الباب السادس الاحتمالات

التجربة العشوائية

هي اجراء نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنه له وان كنا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النتائج سيتحقق فعلاً حيث ان الواضح أننا لا نستطيع أن نتنبأ بنتيجة التجربة العشوائية الا اننا نستطيع حساب احتمال ظهور أي نتيجة وذلك بأستخدام الاحتمالات .

طيب لنوضح معاً وش يعني التجربة العشوائية

إذا ألقيت قلم في الهواء وسقط فانه من الممكن سيسقط على الأرض مهما تكررت التجربة وبنفس الشكل أي انك لن تلاحظ أي شيء ولن تلاحظ أي تغيير وهذه تسمى تجربة مؤكد

إما إذا ألقيت قطعه نقود في الهواء فإنها تسقط نعم ولكن لا تدري على أي وجه إما على الكتاب هاو على او على الصورة هذه تسمى تجربة عشوائية

مثال آخر إذا سحبت ورقه من مجموعة أوراق اللعب فانك لا تدري إذا كانت الورقة المسحوبة ستظهر صوره أو رقم ولكن تخمن يمكن تأتي مثل ما تقول أنت أو تأتي عكس ما تقول يعني (نعلم مسبقا أنها بتكون احتمال صورة أو رقم)

إذاً هذه هي الاحتمالاتـــــ

فراغ العينة

هي المجموعة المكون من النتائج الممكنة من تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز S

مثال عن فراغ العينة

ألقيت قطعه نقود متوازنة مره واحده فما هو فراغ العينة ؟

فراغ العينة إما صورة أو كتابة

يعني وش هي الاحتمالات اللي بتجي الاحتمالات اما صور ولا كتابه طيب لو رمينا قطعة نرد او زهرة حقت منوبولي عرفتوها اكيد :D

بيكون فراغ العينة اما ١ ولا ٢ ولا ٣ ولا ٤ ولا٥ ولا ٦ لان فيها ستة اوجه

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال عن فراغ العينة

اذا القيت قطعتي نقود مره واحد فما هو فراغ العينة

فراغ العينة كالتالي

صوره صورة أو صوره وكتابه أو كتابه صوره أو كتابه وكتابه

يعني إما متشابهة في الصورة

ولا مختلفة صوره وكتابه وبعدين العكس

ولا متشابهة في الكتابة

لاحظ قطعتين وليست وحده

تعرفون ليه طلعت كذا خذ بيدك قطعتين نقود مو وحده وارميها احتمال الناتج يطلع إما القطعة الأولى صوره والثانية بعد صوره ولا تطلع الأولى صوره والثانية كتابه ولا الأولى كتابه والثانية صوره ولا الأولى كتابه والثانية كتابه هذه هي الاحتمالات اللي بتجي

- وفراغ العينة : إما يكون محدود أو غير محدود (اللانهائي معدود – غير معدود) .

فراغ العينة المحدود : بأنه الفراغ الذي يحتوي على عدد محدود من العناصر .

مثاله إذا طلب منك فراغ العينة لقطعة زهر أو نرد متزنة رميت مره واحده؟

فإما أن تكون الوجه ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ فقط

فراغ العينة اللانهائي : هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لانهائي من العناصر

وينقسم لقسمين

أ - فراغ عينة لانهائي قابل للعد هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لانهائي من العناصر وقابلة للعد

مثل : إلقاء زهرة نرد حتى يظهر الوجه ٦

ب- فراغ عينة لانهائي غير قابل للعد : وهو الفراغ الذي يحتوي على عدد لانهائي من العناصر غير قابلة للعد

مثل : اختبار فيوز أو مصباح كهربائي لمعرفة عمره فراغ العينة يكون هنا

$S = \{ x : x \geq 0 \}$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

٣-٢-٦ الحادثة :

الحادثة : هي مجموعه جزئيه من فراغ العينة

ماذا تعني الحادثة ؟

إذا القينا قطعة نقود مره واحد فأن احتمال ظهورها كالتالي او فراغ العينة لها كالتالي

(كتابه كتابة ، كتابه صورة ، صورة كتابه ، صوره صورة)

إحدى الحوادث التي حصلت وتسمى حادثه

أليس كذلك اذا الحادثة هي كل مجموعه حدثت في فراغ العينة

وفي المثال يوجد أربع حوادث (الشرح الذي في الدائرة إحدى تلك الحوادث)

أنواع الحوادث

١- الحادثه البسيطه : هي الحادثه التي تتكون من عنصر واحد من عناصر فراغ العينة اما الحادثه المركبة هي التي تحتوي على أكثر من عنصر من عناصر فراغ العينة .

مثالها : عند القاء قطعتي نقود مره واحده حدد ما اذا كانت الأحداث التالية أحداث بسيطة أم لا اذا علمت ان فراغ العينة هو (S = (HH, HT , TH , TT

الحادثة	وصفها	نوع الحادثه
A 1 = (TT)	حادثة تمثل ظهور كتابتين	حادثه بسيطة
A2 = (H H)	حادثة تمثل ظهور صورتين	حادثه بسيطه
A3 = (HH,TT)	حادثة تمثل ظهور وجهين متشابهين	حادثه مركبة
A4 = (HH,HT,TH)	حادثة ظهور صورة واحدة على الاقل	حادثة مركبة

لاحظ الخط الأحمر لأنها عنصر واحد فقط تكون بسيطة ولكن لاحظ السهم الأزرق هناك أكثر من عنصر الكتابة والصورة لهذا تكون مركبة

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

٢- **الحادثة المركبة** : هي الحادثة التي لابد من وقوعها (الله لايعقوها بشر :D)

مثالها : عند إلقاء قطعة نقود فمن المؤكد إما أن تكون صور أو كتابه وعموماً فراغ العينة هي حادثه مؤكده لأنها مجموعه جزئية من نفسها

مثالها : عند إلقاء زهرة نرد متزنة مره واحده فان الحادثة المؤكدة هي ظهور أي وجه من ١ إلى ٦

٣- **الحادثة المستحيلة** : هي الحادثة التي لا يكون للتجربة فيها أي ناتج وترمز بالرمز Ø

مثالها : عند إلقاء نرد متزنة مره وحده فان المثال على الحادثة المستحيلة هو ظهور عدد فردي وزوجي آن واحد

٤- **الأحادث المتماثلة** : هي تلك الأحداث التي يكون لها نفس فرصة الحدوث .

مثالها : عند إلقاء قطعة نقود فان فرص ظهور الكتابة هي نفس فرص ظهور الصورة وكذلك عند إلقاء زهرة نرد تكون فرصة ظهور احد الأوجه متساوية

٥- **الأحداث المتنافية (المانعة) بالتبادل** : إذا كان هناك حدثان A و B وكان وقوع الحادثتين معاً حدثاً مستحيلاً وهذا يعني أن الحدثين لا يمكن أن يقعا معاً أو وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر فانه يقال أن B و A حدثان مانعان أو متنافيان بالتبادل .

أمثلتها :

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحده فان حدث ظهور الكتابة يمنع ظهور الصورة
- عند إلقاء زهرة نرد متزنة بطريقة مره واحدة فان ظهور أحد الأوجه يمنع ظهور الأوجه الأخرى.
- إذا اعتبرنا أن الحدث A يمثل الوجوه الزوجية أي ٢ و ٤ و ٦
  والحدث B يمثل الوجوه الفردية أي ١ و ٣ و ٥

فان الحدثين يعتبران مانعان لبعضهما بالتبادل .

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

٦- الأحداث المستقلة : لو أن لدينا حدثان وكان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر فيقال أن الحدثين مستقلان كذلك لو أن هناك أكثر من حدثين لا يؤثر ولا يتأثر أحدهم بالأحداث الأخرى فيقال أن تلك الأحداث مستقلة .

امثلتها :

- عند إلقاء قطعتي نرد فان ظهور رقم ما على الزهرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر على القطعة الثانية
- عند إلقاء أكثر من قطعتي نرد فان ظهور رقم ما على أي قطعة نرد لا يؤثر ولا يتأثر بما ظهر على قطع النرد الأخرى .

٤-٢-٦ طرق العد (التوافيق) :

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (X) من الأشياء من بين (n) من هذه الاشياء (الترتيب غير مهم) هو :

$$\binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

حيث !n = حاصل ضرب العدد بالتنازل كالتالي

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار رجلين من بين أربع رجال ؟

حيث ان n = ٤ لانها تعني الحجم الكلي

و x = ٢ تعني العدد المختار من n

حيث ان n = ٤ و x = ٢

$$\binom{4}{2} = C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!(2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = \frac{24}{4} = 6$$

حل التطبيق رقم ٦-١١ صفحة ١٧٣

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الاحتمال

التعريف الكلاسيكي للاحتمال : إذا كان عدد الطريق التي يمكن أن تظهر بها نتائج تجربة ما هو n طريقة وكانت هذه النتائج لها نفس فرصة الظهور وكان بينها m طريقة تظهر بها حادثه ما . فإنه يقال ان احتمال وقوع الحادثة هو $\frac{m}{n}$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

الأمثلة التطبيقية للاحتمالات

مثال (٦ – ١٢) صفحة ١٧٤

ألقيت زهرة نرد متزنة مره واحدة فما احتمال ظهور

١. عدد فردي .
٢. عدد زوجي .
٣. عدد أقل من الوجه ٦
٤. عدد أكبر من الوجه ٦ .

قبل كل شيء نستخرج فراغ العينة وهي الاحتمالات التي قد تحصل عندما نلقي زهرة نرد .

فراغ العينة = (١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦) الآن نبدأ الحل .

أ – احتمال ظهور عدد **فردي** :

عندما نرمي زهرة نرد فان الاحتمال هو إما وجه ١ أو وجه ٢ أو وجه ٣ أو وجه ٤ أو وجه ٥ أو وجه ٦ أليس كذلك اذن هكذا نستخرج فراغ العينة وهي الاحتمالات التي ستحصل أثناء التجربة

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

لان عدد الأرقام الفردية هي ٣ أرقام ١ و ٣ و ٥ وهو يريد احتمال ظهور عدد فردي

لان عدد الأوجه في زهرة النرد من ١ إلى ٦

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ب – احتمال ظهور عدد **زوجي** :

لاحظ هنا يريد عدد زوجي إذا الأعداد الزوجية أو الأوجه الزوجية في قطعة النرد هي ٢ و ٤ و ٦ عددها ٣

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ج – احتمال ظهور عدد **أقل من الوجه ٥**

لاحظ اقل من الوجه ٥ إذن يريد وجه ٤ ووجه ٣ ووجه ٢ ووجه ١ وعددها ٤

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

عدد الأوجه

د – احتمال ظهور عدد **اكبر من الوجه ٦**

لاحظ اكبر من الوجه ٦ والمعروف أن زهرة النرد لها ٦ أوجه فقط إذاً عددها صفر

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{6} = 0$$

عدد الأوجه

مثال (٦ – ١٣)

ألقيت **قطعتا** نقود متزنتان مرة واحدة فما احتمال :

أ – ظهور صورة واحدة على السطح العلوي .

ب – ظهور صورة واحدة على الأقل .

H تعني في قطعة النقود صورة

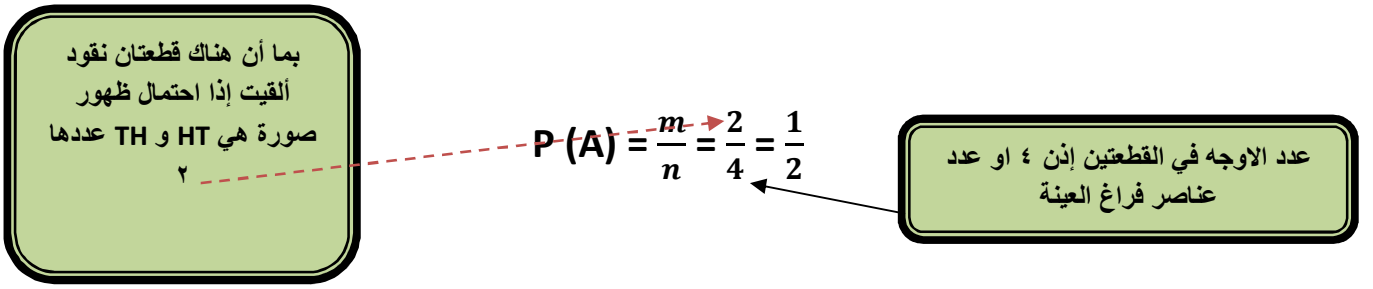
T تعني في قطعة النقود كتـــابة

الحل : فراغ العينة في هذه الحالة (HH , HT , TH , TT)

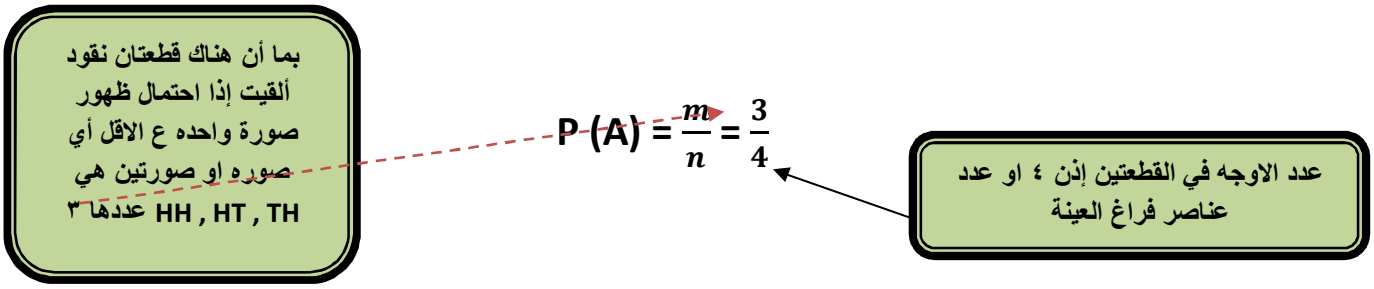
وعدد الطرق التي يمكن أن يظهر فيها الوجهان n = 4

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

أ – ظهور **صورة واحدة على السطح العلوي** .



ب – ظهور **صورة واحدة على الأقل ؟**



المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

يصاحب نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى " المتغير العشوائي "

ما هو المتغير العشوائي

هو المقدار الذي يأخذ قيماً رقمية مختلفة والتي تعبر عن نتائج التجربة العشوائية .

مثال يشرح تحديد المتغير العشوائي في التجربة العشوائية وكيف يرافق المتغير هذه التجربة .

عند إلقاء قطعة نرد مرة واحدة التجربة هنا عشوائية ونتائجها هي

١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦

أي ان (X = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

أقسام المتغيرات العشوائية :

أ - متغير عشوائي منفصل ب - متغير عشوائي متصل

١- يقال أن المتغير العشوائي (X) متغير عشوائي منفصل : إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة .

مثال : - عدد الأسهم المخصصة للفرد المكتتب - عدد الحوادث الشهرية على الطرق السريعة

٢- يقال أن المتغير العشوائي (X) متغير عشوائي متصل إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والسكرية في مدى تغيره أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة

مثال : - أسعار المنتجات المختلفة . - أجور العمال بإحدى الشركات .

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي /

عبارة عن دالة توضح احتمالات معينة لقيم المتغير العشوائي المختلفة وهذه الدالة يعبر عنها بجدول او صيغة رياضية تبين قيم المتغير والاحتمالات المقابلة لكل منها فمثلاً في تجربة إلقاء زهرة الطاولة نجد أن نتائج التجربة هي ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ وكل متغير عشوائي يأخذ دالة الاحتمال ١ على ٦

أي متغير $x = 1$ ، احتماله $= p(x) = \frac{1}{6}$

وتنقسم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الى نوعين :

١- توزيعات احتمالية منفصلة
٢- توزيعات احتمالية متصلة

ملاحظة : بالنسبة لخصائص أساسية للتوزيع الاحتمالي المنفصل راجع صفحة ١٩٢ ضروري

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال ٦ -٢١

ألقيت ثلاث قطع من العملة المعدنية المتوازنة أجب على ما يلي :

أ – ماهو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الصور التي تظهر على الوجه العلوي ؟

ب- أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الصور التي تظهر على السطح العلوي ؟

ج – أوجد خصائص توزيع عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي ؟

أ – للإجابة على السؤال الأول وهو إيجاد المتغير العشوائي لابد من إيجاد فراغ العينة كالتالي :

كل قوس عبارة عن رمية لثلاث زهرة نرد

$$S = (T,T,T)(T,T,H)(T,H,T)(H,T,T)(H,H,T)(H,T,H)(T,H,H)(H,H,H)$$

نفرض أن X تمثل عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي والذي يمثل المتغير العشوائي والذي يخصص أعداداً حقيقة تناظر عناصر فراغ العينة كالآتي :

$$S = X(T,T,T) = 0 \ , \ X(T,T,H) = 1 \ , \ X(T,H,T) = 1 \ X(H,T,T) = 1 \ X(H,H,T) = 2 \ , \ X(H,T,H) = 2$$
$$, \ X(T,H,H) = 2 \ , \ X(H,H,H) = 3$$

كيف استخرجنا الأرقام التي بالأحمر والتي يقال عنها أنها المتغير العشوائي؟

في السؤال يريد إيجاد الصور التي تظهر على السطح العلوي إذن نشوف في كل عنصر من عناصر فراغ العينة في الرمية الأولى نجد أنها صفر (جميعها T) والرمية الثانية كانت ظهور الصورة فيها عدد (وحده صورة (H)) والرمية الثالثة أيضا (عدد وحده صورة) والرابعة أيضا فيها (عدد وحده صوره) والرمية الخامسة فيها (٢ صورتين) والرمية السادسة (فيها صورتين) والسابعة (في صورتين) والثامنة (فيها ٣ صور)

وعلى ذلك نجد أن فراغ العينة يرافقه المتغير العشوائي X = (0,1,2,3) >> الأعداد التي بالأحمر أعلاه

وهذا يعني ان الدالة X وهي عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي متغير عشوائي ياخذ القيم 0,1,2,3

0 تعني عدم وجود صورة 1 تعني ظهور صوره واحده 2 تعني ظهور صورتين 3 تعني ظهور ثلاث صور

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

وبالتالي فأن

$$P(X=0)=\{(\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T})\}$$

$$P(X=1)=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$$

$$P(X=2)=\{(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}$$

$$P(X=3)=\{H,H,H)\}$$

ب- التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة

$\frac{1}{2}$ وهي عدد ظهور الكتابة في الرمية الواحدة على عدد الأوجه أو عدد وجه الكتابة على مجموع الأوجه لقطعة نقود

وعلامة الضرب لأنها تعني عند قراءة الحدث في رمية ثلاث نقود مره واحد كتابه و كتابه و كتابه ومعنى و (أي

وهي حاصل ضرب رمية ثلاث نقود معدنية $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ وعلامة الموجب لأنها أكثر من رمية وبما أن هناك رميات أكثر من الواحد يكون بينها موجب

$$P(X=0)=\{(\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T})\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\{(T,T,H)+(T,H,T)+(H,T,T)\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\{(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\{H,H,H)\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الصف الثاني يتم استخراجه كالتالي هو حاصل
قيمة x (السهم الأحمر) × قيمة الاحتمال

ج – خصائص التوزيع

X	0	1	2	3	المجموع ∑
P(X)	قيمة احتمال p(0)= **1 / 8**	قيمة احتمال p(1)= **3 / 8**	قيمة احتمال p(2)= **3 / 8**	قيمة احتمال p(3)= **1 / 8**	$\frac{8}{8} = 1$ من الشروط أن مجموع الاحتمالات تساوي ١
X . P (X)	0 × **1 / 8** 0 =	3 / 8	6 / 8	3 / 8	12 / 8 = 1.5
$\mathbf{X^2}$ **. P(X)**	$\mathbf{0^2}$**× 1 / 8** = 0	3 / 8	12 / 8	9 / 8	*24 / 8 = 3*

لايجاد التباين نأخذ مجموع $\mathbf{X^2}$ **. P(X)**

ثم نطرحها من ميو μ تربيع هذا

$\mu = E(X) = \sum X \cdot P(X) = \frac{12}{8} = 1.5$

$\sigma^2 = var(x) = \sum x^2 . p(x) - \mu^2 = \frac{24}{8} - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$

$\sigma = \sqrt{var(x)} = \sqrt{0.75} = 0.87$

الانحراف المعياري هو جذر التباين أي ناتج التباين نأخذ جذره ويساوي ٨٧%

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

شرح مبسط لبعض النقاط

$$P(X=0)=\{(T,T,T)\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

دائما مابين القوس تعني أن هناك رمية واحده لـ ثلاث قطع نقود وإذا كانت (T,T) هذا يعني أنها هناك رمية لقطعتين نقود ودائما التي تأتي جانب بعض في داخل القوس إذا أردنا استخراج احتمالها نضرب احتمالاتها ببعض لانها تعني حوادث غير مستقلة وتقرأ كتابه و كتابه و كتابة وحرف (و) يعني ضرب الاحتمالات ببعض

$$P(X=1)=\{(T,T,H)+(T,H,T)+(H,T,T)\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

بهذه الصوره تعني ان هناك ثلاث رميات لثلاث نقود الرمية الأولى وتقرأ

(كتابه و كتابه وكتابة) أو (كتابة وصوره و كتابة) أو (صورة و كتابة و كتابة)

$$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})$$

لاحظ بدل حرف (و) حطينا (×) وبدل كلمة (أو) حطينا (+)

أي ان و تعني ضرب و أو تعني موجب

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com