رياضيات للإدارة

المحاضرة 8 – 11

التكامل وتطبيقاته:

التكامل :التكامل هو العملية العكسية للتفاضل.

إذا كانت تتم عملية التفاضل لأي حد من دوال كثيرات الحدود بان نضرب اس المتغير في معامله ثم نطرح من هذا الاس1

فان التكامل هو العملية العكسية للتفاضل فيتم تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود بان نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم

نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد

القاعدة الاولى:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

تكامل أي حد من دوال كثيرات الحدود نزود اس المتغير بمقدار واحد ثم نقسم معامل الحد على قيمة الاس الجديد + مقدار ثابت

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^9 \, dx = \frac{x^{10}}{10} + c$$

c مقدار ثابت

1) $\int x^2 + 3\,x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \quad c$

2) $\int 2x^4 + x^3\,dx = \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \quad c$

3) $\int 5x^6 + 7x^8\,dx = \frac{5x^7}{7} + \frac{7x^9}{9} + \quad c$

4) $\int x^{-2} + 6x\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{6x^2}{2} + \quad c$

5) $\int 5x^{-5} + 3x^{-3}\,dx = \frac{5x^{-4}}{-4} + \frac{3x^{-2}}{-2} + \quad c$

6) $\int 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-9}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{4x^{-8}}{-8} + \quad c$

$$= \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{-8}}{2} + \quad c$$

القاعدة الثانية: تكامل أي عدد ثابت يساوي هذ العدد مضروب في x

$$\int a\,dx = a\,x + c,$$

1) $\int 6\,dx = 6\,x + c$

2) $\int 3\,dx = 3\,x + c,$

3) $\int \frac{3}{5}\,dx = \frac{3}{5}x + c$

4) $\int -7\,dx = -7\,x + c,$

5) $\int \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x + c$

6) $\int 4\,dx = 4\,x + c,$

7) $\int 11\,dx = 11x + c$

القاعدة الثالثة: تكامل المقدار $(ax+b)^n$ هو نفس المقدار بزيادة الاس بمقدار واحد مقسوما علي الاس الجديد ومقسوما علي معامل المتغير X

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\times a} + c$$

1) $\int (2x+3)^4\,dx = \frac{(2x+3)^5}{5\times 2} + c$

2) $\int (5x-11)^6\,dx = \frac{(5x-11)^7}{7\times 5} + c$

3) $\int (8-6x)^{10}\,dx = \frac{(8-6x)^{11}}{11\times -6} + c$

4) $\int \sqrt{3x-4}\,dx = \int (3x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 3} + c = \frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}} + c$

القاعدة الرابعة: إذا كانت الدالة مضروبة في تفاضلها فان تكاملها هو زيادة الاس بمقدار واحد ونقسم على الاس الجديد

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$1) \int (x^3 + 2x + 6)^5 \cdot (3x^2 + 2)\, dx = \frac{(x^3 + 2x + 6)^6}{6} + c$$

$$2) \int (x^2 + 2x + 10)^{11} \cdot (2x + 2)\, dx = \frac{(x^2 + 2x + 10)^{12}}{12} + c$$

$$3) \int \sqrt{x^2 + 3x + 2} \cdot (2x + 3)\, dx = \int (x^2 + 3x + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3)\, dx = \frac{2(x^2 + 3x + 2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

القاعدة الخامسة: إذا كانت البسط تفاضل المقام فان التكامل في هذه الحالة يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\,[f(x)] + c \qquad 1) \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,[x] + c$$

$$2) \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x\ - 11} dx = ln\,[2x^2 + 3x\ - 11] + c$$

$$3) \int \frac{8x - 2}{4x^2 - 2x\ - 11} dx = ln\,[4x^2 - 2x\ - 11] + c$$

$$4) \int \frac{5x^4 + 6x^2}{x^5 + 2x^3 - 4} dx = ln\,[x^5 + 2x^3 - 4] + c$$

القاعدة السادسة: تفاضل الدالة الاسية لأساس اللوغاريتم الطبيعي = الدالة نفسها على تفاضل الاس

$$\int e^{ax+b}\, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

$$1) \int e^{5x}\, dx = \frac{e^{5x}}{5} + c, \qquad 2) \int e^{3x-2}\, dx = \frac{e^{3x-2}}{3} + c$$

$$3) \int e^{5-6x}\, dx = \frac{e^{5-6x}}{-6} + c, \qquad 4) \int e^{11-\sqrt{7}x}\, dx = \frac{e^{11-\sqrt{7}x}}{-\sqrt{7}} + c$$

$$5) \int e^{8x-1}\, dx = \frac{e^{8x-1}}{8} + c, \qquad 6) \int \frac{1}{e^{2x-5}}\, dx = \int e^{-2x+5}\, dx = \frac{e^{-2x+5}}{-2} + c$$

- **ملاحظة:** **اذا كان المتغير موجود في المقام فيجب رفعه الى البسط بتغير إشارة الاس قبل عملية التكامل**

$$\int \frac{a}{x^n}dx = \int a\,x^{-n}\,dx = \frac{a\,x^{-n+1}}{-n+1} + c$$

1) $\int \frac{3}{x^5}dx = \int 3\,x^{-5}\,dx = \frac{3\,x^{-4}}{-4} + c$ 2) $\int \frac{-5}{x^6}dx = \int -5\,x^{-6}\,dx = \frac{-5\,x^{-5}}{-5} + c$

التكامل المحدود

الحد العلوي b

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

الحد السفلي a

---

1) الحد العلوي 3، الحد السفلي 1

$$\int_1^3 (2x+5)\,dx = \frac{2\,x^2}{2} + 5x\Big|_1^3 = x^2 + 5x\Big|_1^3$$

الحد العلوي 3، الحد السفلي 1

$$= [(3)^2 + 5(3)] - [(1)^2 + 5(1)] = [24] - [6] = 18$$

---

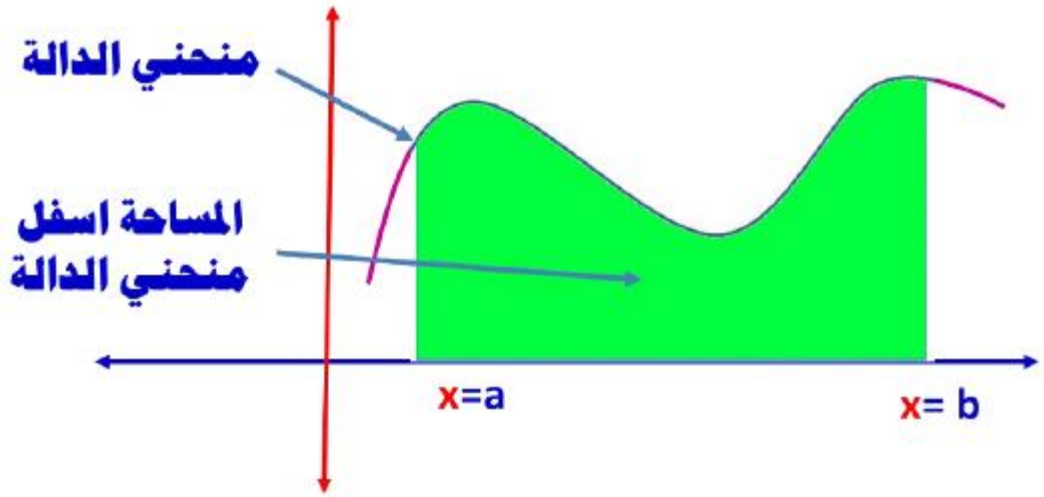
2) $\int_0^2 (x^2+3x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\Big|_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} + \frac{3(2)^2}{2} + 2\right] - \left[\frac{0^3}{3} + \frac{3(0)^2}{2} + 0\right]$

$$= \left[\frac{8}{3} + \frac{12}{2} + 2\right] - [0] = \frac{32}{3}$$

تطبيقات على التكامل

أولا:إيجاد المساحة أسفل منحني الدالة

المساحة تحت منحنى الدالة f(x) ومحور السينات والمحصورة بين المستقيمين a=x و b=x



$$Area = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$$

مثال 1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية $y = 4x^3$ وبين $x=3$, $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــــل

$$Area = \int_2^3 y\,dx = \int_2^3 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4}\Big|_2^3 = x^4|_2^3 = (3)^4 - (2)^4 = 81 - 16 = 65$$

مثال 2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ وبين المستقيمين $x=4$, $x=1$

الحـــــــــــــــــل

$$Area = \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 3x^2 + 2x + 5\,dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x\Big|_1^4$$

$$= x^3 + x^2 + 5x|_1^4 = = [(4)^3 + (4)^2 + 5(4)] - [(1)^3 + (1)^2 + 5(1)]$$

$$= [64 + 16 + 20] - [1 + 1 + 5] = 100 - 7 = 93$$

تمارين

1) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6$ وبين $x=0, x=3$ ؟

2) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = x^3 - 6x + 8$ وبين $x=2, x=3$ ؟

3) أوجد المساحة تحت منحنى الدالة الآتية: $f(x) = x^2 - 7x + 11$ وبين $x=0, x=2$ ؟

ثانيا :تطبيقات تجارية

مثال 1) إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة $C'(x) = 30x^2 + 54x - 30$ علما بان التكاليف الثابتة هي 200؟

الحل

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int 30x^2 + 54x - 30\,dx = \frac{30x^3}{3} + \frac{54x^2}{2} - 30x + c$$

$$C(x) = 10\,x^3 + 27\,x^2 - 30x + c$$

وحيث ان التكاليف الثابتة تساوي 200 فان $c = 200$

$$C(x) = 10\,x^3 + 27\,x^2 - 30x + 200$$

مثال 2) إذا كانت دالة الايراد الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة $R'(x) = 60x^3 + 18x^2 + 36$ علما بان الايراد يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الايراد الكلي؟

الحل

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int 60x^3 + 18x^2 + 36\,dx$$

$$R(x) = \frac{60x^4}{4} + \frac{18x^3}{3} + 36x + c = 15x^4 + 6x^3 + 36x + c$$

وحيث ان الايراد يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة $c = 0$

$$R(x) = 15x^4 + 6x^3 + 36\,x$$

مثال 3) *إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات ممثلة بالعلاقة* $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$ *علما بان الربح يساوي صفر في حالة عدم بيع أي وحدة. فأوجد دالة الربح الكلي؟*

الحل

$$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int 12x^5 + 15x^4 + 24x^3 dx$$

$$P(x) = \frac{12x^6}{6} + \frac{15x^5}{5} + \frac{24x^4}{4} + c = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + c$$

وحيث ان الربح يساوي صفر في عدم بيع أي وحدة $c = 0$

$$P(x) = 2x^6 + 3x^5 + 6x^4$$

المراجعة العامة الاولى(:تم حل تمارين المراجعة الاولى فى الحادية عشر تحت عنوان تمارين متنوعة-)

السؤال الأول :اختر الإجابة الصحيحة

1) النقطة التي احداثياتها (-3 , 2) تقع في الربع .....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

2) النقطة (-1,-5) تقع في الربع .....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

3) النقطة (0 , 2) تقع .....

أ) في الربع الأول ب) علي محور السينات ج) في الربع الثالث د) علي محور الصادات

4) اذا كان (a, b) = (3, 1) فان ... = a + b

أ) 1 ب) 2 جـ) 3 د) 4

5) اذا كان $X \times Y = \{(2 , 6) , (2 , a) , (5 , 6) , (5 ,a), (8,6), (8 ,a)\}$ فان X=.....

أ) {8 , 5 , 2} ب) { 2 , 3 } جـ) {6 , a } د) { 6 , 5}

6) اذا كان n (Y) = 2 , n(X) = 3 فان n (X × y) =.....

أ) 2 ب) 3 جـ) 5 د) 6

7) اذا كانت العلاقة $R = \{(1,2) , (2,3) , (5,2), (4,3)\}$ تمثل دالة فان مداها يساوي

أ) { 2, 3 } ب) {1,2,4,5} ج) {2,3,4,5} د) {3,4,6,7}

8) إذا كانت f (x) = 2 فان ... = 2 × f (3)

أ) 10 ب) 4 ج) 3 د) 2

9) معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويقطع جزءا من محور الصادات السالب طوله 5 وحدات هي

أ) y=-2x+ 5 ب) y=2x- 5 ج) y=5x- 2 د) y=2x+ 2

10) ميل المستقيم المار بالنقطتين (3 , 4) , (2, 3) يساوي .....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

11) الدالة $f(x) = 2x^5 + 5x^2 + 4x - 11$ من الدرجة

أ) الاولي ب) الثانية ج) الثالثة د) الخامسة

12) الدالة f(x)=5 يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة

أ) (5,0) ب) (0,5) ج) (5,5) د) (0 , 0)

13) أودع شخص مبلغ 10000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة بسيطة 10% سنويا لمدة خمس سنوات فان قيمة الفائدة المستحقة في نهاية المدة تساوي .....

أ) 20000 ب) 10000 ج) 15000 د) 5000

14) اقترض شخص مبلغ 1000 ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة ثلاث سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة تساوي

أ) 1259.712 ب) 259.712 ج) 2259.712 د) 459.712

15) جملة مبلغ P بمعدل فائدة مركبة R% سنويا لمدة n من السنوات يساوي

أ) $S = P + (1+R)^n$ ب) $S = P - (1+R)^n$ ج) $S = P \div (1+R)^n$ د) $S = P \times (1+R)^n$

16) المشتقة الاولي للدالة $f(x) = 10$ هي ....

أ) 0 ب) 5 ج) 15 د) 10

17) اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + x + 2$ فان المشتقة الأول لها هي

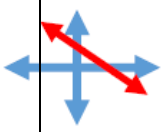
أ) $f'(x) = 2x$ ب) $f'(x) = x^2+1$ ج) $f'(x) = 2x+1$ د) $f'(x) = 2x+2$

18) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 2x + 1$ عندما $x=1$ يساوي .....

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

19) إذا كان $2 \in X$ و $5 \in Y$ فان $\cdots \ldots \ldots \in (5,2)$

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$ ج) X^2 د) Y^2



20) ميل الخط المستقيم المرسوم في الشكل المقابل

أ) موجب ب) سالب ج) صفر د) غير ومعروف

21) إذا كانت الدالة $f(x) = (x-2)(x+2)$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) x^2 ب) $2x$ ج) $2x-4$ د) x

22) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) $\frac{7}{3x+2}$ ب) $\frac{7}{(3x+2)^2}$ ج) $\frac{-7}{(3x+2)^2}$ د) $\frac{7}{(2x-1)^2}$

23) إذا كانت الدالة $f(x) = (2x+7)^5$ فان $f'(x) = \cdots$

أ) $(20x+70)^4$ ب) $10(2x+7)^5$ ج) $5(2x+7)^4$ د) $10(2x+7)^4$

24) إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ فان $f''(x) = \cdots$

أ) $6x^2$ ب) $3x^2+2$ ج) $6x$ د) $6x+2$

25) القيمة العظمي للربح اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $f(x) = -2x^2 + 12x + 3$ هي

أ) 18 ب) 19 ج) 20 د) 21

26) اذا كان سعر السلعة P والكمية المطلوبة من هذه السلعة q فان مرونة الطلب السعرية $E_P = \cdots$

أ) $\frac{P+q'}{q}$ ب) $\frac{P-q'}{q}$ ج) $\frac{P.\,q'}{q}$ د) $\frac{P \div q'}{q}$

27) ميل المماس لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ عند $x=3$ يساوي .....

أ) 6 ب) 12 ج) 18 د) 0

28) اودعت مرام مبلغ 5000 في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 3 سنوات فان جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي .....

أ) 6000 ب) 1298.56 ج) 6298.56 د) 6239.56

29) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{3x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

أ) e^{3x} ب) $\frac{e^{3x}}{3}$ ج) $3e^{3x}$ د) $-3e^{3x}$

30) اذا كانت الدالة $f(x) = ln\,2x$ فان المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = \cdots$

أ) $2x$ ب) $\frac{2}{x}$ ج) $\frac{1}{2x}$ د) $\frac{1}{x}$

31) اذا كانت دالة التكاليف الكلية تعطي بالعلاقة $C(x) = x^2 + 3x + 20$ فان التكاليف الحدية عند x=10 تساوي

أ) 150 ب) 23 ج) 17 د) 50

32) $\int x + 1\, dx$ يساوي .....

أ) $x^2 + c$ ب) $x^2 + x + c$ ج) $\frac{1}{2}x^2 + c$ د) $\frac{1}{2}x^2 + x + c$

33) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{-5x}$ فان المشتقة الثانية للدالة $f''(x) = \cdots$

أ) e^{-5x} ب) $\frac{e^{-5x}}{25}$ ج) $25e^{-5x}$ د) $-25e^{-5x}$

34) اذا كانت دالة الايراد تعطي بالعلاقة $R(x) = x^2 - 5x$ فان الايراد الحدي عند x=100 تساوي

أ) 300 ب) 205 ج) 195 د) 9500

35) $\int x^{-5}\, dx$ يساوي .....

أ) $\frac{x^{-6}}{-6} + c$ ب) $x^{-6} + c$ ج) $x^{-4} + c$ د) $\frac{x^{-4}}{-4} + c$

36) المساحة تحت منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ وبين المستقيمين $x = 0,\ x = 2$ تساوي

أ) 12 ب) 13 ج) 10 د) 8

37) اذا كانت f(x) دالة فان $\int_a^b f(x)\, dx = \cdots$

أ) $F(b) + F(a)$ ب) $F(b) - F(a)$ ج) $F(a) - F(b)$ د) $F(b) \div F(a)$

38) اذا كانت الدالة $f(x) = e^{3x}$ فان المشتقة الاولي للدالة $\int e^{2x}dx = \cdots$

أ) e^{2x} ب) $\frac{e^{2x}}{2}$ ج) $2e^{2x}$ د) $-2e^{2x}$

39) $\int \sqrt{x}\, dx$ يساوي .....

أ) $\frac{x^{0.5}}{0.5} + c$ ب) $\frac{x^{-0.5}}{-0.5} + c$ ج) $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c + c$ د) $\frac{x^2}{2} + c$

40) اذا كانت دالة الربح تعطي بالعلاقة $P(x) = 2x^2 - 10x$ فان الايراد الحدي عند x=10 تساوي

أ) 100 ب) 30 ج) 40 د) 30

41) $\int (2x-1)^6\, dx$ يساوي .....

أ) $\frac{(2x-1)^5}{10} + c$ ب) $\frac{(2x-1)^7}{7} + c$ ج) $\frac{(2x-1)^7}{14} + c$ د) $6(2x-1)^5 + c$

42) $\int (2x^2 + 3x - 1)^7\, (4x + 3)dx$ يساوي .....

أ) $\frac{(2x^2+3x-1)^8}{8} + c$ ب) $(2x^2 + 3x - 1)^8 + c$ ج) $7(2x^2 + 3x - 1)^6$ د) لا شيء مما سبق

43) $\int \frac{1}{e^{3x-5}}dx$ يساوي .....

أ) $\frac{e^{3x-5}}{3} + c$ ب) $\frac{e^{-3x+5}}{-3} + c$ ج) $3.e^{3x-5}$ د) $-3e^{-3x+5} + c$

44) إذا كانت دالة التكاليف الحدية تعطي بالعلاقة $C'(x) = 3x^2 + 2x + 20$ علما بان التكاليف الثابتة تساوي 100 فان دالة التكاليف عند هي $C(x) = \cdots$

أ) $x^3 + x^2 + 20x$ ب) $x^3 + x^2 + 20x + 100$ ج) $6x + 2$ د) $6x + 102$

45) $\int \frac{1}{x} dx$ يساوي .....

أ) $x^2 + c$ ب) $x^{-1} + c$ ج) $x + c$ د) $ln\, x + c$

46) إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطي بالعلاقة $R'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 8$ فان دالة الايراد عند x=1 تساوي...

أ) 26 ب) 16 ج) 10 د) 8

47) إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات هي $p'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 24x^3$ فان دالة الربح...

أ) $2x^6 + 3x^5 + 6x^4$ ب) $60x^4 + 60x^3 + 72x^2$ ج) $5x^4 + 4x^3 + 4x^2$ د) $812x^6 + 15x^5 + 24x^4$

48) اطراد الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 6$ في الفترة $[-2, 1]$ هو .....

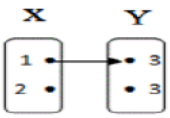
أ) تزايديه ب) تناقصيه ج) ثابتة د) زوجية

49) جملة مبلغ 9000 ريال أودع في أحد البنوك بفائدة مركبة 12% ثلث سنوي لمدة 8 سنوات هو ....

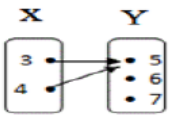
أ) 22283.66 ب) 13283.66 ج) 8640 د) 17640

50) المخطط الذي يمثل دالة فيما يأتي .....

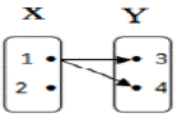
أ)



ب)



ج)



د)