المحاضرة الثامنة - الأسبوع الخامس

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تعريف: اذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وكان $f(x)$ لمتغيرنا متصفاً بخصائص الشرطين التاليين:

1- $f(x) \geq 0 \quad , \quad -\infty < X < \infty$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

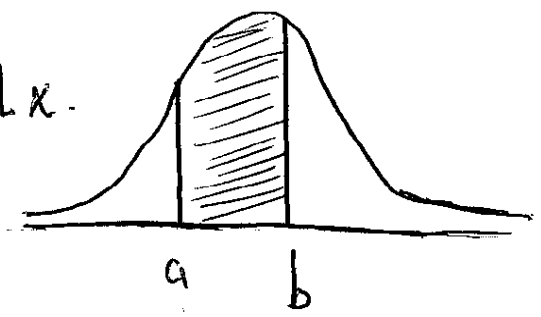
(ان المساحة تحت منحنى $f(x)$ وفوق محور السينات $= 1$)

فإنه $f(x)$ تسمى الكثافة الاحتمالية أي التوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X.

ويكون احتمال وقوع X بين نقطتين $X=a$ ، $X=b$ في المساحة تحت منحنى $f(x)$ وفوق المحور الأفقي والمحصورة بين a و b والشكل التالي يوضح ذلك

أي أن:

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



ومن انواع التوزيعات الإحتمالية المتصلة التي سنتوقف عليها في هذا الفصل :-

1- التوزيع الطبيعي (The Normal Distribution)

ويعتبر من اهم التوزيعات الإحتمالية المتصلة حيث توصف التوزيع الطبيعي من خلال معادلة رياضية تحدد منحناه وشكله تماماً بمعرفة كل من المعدل μ والتباين σ^2 وهي كما يلي :-

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < X < \infty$$

حيث μ : معدل التوزيع ، σ^2 : التباين ، $\pi = 3.14$ ، $e \simeq 2.718$

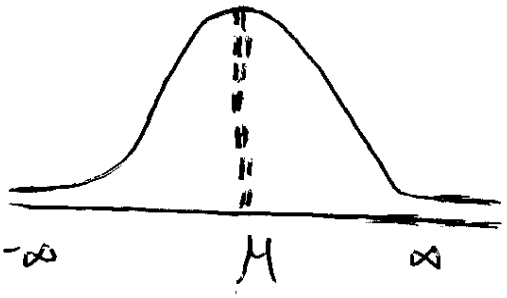
واحتمال الحادث X الذي يقع بين النقطتين a و b هو :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

ويعبر عن المتغير العشوائي X والذي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه σ^2 بالرمز $X : N(\mu, \sigma^2)$.

خواص التوزيع الطبيعي :-

١- متماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي μ بحيث يشبه شكله شكل الجرس .



٢- له قمة واحدة ، وبذلك له منوال واحد يتطابق مع الوسط الحسابي μ .

٣- يقترب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما $X \to -\infty$ ، $X \to \infty$.

٤- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1 .

- حالة خاصة من التوزيع الطبيعي :-

(التوزيع الطبيعي المعياري) (Standard Normal Distribution)

تعريف : التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسطه الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي 1 ، ويعبر عنه التوزيع بالرمز $Z : N(0,1)$.

نظرية :- إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المعلم μ والتباين σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

هو التوزيع الطبيعي المعياري .

كل قيمة من قيم X تقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويل السابق، وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X.

مثال: اذا كان $X : N(70, 25)$، اوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من القيم التالية:-

1) $X_1 = 65$

2) $X_2 = 13$.

الحل: لتحويل قيم X إلى Z، نستخدم التحويل التالي:-

$$Z = \frac{X - M}{\sigma}$$

$\sigma \rightarrow$ الانحراف المعياري

1) $Z_1 = \frac{65 - 70}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

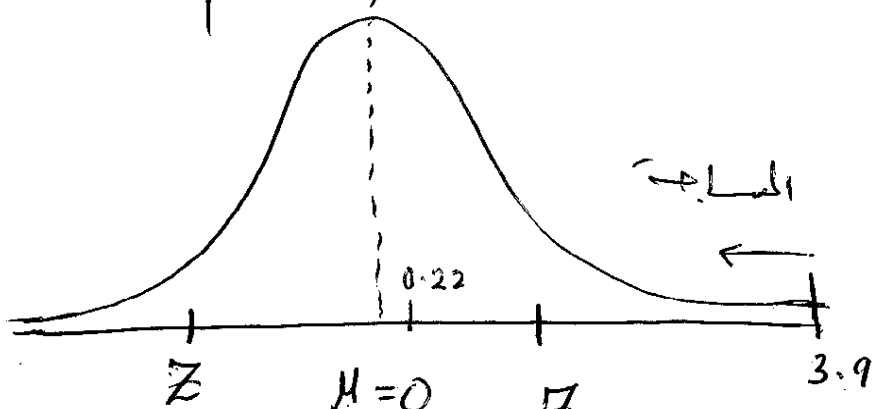
2) $Z_2 = \frac{13 - 70}{5} = -\frac{57}{5}$.

* المساحة تحت التوزيع الطبيعي:-

سنستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد المساحات المحصورة بين متغيرين عشوائيين حيث تعطي هذه الجداول المساحة إلى يسار قيم Z بشكل عام سواء كانت أقل سالبة وتعطى $P(Z \leq z)$.

لاحظوا أن العمود الأول في الجدول يعطي قيم Z واحد خانة عشرية واحدة والصف العلوي يعطي خانة العشرة الثانية، وتقاطع الصف مع العمود يعطي المساحة المطلوبة.

المساحة كما نعلم التوزيع الطبيعي المعياري.



(قيم Z موجبة) ⇓ نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z الموجبة.

(قيم Z سالبة) ⇓ نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z السالبة.

Z	0.00	0.01	0.02	------	0.09
0.0	0.5000				
0.1					
0.2	----------		0.5871		
⋮					
3.9					

داخل جسم الجدول هي عبارة عن المساحات الواقعة على يسار قيمة معيارية معينة

أمثلة عن المساحة التي تقع على يسار قيم معيارية مختلفة :-

$Z = 3.9 = 1$

$Z = 0.52 = 0.6982$

$Z = -3.48 = 0.0003$

$Z = 0.11 = 0.4562$

هي عبارة عن المساحة للرسم يقيم معيارية معينة

القيم المعيارية Z المقابل لقيم المختلفة X

نهاية المحاضرة الثامنة