المحاضرة المباشرة الأولى – الأسبوع الرابع

مراجعة عامة (الباب الأول والثاني)

الباب الأول: نظرية الاحتمالات

- ❑ **طرق العد**
  - ○ **طريقة الضرب**
  - ○ **طريقة الجمع**
  - ○ **التباديل**
  - ○ **التوافيق**

- **كم عدد عناصر الفضاء العيني في تجربة القاء قطعتي نقد وحجر نرد؟**

الحل:

عدد عناصر الفضاء العيني = 2 × 2 × 6 = 24 عنصراً.

- **سؤال: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائبه من بين 20 شخصا؟**

الحل:

لاحظوا أن عملية الترتيب في هذا السؤال ضرورية حيث أن اختيار الأول رئيس (فرضاً احمد) والثاني (فرضاً خالد) يختلف عن اختيار خالد أولا كرئيس واحمد ثانيا كنائب. وبذلك فإن عدد الطرق يساوي

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$20P2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380$$

- **سؤال: كم عدد المباريات التي ستقام بين مجموعة مكونة من أربع فرق بحيث يلعب كل فريقين مباراة واحدة فقط؟**

الحل:

لاحظ أن عملية الترتيب غير مهمة حيث أن كل فريق سيلعب مباراة واحدة مع الفريق الآخر, وبذلك يكون الحل هو

$$4C2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 6$$ مباريات.

❑ نظرية الاحتمالات

سؤال: عند القاء قطعة النرد المنتظمة مرة واحدة, اوجد:-

1- احتمال ظهور عدد يقسم على أربعة بدون باقي.

2- احتمال ظهور عدد فردي.

3- احتمال ظهور عدد يزيد عن 8.

4- احتمال ظهور عدد يقل عن 7.

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1- لاحظ أنه يوجد عدد واحد فقط يقبل القسمة على 4 وهو العدد 4 نفسه. وبذلك حادث بسيط

$$P(\text{عدد يقبل القسمة على 4}) = \frac{1}{6}$$

2- الاعداد الفردية هي 1, 3, 5 حادث مركب

$$P(\text{عدد فردي}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3- لا يوجد أي عدد يزيد عن العدد 8

$$P(\text{عدد يزيد عن 8}) = 0$$

4- الاعداد التي تقل عن 7 هي من 1 إلى 6 (الفضاء العيني)

$$P(\text{عدد يقل عن 7}) = 1$$

سؤال: اظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن 10% من الطلاب يدخنون, وأن 30% من الطلاب يشربون القهوة, وأن 5% من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة.

1- احسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة.

2- من بين الطلاب المدخنين, ما هي نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة.

3- من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة, ما هي نسبة المدخنين؟

الحل:

نفرض أن الطالب المدخن يمثل الحدث A وأن الطالب الذي يشرب القهوة بالحدث B.

وينتج أن $P(A)=0.10$, $P(B)=0.30$, $P(A \cap B) = 0.05$

1- $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.10 + 0.30 - 0.05] = 1 - 0.35 = 0.65$$

2- $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.10} = 0.5 = 0.50$

3- $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)} = \frac{0.10-0.05}{1-0.30} = \frac{0.05}{0.70} = 0.071$

الباب الثاني (المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة)

❑ التوزيع الاحتمالي المنفصل

تمرين: في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموع العددين الظاهرين, عرف ذلك المتغير واحتمال كل منها؟

سؤال: اعتمادا على الجدول التالي والذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

x	*f(x)*
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	a

أوجد:

1- قيمة المجهول a؟
2- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X؟
3- تباين المتغير العشوائي X؟
4- E(2X + 10)؟

الحل:

1- 0.3 + 0.4 + 0.1 + a = 1 ⟶ a = 1 – 0.8 = 0.2

2- E(X) = 1×0.3 + 2×0.4 + 3×0.1 + 4 ×0.2 = 0.3 + 0.8 + 0.3 + 0.8 = 2.2

3- $\sigma^2 = (1-2.2)^2 \times 0.3 + (2-2.2)^2 \times 0.4 + (3-2.2)^2 \times 0.1 + (4-2.2)^2 \times 0.2 = 0.432 + 0.016 + 0.064 + 0.648 = 1.16$

4- E(2X+10)=2E(X)+10 = 2× 2.2 + 10 = 14.4

❑ **توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون**

تمرين: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات, ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها, ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات؟

الحل:

لاحظ أن هذه التجربة تمثل احد تجارب بيرنوللي والتي تتبع توزيع ذات الحدين.

$$P(X=x) = b(x,3,\frac{1}{6}) = 3Cx \times (\frac{1}{6})^x \times (\frac{5}{6})^{3-x}$$

$$P(X=0) = b(0,3,\frac{1}{6}) = 3C0 \times (\frac{1}{6})^0 \times (\frac{5}{6})^{3-0} = 1 \times 1 \times \frac{125}{216} = 0.58$$

$$P(X=3) = b(3,3,\frac{1}{6}) = 3C3 \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^{3-3} = 1 \times \frac{1}{216} \times 1 = \frac{1}{216}$$

تمرين: في تجربة ذات الحدين, إذا كان $n = 10$, $p=0.1$ أوجد $P(X \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات؟

الحل:

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 10C0 \times 0.1^0 \times 0.9^{10} + 10C1 \times 0.1^1 \times 0.9^9 + 10C2 \times 0.1^2 \times 0.9^8$$

تمرين: معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الأسبوع الواحد. ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين, ما احتمال حدوث حادثين أو اقل في اسبوع معين؟

الحل:

لاحظ أن هذه التجارب تمثل نموذج من تجاب بواسون, وبالتالي فإنها تنتمي إلى توزيع بواسون حيث

$$P(X=x) = P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^x}{x!}$$

$$P(X=0) = P(0;3) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$P(X \leq 2) = P(0;3) + P(1;3) + P(2;3) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!}$$

$$= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3} = e^{-3}[1 + 3 + 4.5] = 8.5e^{-3} = \frac{17}{2e^3}$$