المحاضرة السادسة – الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

❑ التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Mathematical Expectation

تعريف: التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي $f(x)$ هو المقدار التالي:

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

مثال: أوجد التوقع الرياضي للمتغير X والذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي:

X	$f(x)$	$xf(x)$
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل: من خلال ضرب القيمة x في $f(x)$ كما هو موضح في العمود الثالث وبعملية الجمع نحصل على

$$\mu = E(X) = 4.7$$

مثال: أوجد توقع X إذا كان

$$f(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$$

$f(x) = 0$ لغير ذلك

الحل:

$$\mu = E(X) = \sum_{x} xf(x) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15}$$
$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

خواص التوقع الرياضي

نظرية (1): لكل متغير عشوائي X, إذا كان a, b عددين ثابتين فإن:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

وهذا يعني أنه إذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a, وأضيف له عددا ثابتا آخر وليكن b فإن التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساويا للتوقع الاصلي مضروبا في a ومضافا إليه العدد b.

مثال: إذا كان E(X)=6, أوجد

1- E(3X+5)
2- E(0.5X – 2)

الحل:

1- E(3X+5)=3× 6+5 = 23
2- E(0.5X – 2)=0.5× 6 – 2 =1

مثال: إذا كان E(X) = 10 وكان E(aX + 5) = 25 , اوجد قيمة a؟
الحل:

E(aX+b)=aE(X)+b = a × E(X) + b = a × 10 + 5 = 25 ⟶ 10 a = 20 ⟶ a = 2

تمرين: اعتمادا على الجدول التالي والذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

x	*f*(*x*)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	a

أوجد:

1- **قيمة المجهول a**
2- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x**
3- **$E(2X + 10)$؟**

<u>تباين المتغير العشوائي X</u>

تعريف: إذا كان μ توقع المتغير العشوائي X فإن تباين X ويعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$

مثال: جد تباين X إذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي:

x	$f(x)$
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

الحل:

نجد أولا توقع X كما يلي:

$$\mu = E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30\ \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

ولحساب التباين, نجد أن:

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$
$$= (10-25)^2 \times \frac{1}{4} + (20-25)^2 \times \frac{1}{4} + (30-25)^2 \times \frac{1}{4} + (40-25)^2 \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125.$$

أما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري ويعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ أن الانحراف المعياري للمثال السابق هو

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{125}$$

خواص التباين:

إذا اكان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_x^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث a, b ثابتان فإن

$$\boldsymbol{\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_x^2}$$

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

$$\boldsymbol{\sigma_Y = |a| \sigma_Y}$$

مثال: إذا كان للمتغير X, $\mu_x = 50$, $\sigma_x^2 = 16$ أوجد معدل Y وتباينه وانحرافه المعياري إذا كان Y=3X – 4؟

الحل:

$$\boldsymbol{\mu_Y = E(3X-4) = 3\mu_X - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146}$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9 \times 16 = 144}$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y = \sqrt{144} = 12}$$

توزيعات احتمالية خاصة

هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حدة, ومن هذه التوزيعات

1- توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

في كثير من التجارب تكون النتيجة أحد الامرين إما نجاح أو فشل, وتتألف هذه التجارب من تكرار وإعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض, فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فإن النتيجة إما ظهور صورة أو كتابة وتكون نتيجة اي محاولة مستقلة عن الأخرى وهكذا. إن هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي.

تعريف: محاولات بيرنوللي Bernoulli Trials:

كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي:

1. نتيجة كل محاولة أحد الأمرين, نسمي "احدها" نجاح والأخرى "بالفشل"
2. نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى.
3. احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فإن احتمال الفشل هو $q=1-p$

ومن الأمثلة على هذه التجارب: فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية, فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته إلى نظارات طبية ...

تعريف: إذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان X يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فإن:

$$P(X=x)=nCx\times p^{x}\times(1-p)^{n-x};\ x=0,1,2,\ldots,n$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p).

مثال: رميت قطعة نقد متزنة أربع مرات, جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات؟

الحل:

إن هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث أن n=4, $p=\frac{1}{2}$, ومنها

$$b(x;4;\tfrac{1}{2})=P(X=x)=4Cx\times(\tfrac{1}{2})^{x}\times(1-\tfrac{1}{2})^{4-x};\ x=0,1,2,\ldots$$

وعند $X=4$, ينتج أن:

$$b(4;4;\tfrac{1}{2})=P(X=4)=4C4\times(\tfrac{1}{2})^{4}\times(1-\tfrac{1}{2})^{4-4}=1\times(\tfrac{1}{2})^{4}\times(\tfrac{1}{2})^{0}=\frac{1}{16}$$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة $P(X=0)$ أو ظهور الصورة مرة واحدة $P(X=1)$ وهكذا.

تمرين 1: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات, ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها, ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات؟

تمرين 2: في تجربة ذات الحدين, إذا كان $n = 15$, $p=0.1$ أوجد $P(X \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات؟

خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين:

نظرية: إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين $b(x; n; p)$ فإن:

1) توقع X هو $\mu = E(X) = np$
2) تباين X هو $\sigma^2 = npq$

مثال: ما هو التوقع الرياضي والتباين لمتغير ذات الحدين إذا كان $n=60$, $p = \frac{2}{3}$

الحل:

$$\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$

$$\sigma^2 = npq = 60 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

2- توزيع بواسون: Poisson Distribution

إن التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة تسمى بواسون. والفترة الزمنية قد تكون دقيقة أو يوما أو أسبوعا أو شهرا أو غير ذلك أما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب أو مترا مربعا أو غير ذلك.

وبشكل عام, تجربة بواسون تحقق الشروط التالية:

1- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة معلوم وليكن λ.
2- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة أو منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة أو مساحة تلك المنطقة.
3- احتمال حدوث نجاحين أو اكثر في فترة زمنية قصيرة أو منطقة صغيرة مهمل.
4- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات أخرى في عدة فترات زمنية منفصلة.

ـــ تعريف: توزيع بواسون

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة هو

$$P(x;\lambda)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!};x=0,1,2,\dots$$

حيث λ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة أو المنطقة المحددة. e = 2.718.

مثال: تصل المكالمات الهاتفية إلى مقسم أحد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين.

ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية:

أ) صفر مكالمة في أربع؟
ب) 4 مكالمات في فترة أربع دقائق؟

الحل:

نفرض أن X = عدد المكالمات في فترة أربع.

إذن $\lambda=\frac{1}{2}\times 4=2$

إن X يتبع توزيع بواسون الذي معدله $\lambda=2$ وينتج أن

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو:

$$P(0;2)=P(X=0)=\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}=\ e^{-2}=0.1353$$

ب) وصول أربع مكالمات في اربع دقائق هو

$$P(4;2)=P(X=4)=\frac{e^{-2}2^{4}}{4!}=\ \frac{16}{24}e^{-2}=0.0902$$

<u>تمرين: معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الأسبوع الواحد. ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين, ما احتمال حدوث حادثين أو اقل في اسبوع معين؟</u>

خواص التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون:

نظرية: إذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي $P(x;\lambda)$ حيث λ معدل عد د الحوادث في فترة زمنية معينة فأن توقع X هو E(X) = λ وتباين X هو $\sigma_x^2 = \lambda$

مثال: ما هو التوقع الرياضي والانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون إذا كان $\lambda = 25$ ؟

الحل:

$$E(X) = 25, \quad \sigma_x = 5$$

لأحظ أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.