المحاضرة التاسعة - الأسبوع الخامس
الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$$X : N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z : N(0, 1)$$

متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه σ^2 .

قيم معيارية مقابلة للمتغير العشوائي X حيث تتبع التوزيع الطبيعي المعياري الذي وسطه صفر وتباينه 1 .

هنالك تحويل من قيم المتغير العشوائية X الى قيم معيارية مقابلة لها تعطى بالصيغة

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

مثال : اذا كان لدينا $Z : N(0, 1)$ ، أوجد مايلي :

i) $P(Z < 1)$

ii) $P(Z < -1.96)$

iii) $P(Z > 2.57)$

iv) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

الحل :-

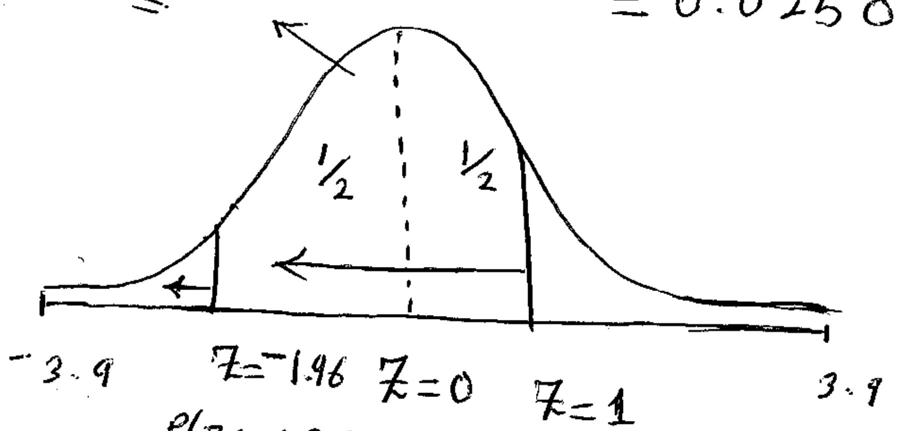
i) $P(Z < 1)$ مباشرة من الجداول

$= 0.8413$

ii) $P(Z < -1.96)$ مباشرة من الجداول

$= 0.0250$.

المساحة اسفل المنحنى $= 1$



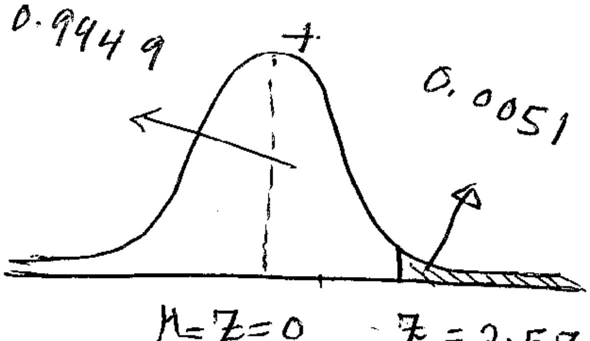
$P(Z<-1.96)=0.025$ $P(Z<1) = 0.84$

iii) $P(Z > 2.57) = 1 - P(Z < 2.57)$

$= 1 - 0.9949$

$= 0.0051$

$1 = 0.9949$



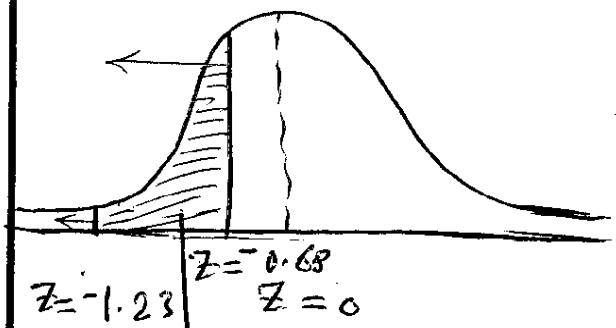
iv) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

$= P(Z < -0.68) - P(Z < -1.23)$

= من الجداول الاحصائية

$= 0.2483 - 0.0934$

$= 0.1549$



المساحة على يسار العدد الأكبر
ناقص
المساحة على اليسار للعدد الأصغر

$$\begin{array}{r} 0.1549 \\ 0.0934 \\ \hline 0.2483 \end{array}$$

مثال :- اذا كان $X : N(65, 36)$ اوجد :-

i) $P(X > 55)$

ii) $P(X < 68)$

iii) $P(50 < X < 70)$.

الحل :- لابد من عملية تحويل المتغير العشوائي والذي يتبع التوزيع الطبيعي الى قيم معيارية Z لايجاد المساحات.

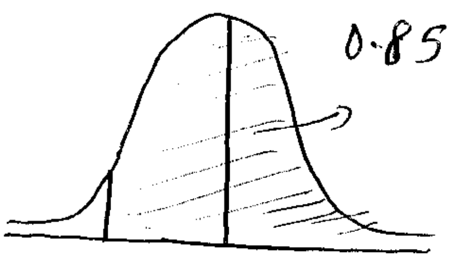
i) $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 65}{6} = \frac{-10}{6} = -1.67$

$P(X > 55) = P(Z > -1.67)$

$= 1 - P(Z < -1.67)$

$= 1 - 0.0475$

$= 0.8525$



0.85

-1.67 $Z = 0$

ii) $P(X < 68) = P(Z < 0.5)$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{68 - 65}{6} = 3/6 = 0.5$

عملية التحويل

$= 0.6915$

iii) $P(50 < X < 70) = P(-2.5 < Z < +0.83)$

$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{50 - 65}{6} = \frac{-15}{6} = -2.5$

$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 65}{6} = 5/6 = 0.83$

عملية التحويل

$= P(Z < 0.83) - P(Z < -2.5)$

$= 0.7967 - 0.0062 = 0.7905$

* تطبيقات على التوزيع الطبيعي :

في هذا البند سنقوم باعطاء بعض الأمثلة كتطبيقات على استعمال التوزيع الطبيعي .

مثال : تخضع اوزان عبوات إحدى أنواع الحلويات لتوزيع طبيعي وسطه 85 غم وانحرافه المعياري 2.5 غم

أ) ما هو احتمال أن وزن إحدى العبوات التي اخذت بشكل عشوائي تزيد عن 90 غم ؟

ب) ما هو احتمال أن وزن أحد العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تقل عن 82 غم ؟

الحل: نفرض ان وزن العبوة = X ،

$$X : N(85 , 2.5^2)$$

المطلوب :- أ) $P(X > 90)$

ب) $P(X < 82)$

الحل :- لابد من القيام بعملية تحويل قيم X الى قيم Z لحساب الاحتمال المطلوب .

أ) $Z = \frac{90-85}{2.5} = \frac{5}{2.5} = 2$

$$P(X>90) = P(Z>2) = 1 - P(Z<2)$$
$$= 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228.$$

ب) $P(X<82) = P(Z<-1.2)$

$Z = \frac{82-85}{2.5} = \frac{-3}{2.5} = -1.2$ = مباشرة من الجدول

$= 0.1151$

مثال: تخضع تكاليف الولادة الطبيعية في المستشفيات في بلد ما للتوزيع طبيعي بوسط 115 دولار وتباين 49 دولار.

ما احتمال أن تكون تكاليف إحدى الولادات الطبيعية ما بين 104 و 122 دولار؟

الحل:

$$X : N(115, 49)$$

المطلوب: $P(104 < X < 122)$ ؟

$$= P(X<122) - P(X<104)$$
$$= P\left(Z<\frac{122-115}{7}\right) - P\left(Z<\frac{104-115}{7}\right)$$
$$= P(Z<1) - P(Z<-1.57)$$
$$= 0.8413 - 0.0582$$
$$= 0.7831$$