المحاضرة الخامسة – الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

❑ مقدمة

في كثير من الاحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية, مثل الفضاء العيني لتجربة القاء قطعة نقد مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الاعداد من 1 إلى 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة احصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي اعطاءنا المجال الأوسع لدراسة اوسع وطرح اسئلة اكثر حول نتائج أي تجربة عشوائية.

❑ المتغير العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه, ويرمز له بحرف لاتيني كبير X, Y ... ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير x, y ...

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات؟

الحل:

قيمة X	عناصر الفضاء العيني
3	HHH
2	HHT
2	HTH
1	HTT
0	TTT
1	TTH
1	THT
2	THH

نلاحظ ان كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع اعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
{HHH}	3
{THH ,HTH ,HHT}	2
{THT ,TTH ,HTT}	1
{TTT}	0

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث نعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث {X=0}, {X=1}, {X=2},{X=3} .

مثال: اعتمادا على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين عدد H وعدد T؟
ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصا عدد T؟

الحل:

أ)

الحادث المقابل	قيمة Y
{TTH, THT, THH, HTH, HHT, HTT}	1
{TTT ,HHH}	3

ب)

الحادث المقابل	قيمة Z
{TTT}	-3
{HTT,THT, TTH}	-1
{HHT, HTH, THH}	1
{HHH}	3

❑ أنواع المتغيرات العشوائية

يقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

1- المتغير العشوائي المنفصل (Discrete): وهو المتغير الذي يأخذ قيما إما محدودة أو لانهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمه واحدا لواحد مع مجموعة الاعداد الصحيحة. ومن الامثلة عليه عدد أفراد الأسرة, عدد المواليد ...

2- المتغير العشوائي المتصل:(Continuous): وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الامثلة على ذلك درجة الحرارة, وزن الأنسان ...

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالا لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساويا لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث يمثل X عدد مرات ظهور الصورة H, أوجد

1- P(X=3)
2- P(X=2)؟

الحل:

1- نلاحظ أن X=3 يقابل الحادث HHH وبالتالي

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

2- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH} وبالتالي

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي:

P(X=x)	قيمة X
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{3}{8}$	2
$\frac{3}{8}$	1
$\frac{1}{8}$	0

<u>تمرين: في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, إذا كان المتغير العشوائى X يمثل مجموع العددين الظاهرين, عرف ذلك المتغير واحتمال كل منها؟</u>

الجدول السابق يقودنا الى التعريف التالي.

❑ التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution

تعريف: كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعا احتماليا منفصلا أو اقتران احتمالي, بحيث يحقق الشرطين التاليين:

1- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.

2- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي 1.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ للاحتمال P(X=x) فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

$f(x) \geq 0$, لجميع قيم x

$\sum f(x) = 1$, لجميع قيم x

مثال: هل تمثل المعادلة

$$f(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$$

$f(x) = 0;$ لغير ذلك

توزيعا احتماليا منفصلا؟

الحل:

لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

$$\sum_{1}^{5} f(x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

إذن, $f(x)$ توزيع احتمالي حقق الشرطين الاول والثاني.

يمكن وضع المعادلة السابقة على شكل جدول على الصورة:

x	1	2	3	4	5	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

مثال: أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعا احتماليا واحسب احتمال X اكبر من 4 واحتمال X أقل من أو تساوي 4؟

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	a	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الحل:

بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من 4:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي 4:

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$