المحاضرة الحادية عشر - الأسبوع الثاني

الفصل الخامس: التقدير

ثانياً: التقدير بفترة (Interval Estimation)

من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كانه هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المفترض فيه اعطاء فترة معينة نتوقع انه تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقدير ليس تقدير نقطة أو فترة ثقة وعلى أنّ دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فإنه ليس هناك سبب يدعو إمكانية الحصول على تقدير يحدد معلمة المجتمع بدرجة خطأ. وسنتعرف في هذا البند على إيجاد فترات الثقة للمعدل (الوسط الحسابي) μ، وفترات الثقة للنسبة P، وفترات الثقة للتباين σ^2.

1 إيجاد فترات الثقة للوسط الحسابي μ:

نظرية (1): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث كانت σ^2 معلومة فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي:-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث $\bar{X}$: الوسط الحسابي للعينة، $Z_{1-\alpha/2}$: هي القيمة على محور Z والتي يقع على يسارها مساحة $1-\alpha/2$.

تفسير فترات الثقة :-

تعبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن العلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع من دقة فترات الثقة مثل 90%، 95%، 98% وهذا ما نقصده بالرمز $100(1-\alpha)\%$ وسنكتفي بشرح فترة 95% حيث أن البقية لها نفس السلوك.

أ) نحل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$ فإن

$$\left(\bar{x} - z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{x} + z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

هي فترة ثقة تحتوي متغيرات عشوائية تمثل أحوال العلمة المجهولة μ.

ب) أن تفسير الاحتمال

$$P\left(\bar{x} - z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{x} + z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\%$$

أن لتكرار التجربة لمحاولات لعينة الكبيرة المتكررة يحدد أنه 95% من فترات الثقة ستحوي العلمة μ وأن 5% منها لا تحوي العلمة.

(بمعنى إذا أخذنا 100 عينة عشوائية ذات الحجم n وفي كل مرة نحسب $\bar{x}$ ومنه فترة الثقة لها، فإننا نتوقع نسبة 95% (95 فترة) أن تحوي الوسط الحسابي μ الصحيح وفقط 5 فترات تخطئ القيمة الحقيقية للوسط الحسابي μ.

مثال :- عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، أخذت من مجتمع طبيعي انحراف المعياري $\sigma = 4$ فأعطت لمعدل $\bar{x} = 60$. أوجد فترة 98% ثقة لوسط المجتمع M ؟

الحل :- قبل البدء بتعويض القيم في النظرية ، يجب أن نقوم بعملية تحويل

$$1 - \alpha = 98\% \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = ??$$

$$1 - \alpha = 98\%$$
$$\alpha = 2\%$$
$$\alpha/2 = 1\%$$
$$1 - \alpha/2 = 99\%$$

وبتعويض القيم المعطاة في السؤال نحصل على :-

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(60 - Z_{0.99} \times \frac{4}{\sqrt{25}} , 60 + Z_{0.99} \times \frac{4}{\sqrt{25}} \right)$$

$$\left(60 - 2.33 \times \frac{4}{5} , 60 + 2.33 \times \frac{4}{5} \right)$$

$$(58.14 , 61.86)$$

ملاحظة : يمكن تطبيق نظرية النهاية المركزية حتى لو كان المجتمع غير طبيعي وذلك من خلال استخدام نظرية النهاية المركزية بشرط أن حجم العينة (n) سيكون كبيراً ($n \geq 30$) وبذلك نتعرف على النظرية رقم (c) .

نظرية (c) :- اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه M وتباينه σ^2 حيث كانت σ معلومة ، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للمعلمة M هي تقريباً :-

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

بشرط أن $n \geq 30$.

مثال :- عينة عشوائية حجمها 100 من مجتمع تباينه 25 ، اعطت الوسط الحسابي 52 ، اوجد فترة 98% ثقة للوسط الحسابي M ؟

الحل :- المعطيات $\bar{X} = 52$ ، $\sigma^2 = 25$ ، $n = 100$

$$1-\alpha = 98\% \Rightarrow 1-\alpha/2 = 99\%$$

وبتطبيق النظرية رقم (c) نحصل تقريباً على :-

$$\left(52 - Z_{0.99} \times \frac{5}{10} \; , \; 52 + Z_{0.99} \times \frac{5}{10} \right)$$

$$(52 - 2.33 \times 1/2 \; , \; 52 + 2.33 \times 1/2)$$

$$(50.84 \; , \; 53.16)$$

تمرين :-

اعتماداً على المثال الأخير، اوجد فترة 95% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

ثم اوجد فترة 90% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

نكمل المحاضرة في الاسبوع الخامس عشر.