قوانين الفصل الثاني { النهايات والاتصال }

سلوك الدالة :

$$\lim_{\times \to \partial -} f(\times) \neq \lim_{\times \to \partial +} f(\times)$$

فإننا نقول أن :

$\lim_{\times \to \partial} f(\times)$ غيرموجوده

تعريف النهاية اليسرى :

إذا اقتربت الدالة من M عندما يزداد قرب x من a من الجهة اليمنى $\times \neq \partial, \times > \partial$

فإننا نقول أن نهاية الدالة اليمنى عند a هي *M* ونكتب : $\lim_{x \to a} f(x) = m$

نظرية:

تكون النهاية $\lim_{\times \to \partial} f(\times)$ **موجوده وتساوي L وتكتب:** $\lim_{\times \to \partial} f(\times) = L$

إذا وإذا فقط كانت : $\lim_{\times \to \partial -} f(\times) = L = \lim_{\times \to \partial +} f(\times)$

جبر النهايات:

(١ $\lim_{\times \to \partial} C = C$ **حيث C عدد ثابت ، R a€**

(٢ $\lim_{\times \to \partial} X = \partial$

نظرية :

بفرض أن $\lim_{\times \to \partial} f(\times)$ ، $\lim_{\times \to \partial} g(\times)$ **موجودتان فإن :**

(١ $\lim_{\times \to \partial} [c . f(\times)] = c . \lim_{\times \to \partial} f(\times)$

٢) $\lim_{x\to\partial}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to\partial} f(x) \pm \lim_{x\to\partial} g(x)$

٣) $\lim_{x\to\partial}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to\partial} f(x) \cdot \lim_{x\to\partial} g(x)$

٤) $\lim_{x\to\partial} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\partial} f(x)}{\lim_{x\to\partial} g(x)}$ حيث $\lim_{x\to\partial} g(x) \neq 0$

نظرية:

لأي كثيرة حدود ولكل $\partial \in \square$ فإن :

$$\lim_{x\to\partial} f(x) = f(x)$$

نظرية :

إذا كان $\lim_{x\to\partial} f(x) = L$ ، n عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{x\to\partial} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\partial} f(x)} = \sqrt[n]{L} \qquad L > 0$$

نظرية:

إذا كان b عدد ثابتا وكانت $\lim_{x\to\partial} f(x) = L$ موجوده فإن :

$$\lim_{x\to\partial} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to\partial} f(x)} = b^{L}$$

نظرية:

إذا كانت $\lim_{x\to\partial} f(x) = L$ موجوده وموجبة فإن :

$$\lim_{x\to\partial} \log f(x) = \log(\lim_{x\to\partial} f(x)) = \log L$$

ملاحظة <u>مهمة</u>:

إذا كانت الدالة f(x) معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5, x \leq 1 \\ 7x - 2, x > 1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to\partial} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات هي:

١) a تقع ضمن مجال القاعدة الأولى

٢) a تقع ضمن مجال القاعدة الثانية

٣) a تقع على الحد الفاصل بين المجالين

نظرية { ساندويتش }:

إذا كانت : $f(\times) \leq h(\times) \leq g(\times)$ ، وكان $\lim_{\times\to\partial} f(\times) = \lim_{\times\to\partial} g(\times) = L$ فإن :

$$\lim_{\times\to\partial} h(\times) = L$$

نظرية:

$\lim_{\times\to\partial} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ ، حيث e العدد النايبيري

نظرية:

$$\lim_{\times\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نهاية المقادير غير المحدودة عند نقطة:

١) أسلوب التحليل.
٢) أسلوب الضرب في المرافق.
٣) أسلوب اخذ أكبر أس بالنسبة لـ x ثم قسم الدالة كاملة على هذي القيمة.

نظرية:

١) $\lim_{\times\to\infty+} C = C$ ، $\lim_{\times\to\infty-} C = C$ حيث C عدد حقيقي
٢) إذا كان n عدد نسبي موجب وكان c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{\times\to\infty+} \frac{c}{\times^{n}} = 0 \quad , \quad \lim_{\times\to\infty-} \frac{c}{\times^{n}} = 0$$

ملاحظة مهمة:

إذا كان لدينا كثيرتي حدود $F(x)$، $g(x)$ ، وكان $\lim_{\times\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ فإننا نقسم كل من البسط والمقام على x بأكبر قوة

مع ملاحظة:

١/ إذا كانت قوة البسط أكبر من قوة المقام فالنهاية تساوي ∞

٢/ إذا كانت قوة المقام اكبر من قوة البسط فإنها تساوي الصفر

٣/ أما إذا كانت تساوت قوة البسط مع قوة المقام فإن النهاية تساوي قسمة المعاملين للمتغيرين بأكبر قوة

تطبيقات على النهايات:

١/ الفائدة المستمرة!!؟

افرض ان مبلغا من المال*m*قد وضع في بنك بسعر *p=100x*وأن الربح يضاف *n* مر خلال العام الواحد،

لهذا فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام هي:

$$s = m\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

وإذا سمحنا لعدد المرات *n*أن يؤول إلى ما لانهاية، أي أن الفائدة مستمرة فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام:

$$\lim_{n\to\infty} s = m\left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n\right) = me^x$$

ويمثل هذا المقدار$m\ e^x$ قيمة المبلغ*m* بعد سنة من الآن .

وكتعميم لذلك يكون لتصبح قيمة *s* بعد*h* من السنوات يعطى بالعلاقة:

$$m = se^{-nh}$$

الاتصال:

نقول أن الدالة *f(x)* متصلة عند نقطة *c* إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١/ *f(c)* معرفة

٢/ $\lim_{x\to\partial} f(x)$ موجودة

٣/ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي من الشروط السابقة فإن الدالة *f(x)* غير متصلة عند *c*

- **تكون الدالية*f(x)* متصلة في الفترة I إذا كانت متصلة عند جميع النقاط الواقعة في هذه الفترة.**

تمنياتي للجميع بالتوفيق

بنت الجبيل ~