

المحاضرة الخامسة - الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

مقدمة

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقد مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من 1 إلى 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقتراعات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال.

- المتغير العشوائي Random Variable:

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتراح حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه، ويرمز له بحرف لاتيني كبير Y, X ، ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير y, X

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات ؟
الحل :

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
[HHH]	3
[THH , HTH , HHT]	2
[THT , TTH , HTT]	1
[TTT]	0

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث تعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث { X=0 } , { X=2 } , { X=3 }.

مثال: اعتماداً على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

(أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين عدد H وعدد T ؟

(ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصاً عدد T ؟

الشرح : يعني بالفرق المطلق هو ذلك العدد بدون اشارة سالبة ، بدون كلمة المطلق نحافظ على اشارة السالب
شرح فقره أ : عند إلقاء قطعه نقد 3 مرات راح يكون عندنا هذه الحوادث

HHH , HHT , HTH , HTT , TTT , TTH , THT , THH

$$|H - T| = Y \text{ قيمة}$$

$$HHH = |3 - 0| = 3$$

$$HHT = |2 - 1| = 1$$

$$HTH = |2 - 1| = 1$$

$$HTT = |1 - 2| = |-1| = 1$$

$$TTT = |0 - 3| = |-3| = 3$$

$$TTH = |1 - 2| = 1$$

$$THT = |1 - 2| = 1$$

$$THH = |2 - 1| = 1$$

نلاحظ ان المتغير العشوائي يأخذ العدد الموجب 3 أو موجب 1 ، ليس هناك خيارات اخرى

لتنظيم هذه النتائج :

الحل :

(أ)

قيمة y	الحادث المقابل
1	[TTH , THT , THH , HTH , HHT , HTT]
3	[TTT , HHH]

شرح فقرة ب : متغير عشوائي $H - T = Z$

$$HHH = 3 - 0 = 3$$

$$HHT = 2 - 1 = 1$$

$$HTH = 2 - 1 = 1$$

$$HTT = 1 - 2 = -1$$

$$TTT = 0 - 3 = -3$$

$$TTH = 1 - 2 = -1$$

$$THT = 1 - 2 = -1$$

$$THH = 2 - 1 = 1$$

نلاحظ أن قيم الحوادث متغير عشوائي ازدادت ، في المثال السابق ظهرت لدينا قيمتين فقط ، الان ظهرت 4 قيم جديدة

(ب)

قيمة z	الحادث المقابل
-3	[TTT]
-1	[HTT , THT , TTH]
1	[HHT , HTH , THH]
3	[HHH]

- أنواع المتغيرات العشوائية:

ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

1- المتغير العشوائي المنفصل (Discrete): وهو المتغير الذي يأخذ قيماً إما محدودة أو لا نهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمة واحداً لواحد

مع مجموعة الأعداد الصحيحة. ومن الأمثلة عليه عدد أفراد الأسرة ، عدد المواليد

2- المتغير العشوائي المتصل (Continuous): وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الأمثلة على ذلك: درجة الحرارة، وزن الإنسان

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالاً لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساوياً لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال : في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة H، أوجد:

$$P\{X=3\} \quad -1 \quad P\{X=2\} \quad -2$$

الحل :

1- نلاحظ أن $X=3$ يقابل الحادث HHH وبالتالي $P(X=3) = \frac{1}{8}$

2- في حالة $X=2$ فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH}

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي :

قيمة X	$P(X=X)$
3	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$

تمرين : في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموعة العددين الظاهرين، عرف ذل كالمتغير واحتمال كل منهما؟

الجدول السابق يقودنا إلى التعريف التالي:

- التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution :

تعريف : كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعاً احتمالياً منفصلاً أو اقتران احتمالي، بحيث يحقق الشرطين التاليين:

1- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.

2- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي 1.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ للاحتمال $P(X=x)$ فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

لجميع قيم x , $f(x) \geq 0$

لجميع قيم x , $\sum f(x) = 1$

مثال : هل تمثل المعادلة $f(x) = \frac{x}{15}$; $x = 1, 2, 3, 4, 5$ لغير ذلك: $f(x) = 0$ توزيعاً احتمالياً منفصلاً؟

الحل : لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X . أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

$$\sum_{x=1}^5 f(x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

الشرح : نتحقق من الشرط الأول ألا وهو $F(X) > 0$

$$f(x) = \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}, \frac{5}{15} > 0$$

الشرط الثاني : موجود في الحل فوق

إذا: $f(x)$ توزيع احتمالي حقق الشرطين الأول والثاني.

يمكن وضع المعادلة على شكل جدول على الصورة:

X	1	2	3	4	5	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

مثال : أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً واحسب احتمال X أكبر من 4 واحتمال X أقل من أو تساوي 4؟

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	A	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الشرح : بما أننا نتكلم عن توزيع احتمالي ، فيجب أن يتحقق شرطان

الشرط الأول : $F(X) \geq 0$ [متحقق حيث أن جميع النتائج موجبة]

الشرط الثاني : $\sum F(X) = 1$

الحل : بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

الشرح : الكسور مقاماتها مختلفة .. حتى نوحّد المقامات نضرب $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ بالعدد 4 و $\frac{1}{10}$ بالعدد 2

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من 4:

$$P(X > 4) = P(X = 6) = \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي 4:

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

شرح : مَلَاك