المحاضرة الثانية – الأسبوع الأول

طرق العد

مقدمة:

قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسبي ولاعتماده بشكل اساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية, فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك. وهنالك اربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الآتي:

أولا: قاعدة الضرب

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n_1 الطرق وكانت التجربة E_2 تحدث في n_2 من الطرق, فإن التجربتين معا تحدثان في n_1n_2 من الطرق.

مثال: إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الاحصاء والآخر من قسم المحاسبة, فإذا كان عدد المقررات لقسم الاحصاء هو 3 وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو 4, فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟

الحل: عدد الطرق = $3\times 4 = 12$ طريقة.

ملاحظة: يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال: كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار أوله العددين 8 أو 9؟

الحل: عدد الهواتف = $10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2000$ طريقة.

(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله 10 طرق لاختيارهم هي عباره عن الاعداد من 0 إلى 9).

ثانيا: قاعدة الجمع

إذا كانت تجربة ما تحدث في n_1 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث في n_2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا (مانعتان لبعضهما البعض) فإن واحدة منهم أو الاخرى تحدث في n_1+n_2 من الطرق.

مثال: أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الاحصاء أو قسم المحاسبة, بحيث كان عدد المقررات في قسم الاحصاء 3 وفي قسم المحاسبة 4, فما عدد الاختيارات لديه؟

الحل: عدد الطرق = $3 + 4 = 7$ طرق.

ملاحظة: يمكن تعميم قاعد الجمع لتشمل k من التجارب.

ثالثا: التباديل Permutations

التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.

مثال: ما عدد طرق ترتيب جميع الاحرف a, b, c؟

الحل: لاحظ أنه لدينا ثلاثة اماكن لنملأها من الاحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة احرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملء المكان واخيرا يبقى حرف واحد لملء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:

عدد الطرق = 3 × 2 × 1 = 6 طرق

وبشكل عام, لدينا الحالات الثلاث التالية:

1- يمكن ترتيب n من العناصر المختلفة بطرق عددها

$$nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$$

وهذا هو عدد تباديل n من العناصر المميزة.

(ملاحظة: تسمى العملية **"n!"** بمضروب العدد **n** وهو عبارة عن **n×(n-1)×(n-2)×....×3×2×1**. ومثال عليها **(4! = 4×3×2×1 = 24)**.

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب احرف كلمة "تقوى" ؟

الحل: عدد الطرق يساوي

$$4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$$

2- في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n_1 من العناصر المتماثلة و n_2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الاولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة, فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي:

$$nPn = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

مثال: ما عدد تباديل احرف كلمة "سلسبيل"؟

الحل: عدد الطرق يساوي

$$6P6 = \frac{6!}{2!\times 2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 180$$

لاحظ أن حرف "س" تكرر مرتين وكذلك حرف "ل" أما بقية الاحرف فتكررت مرة واحدة.

3- في حالة كان لدينا n من العناصر المميزة واردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن r, ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: ما عدد تباديل حرفين من كلمة "تاريخ"؟

الحل: لاحظ أن عدد احرف كلمة "تاريخ" هو 5 وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r= 2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي

$$5P2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 20$$

رابعا: التوافيق Combinations

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر الى الترتيب.

مثال: ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A, B, C دون الاهتمام بالترتيب؟

الحل: الاختيارات هي {A,B}, {A,C},{B,C} وبذلك يكون لدينا 3 طرق.

وبشكل عام, عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطى بالصيغة التالية:

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال: صف فيه 10 طلاب, بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب دون النظر الى الترتيب؟

الحل:

$$10C3 = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1} = 120$$

مثال: صندوق فيه 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء.

أ) بكم طريقة نختار 4 كرات من الصندوق؟

ب) بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟

الحل:

أ) من قاعدة التوافيق, عدد طرق اختيار 4 كرات من الصندوق يساوي

$$12C4 = \frac{12!}{(12-4)! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو

$$5C1 = \frac{5!}{4! \times 1!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

اما عدد طرق اختيار 3 كرات بيضاء فهو

$$7C3 = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

إذن, من قاعدة الضرب, عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو

$$5 \times 35 = 175$$

تمارين:

1- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI"؟

2- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب- بدون ترتيب؟