المحاضرة الثالثة عشر - الاسبوع الثامن

توزيعات العينة

نظرية (٣) (العينة من مجتمع طبيعي وسطه M وتباينه σ^2 غير معلوم):

اذا اخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه M وتباينه σ^2 غير معلوم بحيث كان $\bar{X}$ (الوسط الحسابي للعينة) لعينة حجمها n وانحراف المعياري S فإن المتغير:

$$T = \frac{\bar{X} - M}{S/\sqrt{n}}$$

يخضع لتوزيع t بدرجات حرية $\nu = n - 1$.

مثال: اذا كانت اطوال الطلاب في احد الصفوف لمدرسة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 160 سم، واذا سحبت عينة عشوائية من 4 طلاب فما احتمال ان يقل متوسطها الحسابي عن 166 سم اذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 10 سم؟

الحل:

$$P(\bar{X} < 166) ?$$

$$T = \frac{\bar{X} - M}{S/\sqrt{n}} = \frac{166 - 160}{10/\sqrt{4}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$P(t[\lambda, 3] = 1.2) = 0.90$$

نظرية (٤) :- توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينتين $(\bar{X}-\bar{Y})$:-

اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله M_1 وتباينه σ_1^2 ، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله M_2 وتباينه σ_2^2 بحيث كان مستقل عن المجتمع الأول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\bar{X}$ وللوسط الحسابي للعينة الثانية بالرمز $\bar{Y}$ فإن توزيع الفرق بين وسطي العينتين $(\bar{X}-\bar{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي ذا المعدل (M_1-M_2) والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ بحيث :-

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري .

مثال :- تخضع علامات الناجحين من امتحان الدراسة الثانوية العامة في احدى المدارس (أ) لتوزيع طبيعي معدله 70 وانحرافه المعياري 12، وفي مدرسة ثانية (ب) تخضع العلامات لتوزيع طبيعي معدله 74 وانحرافه المعياري 16. اخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مدرسة (أ) وعينة عشوائية اخرى حجمها 9 من مدرسة (ب). على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\bar{X}$ ، وللعينة الثانية $\bar{Y}$ ، أوجد

أ) $P(\bar{Y}-\bar{X})>8$ ؟ ← احتمال الفرق بين وسطي عينتين.

ب) $P(\bar{X}-\bar{Y})<3$ ؟

الحل:

أ) $P(\bar{Y}-\bar{X})>8$??

$$P\left[Z=\frac{(\bar{Y}-\bar{X})-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}\right]$$

← إيجاد قيمة المتغير Z عوضنا في السؤال

$$P\left(Z > \frac{8-4}{\sqrt{9+28.4}}\right) = P(Z > 0.65)$$

$$= 1 - P(Z<0.65)$$

$$= 1 - 0.7422$$

$$= 0.2578$$

ب) $$P\left(Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{3-(70-74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}\right]$$

$$P\left(Z < \frac{3-(-4)}{\sqrt{9+28.4}}\right) = P\left(Z < \frac{7}{\sqrt{37.4}}\right)$$

$$= P(Z<1.14)$$

$$= 0.8729$$

تمارين ومسائل :-

سؤال (١) :- اذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل 25 والتباين 36 . اجب عن الأسئلة التالية :-

١- اوجد قيمة المعيار المقابلة للعدد $X = 10$ ؟

٢- اوجد قيمة المعيار المقابلة للعدد $\bar{X} = 10$ في حال كان لدينا عينة حجمها 16 ؟

٣- اوجد المتوسط الحسابي للعينة إذا علمت ان $n = 25$ ؟

٤- " التباين $\neq$ للعينة " " $n = 25$ ؟

٥- " الانحراف المعياري للعينة اذا علمت ان $n = 16$ ؟

الحل :-

① دائماً في التوزيع الطبيعي لكل متغير عشوائي X يوجد قيمة معيار Z نحصل عليها من خلال التحويل التالي :-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{10 - 25}{\sqrt{36}} = \frac{-15}{6}$$

توزيع العينة :

② $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{10 - 25}{\sqrt{36}/\sqrt{16}} = \frac{-10}{6/4} = \frac{-10 \times 4}{6} = \frac{-40}{6}$$

③ $\mu_{\bar{x}} = \mu = 25$.

④ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{25}$ التباين للعينة

⑤ $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{16}$.

الانحراف المعياري ← $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4}$.

سؤال :- اذا كان لدينا $X : N(15, 25)$.

سحب عينة حجمها 10 ~~[illegible]~~

اوجد $P(\bar{X} < 10)$ ؟ ← توزيع المعاينة (توزيع المتوسطات لعينات الحجم مثل هذه العينة).

الحل :-

$$P(\bar{X} < 10) = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{10 - 15}{5/\sqrt{10}}\right)$$

$$P\left(Z < \frac{-5}{1.58}\right) = P(Z < -3.16) = 0.0008$$

تمرين :- اذا كان لدى التوزيع الطبيعي : $X: N(10, 25)$

والتوزيع الطبيعي الآخر $X: N(15, 36)$ ، مستقل عن الأول.

حيث عينة حجم المجتمع الأول حجمها 16 ، وحجم عينة من المجتمع الثاني حجمها 25. اوجد احتمال الفرق بين $(\bar{Y} - \bar{X})$ يقل عن العدد 3 ؟

الحل

$$[P(\bar{Y} - \bar{X}) < 3]$$