الباب الأول: مجموعات الأعداد

١- مفهوم المجموعة:

- يعتبر مفهوم المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات. والمجموعة هي عبارة عن تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماما. تكتب عناصر أي مجموعة داخل قوسين على الشكل التالي {   }، ويرمز للمجموعة بأحد الحروف العربية س، ص، ع، ...

ومثال على ذلك، يمكن التعبير عن مجموعة الاعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ على النحو الآتي:

س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

- يمكن التعبير عن عناصر المجموعات بأحد الطريقتين التاليتين:

أ- ذكر العناصر: وهي الطريقة التي يتم فيها سرد جميع عناصر المجموعة بين القوسين {   } كما في المثال السابق.

ب- طريقة الوصف (القانون): وتتم من خلال ذكر الخاصية أو الصفة التي تميز عناصر هذه المجموعة، ففي المثال السابق يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٥ على الصورة التالية:

س = { س: س عدد صحيح أكبر من أو يساوي ١ وأقل من أو يساوي ٥ }

٢- مجموعات الأعداد:

سنتعرف في هذا البند على بعض من مجموعات الأعداد الشهيرة ومنها:

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية (الاعداد الموجبة):

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب على النحو الآتي:

ط = { ١، ٢، ٣، ... }

ب – مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز ص وتكتب على النحو الآتي:

ص = { ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ... }

جـ - مجموعة الأعداد النسبية:

ويرمز لها بالرمز ن وهي جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث ب

لا تساوي صفر، أ، ب عددان حقيقيان، ومن الأمثلة على ذلك $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٥}$.

د - مجموعة الأعداد غير النسبية:

ورمزها نَ وهي جميع الاعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل عدد نسبي،
زمن الأمثلة عليها $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$.

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية:

ورمزها ح وهي المجموعة التي تحتوي جميع الأعداد في المجموعات سابقة الذكر.

محاضرة يوم الثلاثاء من الأسبوع الأول

- بعض التعريفات حول المجموعات :-

١) المجموعة الجزئية :-

نقول بأن المجموعة ~~ـ~~ أ هي مجموعة جزئية من ب اذا كان كل عنصر موجود في أ موجود أيضاً في ب .

مثلاً إذا كانت

أ = { ١ ، ٣ ، ٥ } .

ب = { س : س عدد صحيح } .

نقول بأن أ ⊂ ب .

ونلاحظ أيضاً إذا كان لدينا المجموعة

جـ = { ½ ، ١ ، ٥ } .

نقول بأن جـ ⊄ ب (جـ ليست مجموعة جزئية من ب) .

٢) المجموعة الكلية :-

ورمزها ش ، وهي عبارة عن المجموعة التي تضم جميع المجموعات الجزئية قيد الدراسة .

ملاحظة : اذا لم المجموعة الكلية في مسألة ما ، فنعتبر ~~المجموعة~~ مجموعة الاعداد الحقيقية هي المجموعة الكلية .

٣) المجموعة الخالية: ويرمز لها بالرمز Φ أو { }.
وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر.

- ملاحظة: إذا كانت لدينا المجموعة

أ = {٥، ٧، ٩} ، ب = {٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

فنقول بأن العنصر ٥ ∈ أ ، أما العنصر ١١ ∉ أ.

(عملية الانتماء تكون بين عنصر ومجموعة).

أما عملية الاحتواء فتكون بين مجموعة وأخرى.

فنقول بأن المجموعة أ ⊂ المجموعة ب.

ب ⊄ أ.

- ملاحظة: تتساوى مجموعتين مثل أ، ب إذا تساوت جميع العناصر في المجموعتين.

مثال: إذا كانت

أ = {١، ٢، ٣، ٤} ، ب = {١، ٤، ٣، ٢}

فنقول بأن أ = ب.

٥ العمليات الجبرية على المجموعات :

١) عملية الاتحاد :

تعريف: إذا كان أ ، ب أي مجموعتين في ك فإن
اتحاد أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ
أو الموجودة في ب .

بالرموز : أ ∪ ب = {س : س ∈ أ أو س ∈ ب}

مثال : إذا كانت

أ = {٣ ، ٤ ، ٥} .

ب = {٣ ، ٧ ، ٩} .

فإن ناتج عملية اتحاد أ مع ب هي :

أ ∪ ب = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩} .

٢ عملية التقاطع :

تعريف : إذا كان أ ، ب مجموعتين في ك ، فإن تقاطع
أ مع ب هو جميع العناصر الموجودة في أ والموجودة
في ب (العناصر المشتركة لكلا المجموعتين) .

بالرموز : أ ∩ ب = {س : س ∈ أ و س ∈ ب} .

وبالرجوع إلى المثال السابق نلاحظ أن أ ∩ ب = {٣} .

③ المكملة (المتممة) للمجموعة.

تعريف: إذا كان لدينا المجموعة الجزئية أ في ك، فإن متممة المجموعة أ ويرمز لها بالرمز $\overline{أ}$ هي جميع العناصر التي تنتمي إلى ك ولا تنتمي إلى أ.

بالرموز: $\overline{أ}$ = {س : س $\in$ ك و س $\notin$ أ}.

مثال: إذا كانت ك = {١، ٢، ٣، --- ، ١٠}
وكانت أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩} $\Leftarrow$ الأعداد الفردية من ك.
مجموعة جزئية من ك فإن
$\overline{أ}$ = {٢، ٤، ٦، ٨، ١٠} $\Leftarrow$ الأعداد الزوجية من ك

ويمكن التحقق من أن أ $\cup$ $\overline{أ}$ = ك.
أ $\cap$ $\overline{أ}$ = ϕ.

(عملية اتحاد أي مجموعة مع متممتها تعطينا المجموعة الكلية ك)
(عملية تقاطع أي مجموعة مع متممتها تعطينا المجموعة الخالية ϕ)

④ الفرق بين مجموعتين:

تعريف: إذا كان لدينا المجموعتين أ، ب فإن الفرق بينهما هو جميع العناصر التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب.

بالرموز: أ − ب = {س : س $\in$ أ و س $\notin$ ب}.

مثال: إذا كانت

ك = {س : س عدد صحيح موجب أقل من العدد ١٠} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨}

حيث كانت أ، ب مجموعات جزئية من ك ، أوجد

١) ك − أ =

٢) ك − ب =

٣) أ − ب =

٤) ب − أ =

٥) أ − ك =

الحل: ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} .

أ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} .

ب = {٥، ٦، ٧، ٨} .

١) ك − أ = {٦، ٧، ٨، ٩} .

٢) ك − ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٩}

٣) أ − ب = {١، ٢، ٣، ٤} .

٤) ب − أ = {٦، ٧، ٨} .

٥) أ − ك = ϕ .

مثال :- إذا كانت

$\text{ك} = \{١، ٢، ٣، ٤، ......، ١٠\}$.

$\text{أ} = \{\text{س} : \text{س عدد فردي}\} = \{١، ٣، ٥، ٧، ٩\}$

$\text{ب} = \{\text{ص} : \text{ص عدد زوجي}\} = \{٢، ٤، ٦، ٨، ١٠\}$

حيث أ، ب $\subset$ ك ، اجب عن الأسئلة التالية :

١) $\text{أ} \cup \text{ب} = \text{ك}$.

٢) $\text{أ} \cap \text{ب} = \phi$.

٣) $\overline{\text{أ}} \cup \text{ب} = \text{ب} \cup \text{ب} = \text{ب}$.

٤) $\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}} = \text{ب} \cap \text{أ} = \phi$.

٥) $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ}$.

٦) $\text{ب} - \text{أ} = \text{ب}$.

٧) $\text{ك} \cap \text{أ} = \text{أ}$.

٨) $\text{ك} \cup \text{ب} = \text{ك}$.

٩) $\overline{\text{ك}} = \phi$.

١٠) $\overline{\phi} = \text{ك}$.

$\overline{\text{ك}} = \phi$

$\overline{\phi} = \text{ك}$.

$\text{أ} \cap \text{ك} = \text{أ}$

$\text{أ} \cup \text{ك} = \text{ك}$.

$\text{ك} - \text{أ} = \overline{\text{أ}}$

$\text{أ} - \text{ك} = \phi$

أنهينا الباب الأول لمقرر مبادئ الرياضيات

نهاية المحاضرة الثانية من الأسبوع الأول .

الباب الثاني :- المفاهيم الأساسية في الجبر .

في العادة، توجد لدينا اربع عمليات اساسية في الجبر وهي :-

① الجمع ، ② الطرح ، ③ الضرب ، ④ القسمة .

أولاً :- سنتعرف على كيفية اجراء العمليات الجبرية الأربع في الاعداد الحقيقية :-

① مثال : اذا كان لدينا العددين ٣ ، -٥

فإننا نجري عملية الجمع في النحو الآتي :-

٣ + (-٥) = -٢ (اذا كانت الإشارات مختلفة في عملية الجمع فإننا نأخذ الفرق بينهما مع وضع اشارة العدد الأكبر).

وكذلك نقول بأن :-

-٣ + ٥ = ٢ .

أما اذا كان لدينا العددين -٣ ، -٥

فإننا نجري عملية الجمع على النحو الآتي :-

-٣ + -٥ = -٨ (اذا كانت الاشارات متشابهة لكلا العددين، فإننا نجمع العددين مع وضع الاشارة نفسها) .

وكذلك نقول بأن :-

٣ + ٥ = ٨ .

٢) عملية الطرح :-

يمكن النظر الى عملية الطرح بأنها شبيهة بعملية الجمع وبذلك يمكن تطبيق القواعد السابقة في عملية الطرح .

مثال :- إذا اردنا أن نجد الفرق بين العددين ٢ ، ٥ فنقول بأن :-

$$٢ - ٥ = ٢ + (-٥) = -٣$$

وكذلك

$$-٣ - ٥ = -٣ + (-٥) = -٨ .$$

وكذلك

$$-٤ - ٩ = -٤ + (-٩) = -١٣ .$$

وكذلك

$$-٣ - (-٢) = -٣ + (+٢) = -١$$

* يمكن استنتاج أن عملية الجمع والطرح هي عملية واحدة تسمى عمليات الجمع الجبري .

٣) عملية الضرب :-

مثال :- إذا كان لدينا العددين -٣ ، ٥

فإن حاصل ضربهما هو -٣ × ٥ = -١٥

(نلاحظ أنه عند ضرب عددين مختلفين في الإشارة، فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع إشارة العدد السالب)

وكذلك ٣ × -٥ = -١٥ .

أما إذا كان لدينا العددين ٢ ، ٥ أو -٢ ، -٥

فإن حاصل الضرب هو :-

٢ × ٥ = ١٠

-٢ × -٥ = ١٠

(بمعنى أنه عند ضرب عددين متشابهين في الإشارة فإن الناتج هو حاصل ضربهما مع وضع الإشارة الموجب)

٤) عملية القسمة :-

إذا أردنا تقسيم العددين ١٥ ، ٣ فإنه يمكن كتابة الناتج في الصورة التالية :-

تحويل القسمة إلى ضرب

١٥ ÷ ٣ = ١٥/١ × ١/٣ = ١٥/٣ = ٥

مقلوب

(بمعنى أنه علينا تحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب العدد الأول في مقلوب العدد الثاني)

مثال :- أوجد ناتج المقادير التالية :-

أ) $-٢٠ \div ٤ = -٢٠ \times \frac{١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$

ب) $٢٠ \div -٤ = ٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٢٠}{٤} = -٥$.

ج) $-٢٠ \div -٤ = -٢٠ \times \frac{-١}{٤} = \frac{٢٠}{٤} = ٥$.

النتيجة :- نلاحظ أن عملية الضرب والقسمة هي عملية واحدة (بحيث نحول عملية القسمة الى ضرب مع تطبيق قواعد الضرب عليها) .

- بعض الملاحظات على الأولويات عند ايجاد ناتج مقدار عددي :

اذا اردنا ان نجد ناتج المقادير التالية :-

أ) $-٢ + ٥ \times -٣ = -٢ + (-١٥) = -١٧$

ب) $(-٢ + ٥) \times -٣ = (٣) \times -٣ = -٩$

ج) $\underline{١٠ \div ٢} - ٥ = ٥ - ٥ =$ صفر .

٤) $٣ \times -٣ + ٢ \div (١ - ٥) = ٣ \times -٣ + ٢ \div (-٤)$

$= -٩ + \frac{-٢}{٤}$

$= \frac{-٩ \times ٢}{١ \times ٢} + \frac{-١ \times ١}{٢ \times ١} = \frac{-١٨}{٢} + \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-١٩}{٢}$.

الاستنتاج :

دائماً الأولوية للعمليات الجبرية في الأعداد الحقيقية على النحو الآتي :

١) في حال وجود الأقواس، فإننا نجري العملية داخل هذه الأقواس.

٢) تكون الأولوية لعمليتي الضرب والقسمة.

٣) آخر الأولويات لعمليتي الجمع والطرح.

مثال: أوجد ناتج المقادير التالية بأبسط صورة :

١) $-٩ \div ٣ \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

٢) $(-٩ \div ٣) \times ٢ = -٣ \times ٢ = -٦$

٣) $(-٩ - ٣) + ٢ \times ٣ = -١٢ + ٦ = -٦$

ملاحظة :-

١) عند ضرب عدد كسرين فإننا نضرب البسط في البسط مضروباً في المقام في المقام.

مثال : $\frac{١}{٥} \times \frac{-٣}{٤} = \frac{-٣}{٢٠}$.

٤) في حالة الجمع، فإنه لابد من توحيد المقامات ثم إجراء عملية الجمع.

مثال: $\frac{١ \times ٤}{٥ \times ٤} + \frac{-٣ \times ٥}{٤ \times ٥} = \frac{٤}{٢٠} + \frac{-١٥}{٢٠} = \frac{-١١}{٢٠}$.

(١١) نهاية محاضرة يوم الأحد من الأسبوع الثاني