رياضيات الإدارة

جامعة الدمام
UNIVERSITY OF DAMMAM

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع – إدارة أعمال – مستوى ثاني

Management Mathematics

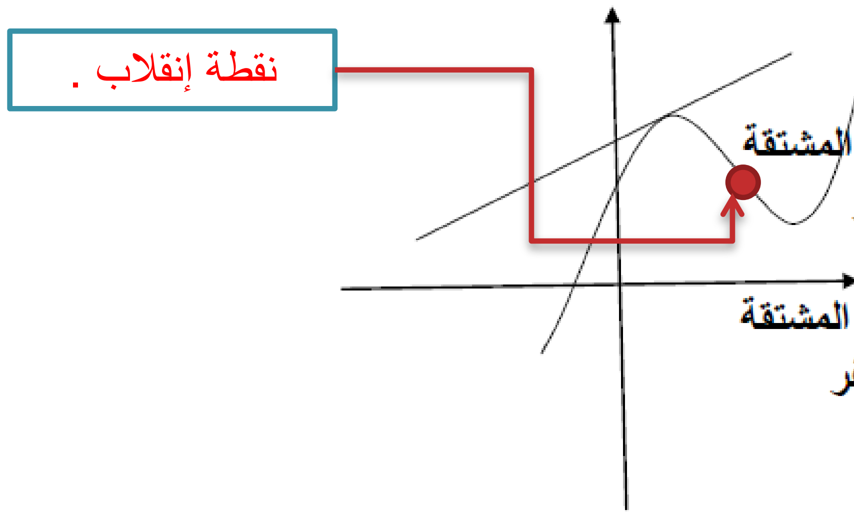
الفصل الثالث / تقعر المنحنيات ونقاط الإنقلاب – رسم المنحنيّات – التطبيقات الإقتصاديّه على الإشتقاق

رقم المحاضرة المسجلة ١٤:

أستاذ المقرر : ثابت عائض القحطاني .

٣) تقعر المنحنيات ونقاط الانقلاب

من الشكل المجاور :



١) مقعرا لأعلى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر

٢) مقعرا لأسفل إذا كانت المشتقة الثانية أصغر من الصفر على الفترة المعطاة

تعريف نقاط الانقلاب :

هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي
وبطريقة أخرى :
إذا كانت $f''(x)$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس تسمى هذه النقطة نقطة الانقلاب

خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر

أولا : نوجد المشتقة الأولى والثانية

ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الثانية ولتكن x=e

ثالثا نختبر إشارة $f''(x)$ على يسار ويمين x=e

مثال : أوجد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر للدالة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 27$

1

الحل :

2

F'(x) $= 6x^2 + 6x - 36$

F''(x) = 12x+ 6

12x+6=0 نوجد الأصفر للمشتقة الثانيه

12x = -6

X= $\frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$ * نختبر الإشارات على خط الأعداد

*نلاحظ أن f''(x) موجبه عندما $x > \frac{-1}{2}$

وسالبه عندما $x < \frac{-1}{2}$

فترات التقعر :

لأعلى ف الفتره من $(\infty, \frac{-1}{2})$

ولأسفل من الفتره $(\frac{-1}{2}, -\infty)$

توجد نقطة الإنقلاب عند x= $\frac{1}{2}$

4) رسم المنحنيات

يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة

خطوات الرسم :

١) تحديد النقاط القصوى ونع كل منها
٢) تحديد فترات التزايد وفترات التناقص
٣) تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى وللأسفل
٤) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين

أرسم الدالة التاليه $f(x) = x^2+3x+2$

تابعوا طريقة الرسم ف الدقيقة 00:10:48 عشان تفهمونها .

2

نوجد نقاط تقاطع المحورين

$f(x) = x^2+3x+2$

تقاطع محور y   x=0

$f(0) = 0 + (0) + 2$

يقطع محوّر y   (0,2)

تقاطع محور x   y=0

$0 = x^2+3x+2$ > بالتحليل

(x+2)(x+1)

X+2=0

$\boxed{X=-2}$

*

X+1=0

$\boxed{X=-1}$

1

$F'(X) = 2X + 3$ *

$2X = -3$

$X = \frac{-3}{2}$

توجد قيمة صغرى محليّه .

فترة التناقص $]-\infty, \frac{-3}{2}[$

فترة تزايد $]\frac{-3}{2}, \infty[$

$F''(x) = 2 > 0$

* التقعر لأعلى

$f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-3}{2}^2 + 3\left(\frac{-3}{2}\right) + 2$

$= \frac{9}{4} + \frac{-9}{2} + 2$

$= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4} = \frac{-1}{4}$

من عدد التقعرات ف المنحنى المرسوم أعرف درجة الدالة بزياده (1) على عدد التقعرات .

التطبيقات الإقتصاديّه على الإشتقاق .

١) دليل الطلب :

تسمى سرعة تغير السعر P بالنسبة إلى كمية الطلب q_d بدليل الطلب أي أن

دليل الطلب = $\frac{dp}{dq_d}$

مثال : يرتبط طلب وحدات من سلعة معينة ما q_d بسعر البيع P بالمعادلة $p^2 + 20q_d - 100 = 0$ حيث تقدر P بالريال و q_d بآلاف الوحدات

أوجد دليل الطلب : دليل الطلب هو المشتقة الأولى للسعر .

الحل :

$p^2 = -20qd + 100$ بأخذ الجذر التربيعي

$p = \pm\sqrt{-20qd + 100}$ نأخذ الموجب لأن السعر دائماً موجب

$\boxed{p = \sqrt{-20qd + 100}}$ * نشتق

$$\frac{dp}{dqd} = \sqrt{-20qd + 100} = (-20qd + 100)^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(-20qd + 100)^{\frac{-1}{2}}(-20)$$

$$F'(x) = \frac{1(-20)}{2(-20qd+100)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-10}{\sqrt{-20qd+100}}$$

تفسير الإشارة السالبه تعني زياده ف الطلب يرافقها نقصان فالسعر .

٢) دليل الإنتاج (التكلفة الحدية)

تجد بعض الشركات أن الكلفة c لإنتاج q وحدات من إحدى السلع هي :

$$\boxed{c = f(q) = a + bq + \frac{e}{q} + mq^2}$$

حيث : $\boxed{a}$ كلفة ثابتة إضافية لا تعتمد على عدد الوحدات المنتجة ، $\boxed{b}$ تكاليف إنتاج وحدة واحدة بالريال

b_q يمثل تكاليف q من الوحدات ، $\boxed{e}$ عدد موجب فإن $\frac{e}{q}$ يتناقص مع تزايد q فيصبح أفضل اقتصاديا ولكن إذا زادت q كثيرا فإن الحد mq^2 المسمى بالكابح يزيد من قيمة التكاليف .

وبصورة عامة إذا كانت c(q) هي كلفة إنتاج q من الوحدات تسمى c دالة التكلفة لهذه السلعة . وإذا كانت f قابلة للاشتقاق كان $\frac{dc}{dq}$ هو سرعة تغير الكلفة بالنسبة للإنتاج وهذا يسمى بدليل الإنتاج .

$\boxed{\text{دليل الانتاج} = \frac{dc}{dq}}$ وتكون الكلفة أقل ما يمكن عندما يكون هذا الدليل يساوي $\boxed{\text{صفر}}$.

مثال : قدرت إحدى الشركات أن التكلفة $c(q)$ لصنع q وحدات هي بالتقريب :

$$c(q) = 100 + \boxed{\frac{10}{q}} + \frac{q^2}{200}$$

فكم وحدة تصنع حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن ؟

الحل :

دالة مقلوبه $\frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

تكون التكلفه أقل مايمكن إذا كانت

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

$$\frac{dc}{dq} = \boxed{\frac{-10}{q^2}} + \frac{2}{200}q = 0$$

$$\frac{dc}{dq} = \frac{-10}{q^2} + \frac{q}{100} = 0$$

بضرب وسطين ب طرفين .

$$\frac{q}{100} = \frac{10}{q^2}$$

بأخذ الجذر التكعيبي

$$q^3 = 1000$$

$$Q = 10$$

٣) الربح (الفائدة)

إذا كانت شركة تنتج q وحدة من السلع فإن الربح والإيراد والتكاليف تعتمد على الكمية المنتجة من هذه السلعة حسب العلاقة التالية :

الربح = الإيراد - التكاليف

$$D(q)=R(q)-C(q)$$

ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع $D'(q)=\frac{dD}{dq}=0$

أي أن $R'(q)-C'(q)=0$

ومنها $R'(q)=C'(q)$

أي يكون الربح أكبر ما يمكن عندما تكون عدد الوحدات q عندما التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي

مثال : جد القيمة العظمى للربح إذا كان الإيراد = $40q - q^2$ والتكلفة = $10 + 5q + \frac{q^2}{4}$

الحل : الربح = الإيراد – التكلفه

$$D(q) = R(q) - C(q)$$

$$D(I) = (40q - q^2) - (10 + 5q + \frac{q^2}{4}$$

$$= 40q - q^2 - 10 - 5q - \frac{q^2}{4}$$

$$D'(q) = 40 - 2q - 5 - \frac{2}{4}q = 0$$

$$= 35 - 2q - 5 - \frac{1}{2}q = 0$$

$$= 35 - \frac{5}{2}q = 0$$

$$35 = \frac{5}{2}q$$

$$Q = \frac{70}{5} = 14$$

أي أن الربح يكون أعلى ما يمكن عندما تكون عدد الوحدات المنتجة = 14

$$D(14) = (40(14) - (14)^2) - (10 + 5(14) + \frac{(14)^2}{4} = 235 \text{ r.s}$$

٤) مرونة الطلب

إذا كانت $y = f(x)$ فإن مرونة هذه الدالة بالنسبة إلى x تساوي $E = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

وبشكل خاص إذا كانت $q_d = f(p)$ دالة الطلب في السعر فإن :

مرونة الطلب هي : $E_d = \frac{p}{q_d} \cdot \frac{dq_d}{dp}$

مثال : إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو $P = 15 - 3q_d$ فأوجد مرونة الطلب عندما $q_d = \frac{1}{3}$

الحل :

$$P = 15 - 3qd$$

$$3qd = 15 - p$$ بالقسمه على ٣

$$Qd = 5 - \frac{1}{3}p$$

$$qd' = -\frac{1}{3}$$

مرونة الطلب = $E_d = \frac{p}{q_d} \cdot \frac{dq_d}{dp}$

$$Ed = \frac{15 - 3qd}{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$= \frac{15 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)}{\cancel{\frac{1}{3}}} \times \left(\frac{-1}{\cancel{3}}\right)$$

$$-15 + 1$$

مرونة الطلب = -14

٥) الدخل الحدي (الإيراد الحدي)

إذا كانت $P = g(x)$ تمثل السعر الذي تباع به كل وحدة من بضاعة ما .
تسمى p دالة الطلب إذا كانت x تمثل عدد الوحدات المباعة ويكون الدخل (الإيراد) الكلي T الناتج عن هذه المبيعات هو :

$$T = Px = xg(x)$$

الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو : $\frac{dT}{dx}$ عند $x = n$

مثال : إذا كان الدخل T الناتج عن بيع x من علب الزيتون معطى بالمعادلة :

$\boxed{T = \frac{x^2}{10} + 10x}$ فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبة وأوجد الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشرة

الحل :

- (دخل كلي)
- ٢٠٠ علبه = x= 200
- $T=\frac{200^2}{10} + 10\,(200) =$ 600 R.s
- العلبة العاشره
- $T=\frac{10^2}{10} + 10\,(10) =$ 110 R.s
- (دخل حدي)
- العلبة العاشره = المشتقة ب النسبه ل x.

$T=\frac{x^2}{10} + 10\,x$

$T'\,(x) = T=\frac{2x}{10} + 10$

$T'\,(x) = T=\frac{x}{5} + 10$

$T'\,(10) = T=\frac{10}{5} + 10$

2+10 = 12

رياضيات الإدارة

أنتهى الشرح ، بالتوفيق جميعاً ،
دعواتكم لنا .

1435 I 2014

Management Mathematics

SARA ALGHANNAM , ABO JORY , RAWAN ALGHAMDI