جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع – إدارة أعمال – مستوى ثاني

Management Mathematics

الفصل الثالث / مشتقة مقلوب الدالة وقاعدة السلسلة ومشتقة الدالة الضمنية رقم المحاضرة ١٢

أستاذ المقرر : ثابت عائض القحطاني .

g) مشتقة مقلوب الدالة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$$

* **مثال : إذا كانت** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **أوجد** $f'(x)$

الطريقة الأولى:

$$f'(x) = \frac{-2}{((x)^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

الطريقة الثانية :

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

الطريقة الثالثة :

$$f'(x) = \frac{(0)(x)^2 - (2x)(1)}{((x)^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

قاعدة السلسلة :

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ **فإن :**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

مثال : أوجد المشتقة للدالة $y = (3x^2 + 2x - 4)^3$

نفرض أن الكميه داخل القوس = u

U = $(3x^2 + 2x - 4)$

$y = u^3$

$Y' = 3\,u^2 du$

$= 3(3x^2 + 2x - 4)^2(6x + 2)$

ويمكن إيجاد المشتقة ب طريقة سهله وسريعة ب المثال اللي فوق
نقدر نوجد الحل ب الطريقة التالية :
نشتق القوس وننزل القوه ٣ ضرب القوس ونطرح من قوة القوس ١ ويصير أوس ٢ في مشتقة ما داخل القوس .

$= 3(3x^2 + 2x - 4)^2(6x + 2)$

إذا كانت : $y = 3u^2 + 5u + 2$ وكانت $x = 7u - 2$

فأوجد $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{dx}{du}$ ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

نطبق قاعدة السلسلة

$\frac{dy}{du}$ = 6y + 5

$\frac{dx}{du}$ = 7 $\longrightarrow$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{7}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ = (6y + 5) $(\frac{1}{7})$

$= \frac{6y + 5}{7}$

٤- لاشتقاق الضمني:

أوجد مشتقة الدالة: $x^2 + y^2 = 10$

الحل:

نجري عملية الاشتقاق بالنسبة لـ x:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$

بطريقة أخرى: نستطيع ايجاد المشتقة بإيجاد قيمة y

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$y^2 = -x^2 + 10$$

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 10}$$

نأخذ القيمة الموجبة فقط:

$$y = +\sqrt{-x^2 + 10}$$

نحول الجذر لـ أُس:

$$y = (-x^2 + 10)^{\frac{1}{2}}$$

نقوم الآن باشتقاق الدالة y باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(-x^2 + 10)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

نقوم بإزالة $\frac{1}{2}(-x^2 + 10)^{-\frac{1}{2}}$ للمقام وثم تحويل الأُس لجذر:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{-x^2 + 10}}$$

نقوم بقسمة البسط والمقام على ٢:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{-x^2 + 10}}$$

نلاحظ أن المقام = $\sqrt{-x^2 + 10} = y$

إذن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

مثال: أوجد المشتقة الضمنية للدالة التالية:

$$4x^2 + xy - 3y^2 = 0$$

الحل: نوجد المشتقة بالنسبة لـ x:

$$8x + (1)y + \frac{dy}{dx}(x) - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}x - 6y\frac{dy}{dx} = -8x - y$$

بأخذ العامل المشترك للطرف الأيسر:

$$\frac{dy}{dx}(x - 6y) = -8x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x - y}{(x - 6y)}$$

مثال: أوجد المشتقة الضمنية للدالة التالية:

$$3x^3 - 2xy + 5y^2 = 0$$

الحل: نوجد المشتقة بالنسبة لـ x:

$$9x^2 - \left[2y + \frac{dy}{dx} 2x \right] + 10y \frac{dy}{dx} = 0$$

نظرب الاشارة (-) في ما بداخل القوس:

$$9x^2 - 2y - \frac{dy}{dx} 2x + 10y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\frac{dy}{dx} 2x + 10y \frac{dy}{dx} = -9x^2 + 2y$$

نأخذ العامل المشترك للطرف الأيسر:

$$\frac{dy}{dx}(-2x + 10y) = -9x^2 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9x^2 + 2y}{(-2x + 10y)}$$

مثال: أوجد المشتقة الضمنية للدالة التالية:

$$2x^3 + xy^2 - y = 0$$

الحل: نوجد المشتقة بالنسبة لـ x:

$$6x^2 + (1)y^2 + 2y\frac{dy}{dx}x - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx}x - \frac{dy}{dx} = -6x^2 - y^2$$

نأخذ العامل المشترك للطرف الأيسر:

$$\frac{dy}{dx}(2yx - 1) = -6x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - y^2}{2yx - 1}$$

ملاحظة: إن مشتقة الدالة هي دالة أخرى، لهذا يمكننا أن نشتق مرة أخرى فنحصل على المشتقة الثانية.

واذا قمنا باشتقاق المشتقة الثانية نحصل على المشتقة الثالثه وهكذا.

مثال: أوجد المشتقة الثانية للدالة:

$$f(x) = x^3 - 2x$$

الحل: أولاً نوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

لايجاد المشتقة الثانية نقوم باشتقاق المشتقة الأولى:

$$f''(x) = 6x$$

يمكننا ايضاً ايجاد المشتقة الثالثة باشتقاق المشتقة الثانية:

$$f'''(x) = 6$$

مثال: أوجد المشتقة الثانية للدالة التالية:

$$f(x)=\frac{3x}{x+1}$$

الحل: أولاً نوجد المشتقى الأولى للدالة:

$$f'(x)=\frac{3(x+1)-(1)(3x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x+3-3x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$$

لإيجاد المشتقة الثانية نقوم باشتقاق المشتقة الأولى:

$$f''(x)=\frac{(0)(x+1)^2-[2(x+1)]3}{[(x+1)^2]^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)3}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-6x-6}{(x+1)^4}$$

مثال: إذا كانت

$$f(x)=(x^2+1)(x-1)$$

أوجد $f''(x)$

الحل: لإيجاد المشتقة الثانية نوجد أولاً المشتقة الأولى:

$$f'(x)=2x(x-1)+1(x^2+1)$$

$$f'(x)=2x^2-2x+x^2+1$$

$$f'(x)=3x^2-2x+1$$

نقوم الآن باشتقاق المشتقة الأولى لإيجاد المشتقة الثانية:

$$f''(x)=6x-2$$

تمارين المحاضرة ١٢:

تمرين (١): أوجد المشتقة للدوال التالية:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$

الحل:

$$y' = \frac{1(x-1)-1(x+3)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

b) $y = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 5)$

$$y' = (2x - 3)(x^2 + 5) + 2x(x^2 - 3x + 1)$$

$$y' = 2x^3 + 10x - 3x^2 - 15 + 2x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$y' = 4x^4 - 9x^2 + 12x - 15$$

تمرين (٢): أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت:

$$y = u^3 - 2u$$

$$u = x^2 - 5x + 6$$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 2)(2x - 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6u^2x - 15u^2 - 4x + 10$$

تمرين (٣): إذا كانت:

$$y = f(x) = 3x^2 + 4x$$

أوجد:

a) y' , عندما $x \neq 0$

b) $f'(1)$

c) $\frac{dy}{dx}$, عندما $x = -1$

الحل:

a) $y = f(x) = 3x^2 + 4x$

عندما $x \neq 0$

نقوم باشتقاق الدالة:

$$y' = 6x + 4$$

نعوض قيمة x بصفر

$$y' = 6(0) + 4 = 4$$

b) $y = f(1) = 3x^2 + 4x$

$$f'(1) = 6x + 4$$

$$= 6(1) + 4 = 10$$

c) $\frac{dy}{dx}$, عندما $x = -1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(-1) + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

تمرين (٤): أوجد مشتقة مايلي:

a) $y = \frac{1}{2x+3}$

b) $y = \sqrt[2]{(x^2+2)}$

الحل:

$$y = \frac{1}{2x+3} \quad \text{(a}$$

باستخدام قاعدة اشتقاق مقلوب الدالة:

سالب اشتقاق المقام

المقام تربيع

$$y' = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

يمكننا ايضا الاشتقاق بطريقة اشتقاق الكسور ("اشقاق البسط في المقام" – "اشتقاق المقام في البسط" على "مربع المقام"):

$$y = \frac{1}{2x+3}$$

$$y' = \frac{(0)(2x+3)-2(1)}{(2x+3)^2}$$

$$y' = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

b) $y = \sqrt[2]{(x^2+2)}$

نقوم أولاً بتحويل الجذر إلى أوس:

$$y = (x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

نقوم بالاشتقاق بتطبيق قاعدة السلسلة:

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{-1}{2}}.(2x)$$

$$y' \frac{2x}{2(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$$

تمرين (٥): أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت:

a) $x + y = 5$

b) $x^2 + 3xy = 4$

الحل:

a) $x + y = 5$

$$1 + 1\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4$$

b) $x^2 + 3xy + y^2 = 4$

$$2x + 3y + (1)\frac{dy}{dx}3x + 2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 4 - 2x - 3y$$

نأخذ العامل المشترك للطرف اليسار:

$$\frac{dy}{dx}(3x + 2y) = 4 - 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x - 3y}{(3x + 2y)}$$

تمرين (٦): أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية:

$$f(x)=\frac{3x+7}{2x-9} \quad \text{(a}$$

$$f(x)=\frac{2}{x} \quad \text{(b}$$

الحل:

a) $f(x)=\frac{3x+7}{2x-9}$

لإيجاد المشتقة الثانية نوجد أولاً المشتقة الأولى:

$$f'(x)=\frac{3(2x-9)-2(3x+7)}{(2x-9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x-27-6x-14}{(2x-9)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-41}{(2x-9)^2}$$

نوجد المشتقة الثانية باشتقاق المشتقة الأولى:

$$f''(x)=\frac{(0)(2x-9)^2-[2(2x-9)](-41)}{[(2x-9)^2]^2}$$

$$f''(x)=\frac{-(4x-18)(-41)}{[(2x-9)^2]^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x+18(-41)}{[(2x-9)^2]^2}$$

$$f''(x)=\frac{164x-738}{(2x-9)^4}$$

b) $f(x)=\frac{2}{x}$

نقوم بإيجاد المشتقة الاولى أولاً لإيجاد المشتقة الثانية

$$f'(x)=\frac{(0)x-(1)(2)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}$$

نوجد المشتقة الثانية باشتقاق المشتقة الأولى:

$$f''(x)=\frac{(0)x^2-2x(-2)}{(x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{4x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{4}{x^3}$$