احتمالات الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة

خلونا في البداية نعرف الفرق بين الحدث المستقل والحدث غير المستقل

الحدث المستقل يعني حدوث A لا يؤثر على حدوث B

الحدث غير المستقل يعني حدوث A يؤثر على حدوث B

أمثلة

1. سحب بطاقة واحدة عشوائيا من كل من صندوقين مختلفين

بما أن سحبي للبطاقة من الصندوق الأول ما يؤثر على سحبي للبطاقة من الصندوق الثاني .. إذن الحدثان مستقلان

2. رمي قطعة نقدية وحجر نرد مرة واحدة

بما أن النواتج في القطعة النقدية ما تؤثر على النواتج في حجر النرد .. إذن الحدثان مستقلان

3. نجاح طالب في مقرر الرياضيات و نجاحه في مقرر الكيمياء

سواء نجح الطالب في الرياضيات أو رسب فيه ما يؤثر على نجاحه أو رسوبه في الكيمياء .. إذن الحدثان مستقلان

4. سحبت كرة عشوائيا من كيس به 10 كرات ثم أعيدت .. ثم سحبت كرة ثانية

بما إني رجعت الكرة الأولى فعدد الكرات ما تغير .. وبالتالي السحبة الأولى ما أثرت في السحبة الثانية .. إذن الحدثان مستقلان

5. نجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء

بما أن الامتحان العملي يؤثر في النجاح في المقرر .. إذن الحدثان غير مستقلان

6. سحب كرة عشوائيا من كيس به 10 كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية

لما نسحب أول كرة وما نرجعها عدد الكرات في الكيس بيتغير ..

أول مرة لما سحبنا عدد الكرات كان 10 .. لكن لما بنسحب كرة ثانية، بكون عدد الكرات اللي بنسحب منهم 9 معناتها السحبة الأولى أثرت في السحبة الثانية .. إذن الحدثان غير مستقلان

في النهاية لازم نعرف إن

إذا رجعنا العنصر إلى المجموعة << حدثان مستقلان

إذا ما رجعنا العنصر إلى المجموعة << حدثان غير مستقلان

لازم نعرف أن لما نتكلم عن الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة احنا قاعدين نتكلم عن وقوع الحدث A و وقوع الحدث B .. بمعنى آخر احنا قاعدين نتكلم عن تقاطع الحدثين

بنبتدي بالأحداث المستقلة

مثال تمهيدي

في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد .. ما احتمال ظهور صورة و العدد 5؟

عند رمي قطعة نقدية شنو النواتج اللي ممكن تطلع؟

يا صورة يا كتابة

عند رمي حجر نرد مرة واحدة شنو النواتج اللي ممكن تطلع؟

1،2،3،4،5،6

فضاء العينة بكون كالتالي

S={(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)}

إذن احتمال ظهور صورة والعدد 5 = 1 ÷ 12 << حالة وحدة من أصل 12 حالة

ممكن نوجد الاحتمال بطريقة أخرى وبدون ما نكتب فضاء العينة للتجربة .. خلونا نشوف شلون

بما أن رمي قطعة النقد لا تؤثر على نواتج رمي حجر النرد .. إذن الحدثان مستقلان

إذن نقدر نوجد الاحتمال بضرب احتمالي الحدثين في بعض .. يعني

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

عند رمي القطعة النقدية شنو الاحتمال أن تطلع صورة؟

ظهور الصورة حالة من أصل حالتين: صورة ، كتابة

يعني احتمال ظهور صورة = 1 ÷ 2

عند رمي حجر النرد شنو الاحتمال أن يطلع العدد 5 ؟

حالة وحدة من أصل 6 حالات

يعني احتمال ظهور العدد 5 = 1 ÷ 6

احتمال ظهور صورة و العدد 5 = احتمال ظهور صورة × احتمال ظهور العدد 5

$$P(H \cap 5) = P(H) \times P(5)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

في المثال التالي بحاول أبين لكم عدة حالات .. وبنرسم شجرة الاحتمال

مثال

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرة عشوائيا ثم أعيدت، ثم سحبت كرة ثانية.

1. ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوتان في المرتين؟

2. ما احتمال أن تكون الكرتان زرقاوتان في المرتين؟

3. ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

4. ما احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

بما أن السحب كان مع الإرجاع إذن الحدثان مستقلان .. بنشوف كل حالة بروحها

1. ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوتان في المرتين؟

مجموع الكرات في الكيس 10 .. وعدد الكرات الحمراء 4

يعني أول مرة لما بسحب شنو الاحتمال إن تطلع حمراء؟

4 حالات من أصل 10

سحبنا أول مرة ورجعنا الكرة .. كم عدد الكرات في الكيس الحين؟

طبعا العدد ما تغير .. للحين عندنا 10 كرات منها 4 حمراء

يعني لما نجي نسحب في المرة الثانية .. شنو احتمال إنها تطلع حمراء؟

4 من أصل 10

إذن احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء =

$$P(R \cap R) = P(R) \times P(R)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

2. ما احتمال أن تكون الكرتان زرقاوتان في المرتين؟

نفس الطريقة اللي قلناها في الجزء 1 بنسويها في الجزء 2 بس نحط في بالنا إن عدد الكرات الزرقاء 6

$$P(B \cap B) = P(B) \times P(B)$$
$$= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

3. ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

عدد الكرات الحمراء 4 من أصل 10 كرات

عدد الكرات الزرقاء 6 من أصل 10

$$P(R \cap B) = P(R) \times P(B)$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

4. ما احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

في هالحالة ما حددوا لنا أي وحده منهم حمراء وأي وحده منهم زرقاء

يعني ممكن نقول الأولى حمراء والثانية زرقاء أو نقول الأولى زرقاء والثانية حمراء

احتمال أن تكون أحدهما حمراء والأخرى زرقاء = احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء بمعنى آخر نضرب في 2 لان الترتيب ما ذكر في السؤال

$$P(R \cap B) = 2 \times P(R) \times P(B) = 2 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{12}{25}$$

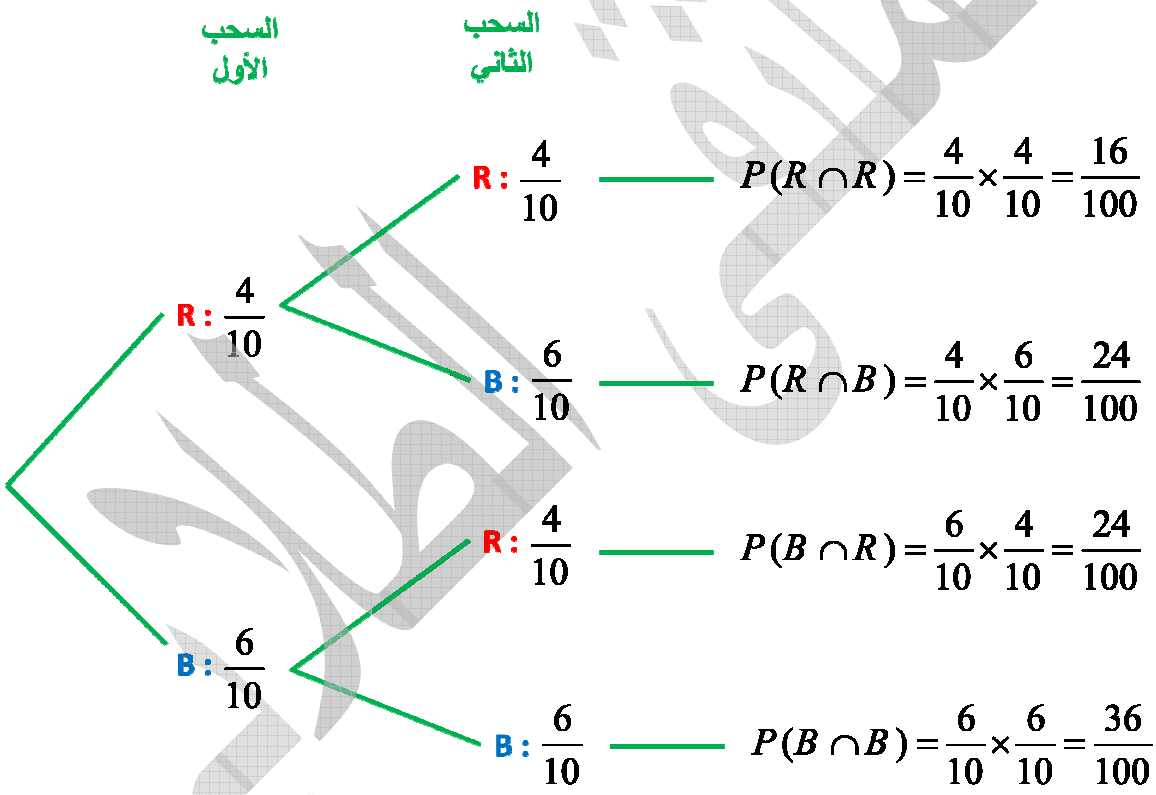
بالنسبة لشجرة الاحتمال نرسمها نفس ما نرسم الشجرة البيانية مالت فضاء العينة بس نزيد عليها الاحتمالات

أول سحبة شنو بيطلع لنا << يا حمراء يا زرقاء

احتمال سحب حمراء كم << 4÷ 10

احتمال سحب زرقاء كم << 6÷10

نروح للسحبة الثانية .. شنو بيطلع لنا << يا حمراء يا زرقاء واحتمال كل واحد منهم ما يتغير لان السحب كان مع الارجاع



ننتقل إلى الأحداث غير المستقلة

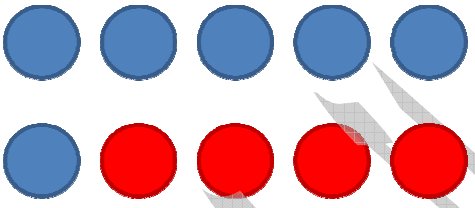
في الأحداث غير المستقلة وقوع الحدثان A و B يساوي

احتمال وقوع الحدث A × احتمال وقوع الحدث B بعد وقوع الحدث A (وقوع B بشرط وقوع A)

بناخذ نفس المثال السابق بس السحب هالمرة بكون بدون إرجاع

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إرجاع

1. ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوتان؟



بما أن الكرة الأولى ما رجعناها إذن الحدثان غير مستقلان

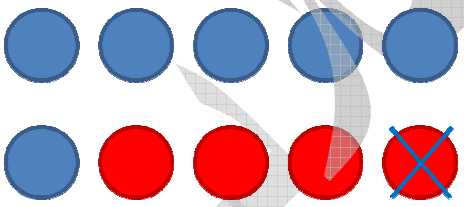
كان عندنا في الكيس 10 كرات 4 منها حمراء

احتمال إن أول سحبة تطلع حمراء بكون 4÷ 10

سحبنا أول مرة وطلعت الكرة حمراء .. خليناها عندنا وما رجعناها في الكيس

كم كرة ظلت في الكيس << 9 كرات

كم وحدة منهم حمراء << 3



يعني لما نجي نسحب المرة الثانية بكون احتمال إن تطلع حمراء 3 ÷ 9

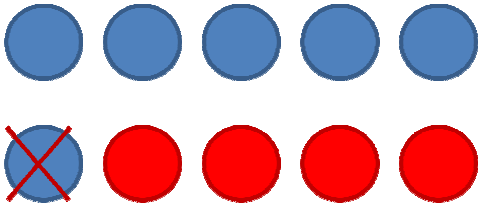
اذن احتمال أن تكون الكرة اولى حمراء والثانية حمراء = احتمال أن تكون الأولى حمراء × أن تكون الثانية حمراء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى

$$P(R \cap R) = P(R) \times P(R \setminus R)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

2. ما احتمال أن تكون الكرتان زرقاوتان؟

بالنسبة لأول سحبة احتمال إن تطلع زرقاء يساوي 6 ÷ 10



عقب ما نسحب الكرة الزرقاء وما نرجعها

بصير عدد الكرات 9 منها 5 زرقاء

يعني احتمال ان تكون الكرة الثانية زرقاء يساوي 5 ÷ 9

إذن احتمال الكرة الأولى زرقاء والثانية زرقاء =

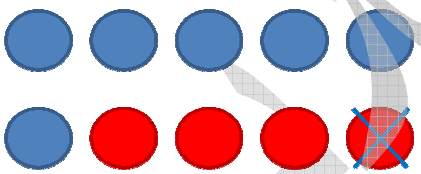
احتمال الكرة الأولى زرقاء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بعد سحب الكرة الزرقاء الأولى

$$P(B \cap B) = P(B) \times P(B \setminus B)$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$$

3. ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

احتمال الكرة الأولى حمراء = 4÷10



احتمال الكرة الثانية زرقاء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى = 6 ÷ 9

احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء = احتمال الأولى حمراء × احتمال الثانية زرقاء بشرط الأولى حمراء

$$P(R \cap B) = P(R) \times P(B \setminus R)$$

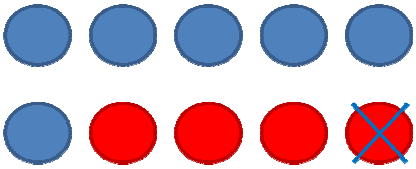
$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

بالنسبة لشجرة الاحتمال

السحبة الأولى بكون عدد الكرات الحمراء 4 من 10

وعدد الكرات الزرقاء 6 من 10

عقب ما نسحب الكرة الأولى حمراء

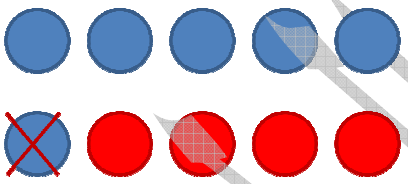


بظل في الكيس 9 كرات .. 3 حمراء و 6 زرقاء

وعلى أساسه نكتب الاحتمالات مالت السحبة الثانية

احتمال الحمراء 3 من أصل 9 .. واحتمال الزرقاء 6 من أصل 9

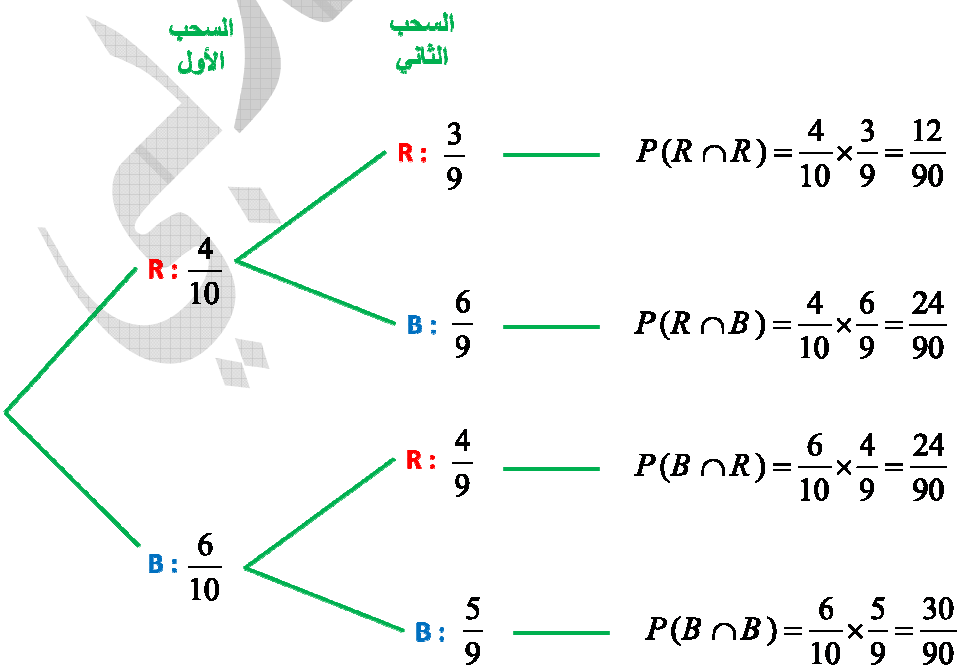
الحين خلنا نسحب الكرة الأولى زرقاء



بظل في الكيس 9 كرات .. 4 حمراء و 5 زرقاء

وعلى هالاساس نكتب احتمال السحبة الثانية

احتمال الحمراء 4 من 9 .. واحتمال الزرقاء 5 من 9



الاحتمال المشروط

آخر شي في هذا الموضوع هو الاحتمال المشروط

أحيانا يعطونا معلومات إضافية تقلل نتائج الفضاء .. مثلا

عند رمي حجر نرد مرة واحدة ما احتمال أن يظهر العدد 4؟

احتمال ظهور العدد 4 = 1 ÷ 6

خلونا نغير السؤال إلى التالي:

عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان العدد الظاهر عدد زوجي فما احتمال أن يكون العدد 2 ؟

في هالسؤال عطونا معلومة أن العدد اللي يطلع عدد زوجي .. معناتها الفضاء صار عندي {2,4,6}

إذن احتمال ظهور العدد 4 = 1 ÷ 3

نقدر نشتق قانون الاحتمال المشروط من قانون الأحداث غير المستقلة

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B \setminus A)$$

ملاحظة: الحدث اللي عقب كلمة ما احتمال هو الحدث اللي نبدي به في الاحتمال المشروط

والحدث اللي عقب الكلمات: علما بأن، إذا كان، إذا علم .. هو الشرط

مثال

في تجربة سحب كرة عشوائيا من صندوق يحوي 10 كرات حمراء تحمل الأعداد من 1 إلى 10، 5 كرات زرقاء تحمل الأرقام الفردية من 1 إلى 9. سحبت كرة عشوائيا من الصندوق فوجدت إنها حمراء، فما هو احتمال أنها تحمل الرقم 9؟

كم كرة حمراء وتحمل الرقم 9 << كرة واحدة

كم عدد الكرات الحمراء << 10 كرات

اذن احتمال الكرة المسحوبة تحمل الرقم 9 بشرط أن تكون حمراء = 1 ÷ 10

وممكن نستعمل قانون الاحتمال المشروط بالطريقة التالية

احتمال(9 / حمراء) = احتمال (9 ∩ حمراء) ÷ احتمال (حمراء)

كم عدد الكرات الحمراء واللي تحمل رقم 9 << كرة وحدة من أصل 15 كرة

كم كرة حمراء عندنا << 10 كرات من أصل 15 كرة

$$P(9 \setminus R) = \frac{P(9 \cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}} = \frac{1}{10}$$

مثال

إذا رسب 25% من طلبة أحد الصفوف بمدرسة ما في الرياضيات، ورسب 10% منهم في الرياضيات والكيمياء.

إذا اختير طالب عشوائيا، ما احتمال رسوبه في الكيمياء إذا كان راسبا في الرياضيات؟

$$P(C \setminus M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)}$$

$$= \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}$$