قوانيــن الفصل الثالث
مشتقات الدوال الجبرية

1. قانون متوسط التغير:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2. مفهوم المشتقة:

$$f(\overline{x}) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* <u>شرط</u> أن تكون النهاية موجودة.

{ أي أن المشتقة هي نهاية متوسط التغير عندما $\Delta_x \to 0$ لهذا تسمى معدل التغير في الدالة }

3. جبر الاشتقاق:

$$f(\overline{x}) = y = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = D_x y$$

* <u>ملاحظة</u>: رموز الاشتقاق للدالة $y = f(x)$

A) إذا كانت $f(x) = mx + b$ فإن: $f(\overline{x}) = m$

B) إذا كانت $f(x) = c$ فإن: $f(\overline{x}) = 0$

C) إذا كان neQ عدد نسبي، $f(x) = x^n$ فإن: $f(\overline{x}) = nx^{n-1}$

* حتى تكون المشتقة معرفة يجب أن تكون $x \neq 0$ عندما $n \lesssim 0$

D) المشتقة لمجموع عدة دوال: $\frac{d}{dx}(f_{(x)} + g_{(x)}) = \frac{d}{dx} f_{(x)} + \frac{d}{dx} g_{(x)}$

* وكذلك في جملية الطرح...

E) المشتقة لضرب عدة دوال: $\frac{d}{dx}(f_{(x)} \cdot g_{(x)}) = f(\overline{x}).g(x) + f(x).g(\overline{x})$

* <u>ملاحظة</u>: الضرب عملية إبدالية...

F) المشتقة لخارج قسمة دالتين: $m(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\overline{x}).g(x) - f(x).g(\overline{x})}{(g_{(x)})^2}$

G) مشتقة مقلوب الدالة: $\frac{d}{d(x)}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{\frac{d}{dx} f(x)}{(f_{(x)})^2}$ المشتقة تربيع

H) قاعدة التسلسل: إذا كانت $y = (f(u), u = g(x)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(\overline{x}).g(\overline{x}) = f(g(\overline{x})g(\overline{x}))$

4. الاشتقاق الضمني:

قد يحدث في بعض الأحيان أن تكون العلاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y غير صريح ، وفي هذه الحالة تكون الدالة على الصورة:

$f(x, y) = c$ حيث c مقدار ثابت

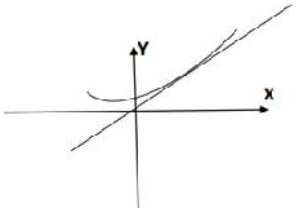
ولإيجاد هذه المشتقة نجري عملية التفاضل بالنسبة لـ x لجميع المتغيرات على طرفي المعادلة ويسمى هذا الاشتقاق الضمني.

* <u>ملاحظة</u>: إن مشتقة الدالة هي دالة اخرى، لهذا يمكن أن نشتق مره ثانية فنحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية.

تطبيقات التفاضل على سلوك المنحيات

1. تفسر المشتقة الأولى هندسياً على أنها ميل المماس لمنحنى الدالة...

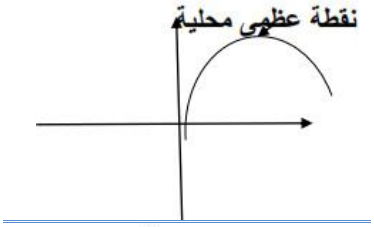
$y = f(x)$ عند النقطة $(a, f_{(a)})$ إذا كانت مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $x = a$



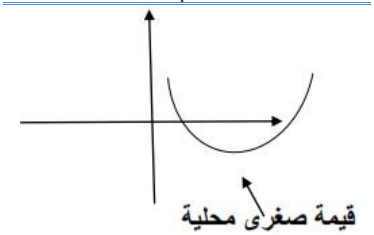
2. القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية ومجالات التزايد والتناقص...

إذا كانت c نقطة في مجال الدالة f فإن:

1. f(c) قيمة عظمى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على c بحيث أن: $f(x) \leq f(x)$ لجميع القيم x في الفترة (a,b) وتكون النقطة (c,f(c)) هي النقطة العظمى المحلية



2. تعتبر f(c) قيمة صغرى محلية إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على c بحيث أن: $f(x) \geq f(x)$ لجميع القيم x في الفترة (a,b) وتكون النقطة (c,f(c)) هي النقطة الصغرى المحلية



* <u>ملاحظة</u>: 1. إذا كان التغير في سلوك الدالة عند النقطة (c,f(c)) من التزايد قبلها إلى التناقص بعدها فإننا نقول: أن النقطة (c,f(c)) هي قيمة عظمى محلية.

2. إذا كان التغير في سلوك الدالة عند النقطة (c,f(c)) من التناقص قبلها إلى التزايد بعدها فإننا نقول: أن النقطة (c,f(c)) هي قيمة صغرى محلية.

حساب القيم العظمى والصغرى الحلية (أسلوب المشتقة الأولى) ومجالات التزايد والتناقص...

<u>نظرية</u>:

1. إذا كانت $f(\bar{x}) > 0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتزايد على الفترة [a,b]

2. إذا كانت $f(\bar{x}) < 0$ لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتناقص على الفترة [a,b]

* <u>ملاحظة</u>:

إذا غيرت $f(\bar{x})$ إشارتها من موجب إلى سالب عن النقطة (c,f(c)) فإن هذه النقطة هي النقطة العظمى.

أما إذا غيرت $f(\bar{x})$ إشارتها من سالب إلى موجب عن النقطة (c,f(c)) فإن هذه النقطة هي النقطة صغرى محلية.

<u>نظرية</u>:

إذا كانت الدالة f لها قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى) في فترة مفتوحة عند $x = c$ فإن $f(\bar{x}) = 0$

خطوات إيجاد النقاط القصوى ومجالات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى...

أولاً: نوجد المشتقة الأولى $f(\bar{x})$

ثانياً: نوجد أصفار المشتقة الأولى أي أن $f(\bar{x}) = 0$ ولتكن C

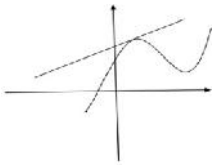
ثالثاً: نختبر إشارة $f(\bar{x})$ على يمين ويسار النقطة $x = c$

رابعاً: نحقق النظرية السابقة

نظرية: إذا كانت $f(\bar{\ }) = 0$ وكانت:

1. $f(\bar{=}) < 0$ فإن f لها قيمة محلية عظمى محلية عند $x = c$
2. $f(\bar{c}) > 0$ فإن f لها قيمة محلية صغرى محلية عند $x = c$
3. تقعر المنحيات ونقاط الانقلاب...

من الشكل المجاور:



1. مقعر لأعلى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر.
2. مقعر لأسفل إذا كانت المشتقة الثانية أصغر من الفترة المعطاه.

تعريف نقاط الإنقلاب: هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي.

وبطريقة أخرى: إذا كانت $f(\bar{\bar{x}})$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس تسمى هذه النقطة نقطة الانقلاب.

خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر...

أولاً: نوجد المشتقة الأولى والثانية

ثانياً: نوجد اصفار المشتقة الثانية ولتكن x=e

ثالثاً: نختبر إشارة $f(\bar{x})$ على يسار ويمين x=e

4. رسم المنحنيات...

يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة.

خطوات رسم المنحنيات...

1. تحديد النقاط القصوى ونع كل منها.
2. تحديد فترات التزايد والتناقص.
3. تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى والأسفل.
4. تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحوريين.
5. تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق...

1. دليل الطالب: $\frac{dp}{dqd}$ =

2. دليل الإنتاج "التكلفة الحدية: $c = f(q) = a + bq + \frac{e}{q} + mp^2$

- دليل الإنتاج $\frac{dc}{dq}$

3. الربح (الفائدة): الربح = الإيراد – التكاليف

$$D(q) = R(q) - C(q)$$

* ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع: $D^1(q) = \frac{dD}{dq} = 0$

أي أن $R^q(q) - C^1(q) = 0$

4. مرونة الطلب: $Ed = \frac{P}{qd} . \frac{dqd}{dp}$

5. الدخل (الإيرادات) الكلي T الناتج عن هذه المبيعات: $T = Px = xg(x)$

الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو: $\frac{dT}{dx}$ عند x = n

6. مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية:

1. مشتقات الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $f(x) = log_e x$ فإن $f(\bar{x}) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

أي أن: $f(x) = \ln x$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{x} dx$$

إذا كانت $f(\bar{x})$ فإن $f(\bar{x}) = \frac{1}{x} \log_a e$

2. مشتقة الدالة الأسية:

إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن $f(\bar{x}) = e^x dx$

3. مشتقات الدوال المثلثية:

1. إذا كانت $f(x) = \sin(x)$ فإن $f(\bar{x}) = \cos(x)\, dx$
2. إذا كانت $f(x) = \cos(x)$ فإن $f(\bar{x}) = -\sin(x)\, dx$
3. مشتقة $f(x) = \cos(x)$ فإن $f(\bar{x}) = \sec^2(x)\, dx$

***

تلخيص جميع قاعدات المحاضرات:

1. $(\overline{\sin x}) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\overline{\cos x}) = -\sin x$
3. $(\overline{\tan x}) = sec^2 x$
4. $(\overline{\cot x}) = -csc^2 x$
5. $(\overline{\sec x}) = \tan x \,.\, \sec x$
6. $(\overline{\csc x}) = -\cot x \,.\, \csc x$

أمجـاد العلآمـدي،