .

٢) الحد السابع .

٣) مجموع أول ستة حدود ؟

الحل :-

١) أساس المتوالية $= -٢$ .

٢) $ح_٧ = ح_١ \times (-٢)^{٦} = ٢ \times ٦٤ = ١٢٨$ .

٣) نوجد أولاً

$ن = ٦$ ، $ر = -٢$

$$مج_٦ = \frac{٢(١ - (-٢)^{٦})}{١ - (-٢)}$$

$$= \frac{٢(١ - ١٢٨)}{(١ + ٢)}$$

$$= \frac{٢(-١٢٧)}{٣} =$$

# مع امنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

د. رائـــــــد