المحاضرة الثالثة – الأسبوع الثاني

نظرية الاحتمالات

مقدمة: مفهوم الاحتمال

هنالك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها:

1- طريقة الرأي الشخصي:
وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما, كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرا للجهد الذي بذله في دراستها.

2- طريقة التكرار النسبي:
ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي n(A), فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$, وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت, وليكن P فعندئذ تقول أن احتمال الحادث A هو العدد P.

مثال: عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها, نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$.

مثال: إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة, فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل:

التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي

$$\frac{480}{320+480+300+500}=0.3$$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي:

<u>فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث</u>: إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر. ومن هذا نحصل على النتيجة التالية: إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A), فإن احتمال هذا الحادث هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}=\frac{\text{عدد عناصر الحادث } A}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$$

<u>مثال:</u> في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات, أوجد احتمال كل من الحوادث التالية:

1- إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل؟
2- إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة؟

لحل: لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي:

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 =8 (من قاعدة الضرب).

1- $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

لاحظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين.

قوانين الاحتمالات:

في هذا البند سنورد القوانين الأولية في الاحتمال وهي:

نظرية (1):

1- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها $\emptyset$ فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر. بالرموز

$$P(\emptyset) = 0$$

2- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1. بالرموز

$$P(S) = 1$$

3- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد. بالرموز

$$0 \le P(E) \le 1$$

نظرية (2): إذا كان A حادثا في S, وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال: إذا كان احتمال نجاح طالب في مادة المحاسبة ما هو 80%, فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة؟

الحل:

بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A, فإن احتمال عدم نجاحه يساوي

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.80 = 0.20$$

مثال: إذا كان احتمال وصول طالب الى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75, فما احتمال وصول الطالب متأخرا؟

الحل:

نفر أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرا

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.75 = 0.25$$

<u>نظرية (3):</u>

إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>مثال</u>: إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20, اجب عن الاسئلة التالية:

أ) ما احتمال غياب الطالب عن احد المحاضرتين على الأقل؟
ب) ما احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟
ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى؟

الحل:

نفرض أن A تمثل الغياب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية. وبذلك فأن $A \cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين.

أ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين, وهذا يعني متممة الحادث" غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

ج) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال: إذا كان P(A)=0.5 ,P(B)=0.8 ,$P(A \cup B) = 0.9$. أوجد

أ) $P(A \cap B)$

ب) $P(\bar{A})$

ت) $P(\overline{A \cap B})$

الحل:

أ) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.9 = 0.5 + 0.8 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$$

ب) $$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$$

ث) $$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

ملاحظة: في حال كان الحادثين A, B حادثين منفصلين, فإن تقاطعهما = Ø وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: إذا كان P(A) =0.3 , P(B) =0.4 بحيث كان الحادثين A, B حادثين منفصلين, فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

<u>لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B أو حدوث احدهما على الاقل تعني $P(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معا فهذا يعني $P(A \cap B)$</u>

نظرية (4): إذا كان A, B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$

ب) $P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B)$

وهذا يعني أن احتمال حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B في نفس الوقت يساوي احتمال حدوث A ناقصا احتمال حدوث الأثنين معا. ومثل هذا ينطبق على فرع (ب).

مثال: إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعده في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي 0.97, أوجد احتمال:

1- حضور المدير ومساعده؟
2- حضور المدير وحده؟
3- حضور المساعد وحده؟

الحل: نعبر عن حضور المدير بالحادث A, وحضور المساعد بالرمز , وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A\cup B$

1) من نظرية رقم 3 نجد أن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.97 = 0.90 + 0.95 - P(A\cap B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A\cap B)=1.85-0.97=0.88$$

2) حضور المدير وحده تعني أن المدير حضر وغياب مساعد, وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B.

$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$= 0.90 – 0.88 = 0.02

3) حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب, حدوث B وعدم حدوث A.

$P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B)$ = 0.95 – 0.88 = 0.07

تمارين:

في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, أوجد احتمال ما يلي:

1- ظهور عددين متشابهين
2- ظهور عددين مختلفين
3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من 12؟
4- ظهور عددين بحث يكون الأول عدد فردي؟