جــــامعة الدمـــــــــام

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الرياضيات للإدارة

MATH 120

دكتور محمد تركي

أستاذ الرياضيات والاحصاء المساعد

الايميل الجامعي

mstorky@uod.edu.sa

نهاية الدوال

أنواع القيم

$\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{عدد حقيقي}}$	$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد حقيقي}}$	$\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{صفر}}$	$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
كمية حقيقة	صفر	كمية غير معروفة	كمية غير معينة

$1)\ f(x) = 2x + 1 \qquad if\ x = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$ ← عدد حقيقي

$2)\ f(x) = \frac{x-1}{3x+2}, \qquad if\ x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{2-1}{3(2)+2} = \frac{1}{6+2} = \frac{1}{8}$ ←

$3)\ f(x) = \frac{2x-6}{x+4}, \qquad if\ x = 3\ , \Rightarrow f(3) = \frac{2(3)-6}{3+4} = \frac{6-6}{7} = \frac{0}{7} = 0$ ←

$4)\ f(x) = \frac{6x-1}{x^2-4}, \qquad if\ x = 2\ , \Rightarrow f(2) = \frac{6(2)-1}{2^2-4} = \frac{12-1}{4-4} = \frac{11}{0}$

كمية غير معرفة (عدد غير حقيقي) – والدالة ليس لها قيمة – أي قيمة الدالة ليس لها وجود عند x=2

$5)\ f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}, \qquad if\ x = 1\ , \Rightarrow f(1) = \frac{1-1}{1^2-2(1)+1} = \frac{0}{0}$

كمية غير معينة – لم يستطيع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة – ولكن هناك قيمة للدالة

القيمة العددية

- $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$: $\frac{3}{5}, \quad 7, \ 9\ , \quad \frac{7}{11}$ → عدد حقيقي
- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$: $\frac{0}{7}, \quad \frac{0}{9}, \quad \frac{0}{11}$ → 0
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$: $\frac{4}{0}, \quad \frac{6}{0}, \quad \frac{5}{0}$ → كمية غير معروفة- لا يوجد قيمة للدالة
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$: $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$ → كمية غير معينة

$$6)\ f(x)=\frac{3x-6}{x^2-4},\qquad if\ x=2\ ,\Rightarrow f(2)\ =\frac{3(2)-6}{2^2-4}=\frac{6-6}{4-4}\ =\frac{0}{0}$$

كمية غير معينة – لم يستطيع التعويض المباشر الحصول على قيمة الدالة – ولكن هناك قيمة للدالة

$x=2\Rightarrow\quad x-2=0$ ***عامل صفري***

$x=1\Rightarrow\ \frac{0}{0}\Rightarrow,\ x-1=0$ ***عامل صفري***

$x=3\Rightarrow\ \frac{0}{0}\Rightarrow,\ x-3=0$ ***عامل صفري***

أي دالة تعوض بقيمة $x=a$ ***يكون الناتج*** $\frac{0}{0}$ ***هناك عامل صفري هو*** $x-a\ =0$

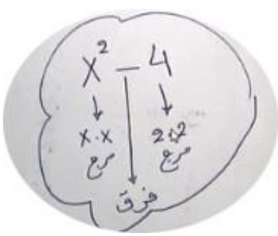
التخلص من العامل الصفرى

الفكرة: اذا تم التعويض بقيمة $x=a$ ***في أي دالة وكان الناتج*** $\frac{0}{0}$ **(كمية غير معينة)**

السبب هو وجود العامل الصفري $x-a=0\quad x=a\Rightarrow$ ***فالدالة لها قيمة لم احصل عليها حتي الان***

الحل هو التخلص من العامل الصفرى: اذا تم التعويض بقيمة ما في الدالة وكان الناتج $\frac{0}{0}$ ***فالتخلص من العامل الصفرى***

أولا: التحليل



مراجعة عامة على التحليل

أولا: تحليل الفرق بين مربعين

$1)\ x^2-4=(x+2)(x-2),$

$2)\ x^2-9=(x+3)(x-3),$

$3)\ x^2-25=(x-5)(x+5),$

$4)\ x^2-16=(x-4)(x+4),$

$5)\ x^2-1=(x-1)(x+1),$

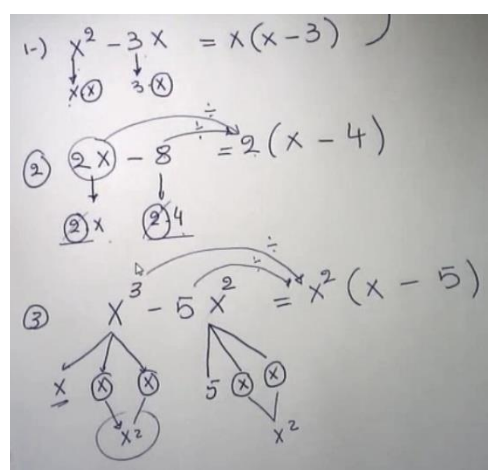
$4)\ x^2-49=(x-7)(x+7),$

ثانيا: التحليل بإخراج العامل المشترك

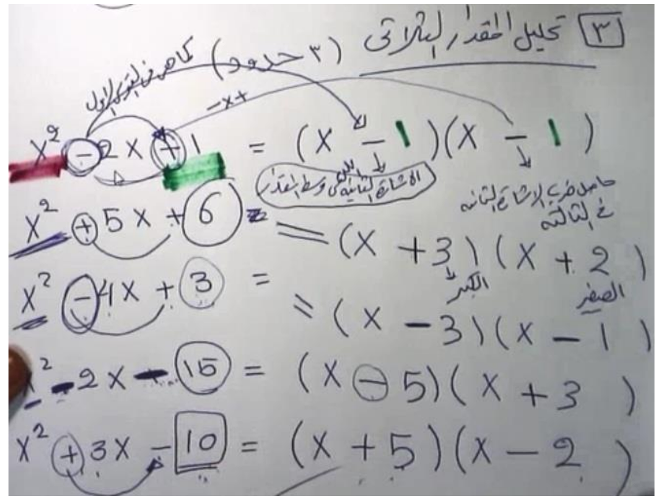
$1)\ x^2-3x=x(x-3),$

$2)\ 2x-8=2(x-4),$

$3)\ x^3-5x^2=x^2(x-5),$



ثالثا: تحليل المقدار الثلاثي (مكون من ثلاثة حدود)



1) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$,

2) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$,

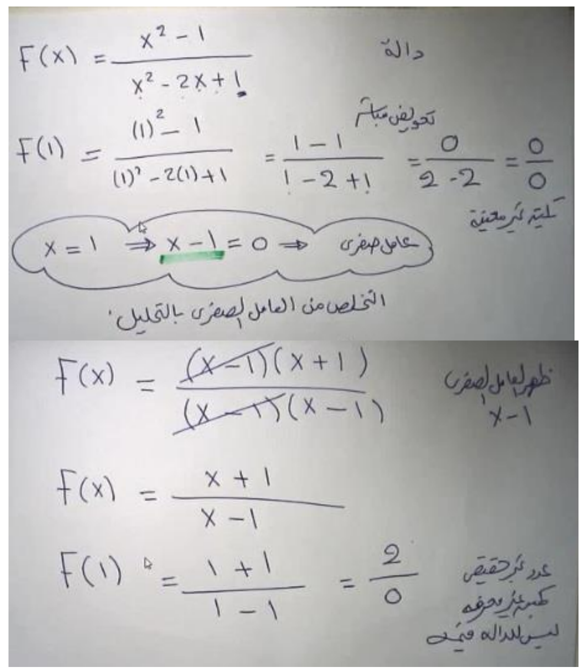
4) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$,

5) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$,

....

....

مثال:



1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

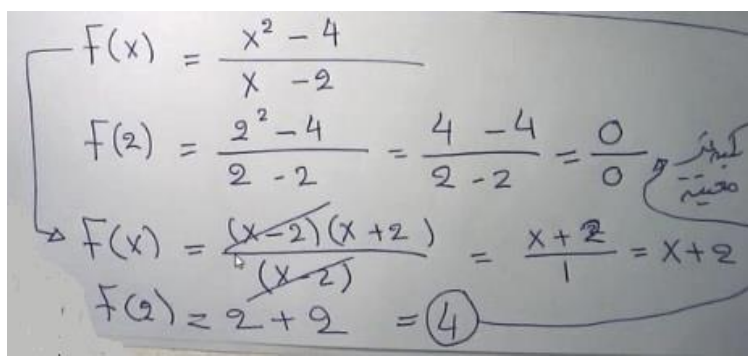
$$f(x) = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{1 - 1}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$x = 1, \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \Rightarrow$ ***العامل الصفري***

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{(x + 1)}{(x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{(1 + 1)}{(1 - 1)} = \frac{2}{0}$$



2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$f(2) = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \frac{x + 2}{1} = x + 2$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

....

النهايات

نهاية الدالة عند نقطة

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

تؤول أي تقترب

1) $\lim\limits_{x\to 2} 2x+3 = \lim\limits_{x\to 2} 2x+3 = 2(2)+3 = 7$

2) $\lim\limits_{x\to 1} 5-4x = f(1) = 5-4(1) = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{5x-4} = f(3) = \dfrac{3+1}{5(3)-4} = \dfrac{4}{11}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{3x-1} = f(2) = \dfrac{2-2}{3(2)-1} = \dfrac{0}{5} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x+5}{2x-8} = f(4) = \dfrac{3(4)+5}{2(4)-8} = \dfrac{17}{0}$ في هذه الحالة ليس للدالة نهاية

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = f(3) = \dfrac{3-3}{(3)^2-9} = \dfrac{3-3}{9-9} = \dfrac{0}{0}$ كمية غير معينة

$x \to 3$ عامل صفري $x-3 \to 0$

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \qquad \Rightarrow \qquad f(3) = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

---

7) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{3x+15} = f(-5) = \dfrac{(-5)^2-25}{3(-5)+15} = \dfrac{25-25}{-15+15} = \dfrac{0}{0}$

$x \to -5$ عامل صفري $x+5 \to 0$

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{3(x+5)} = \frac{(x-5)}{3} \qquad \Rightarrow \qquad f(-5) = \frac{-5-5}{3} = \frac{-10}{3}$$

---

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \dfrac{2^2-5(2)+6}{2^2-4} = \dfrac{4-10+6}{4-4} = \dfrac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-3)}{(x+2)} \qquad \Rightarrow \qquad f(2) = \frac{2-3}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

في حالة ان يكن ناتج التعويض (صفر علي صفر) فإننا يمكن استخدام قاعدة لوبيتال

والتي تنص على انه في حالة كان ناتج التعويض (صفر علي صفر) يمكن إيجاد مشتقة البسط ثم إيجاد مشتقة المقام ثم التعويض مرة اخري

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x}=f(2)=\frac{2(2)-5}{2(2)}=\frac{4-5}{4}=\frac{-1}{4}$$

خطوات إيجاد النهاية

*تعويض مباشر $\leftarrow \frac{0}{0}$ * تحليل واختصار   * تعويض مرة ثانية $\leftarrow$ نحصل على النهاية

خواص النهايات

1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

سؤال:

١) إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=5$ و $\lim_{x\to a}g(x)=3$ فان $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]=$ ... ...

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=5+3=8$$

---

2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$

سؤال:

٢) إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=7$ و $\lim_{x\to a}g(x)=4$ فان $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=$ ... ...

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=7-4=2$$

---

3) $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$

سؤال:

3) إذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=4$ و $\lim_{x\to a}g(x)=5$ فان $\lim_{x\to 2}[f(x)\times g(x)]=$ ... ...

$$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=4\times 5=20$$

---

4) $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\div\lim_{x\to a}g(x)$

سؤال:

4) إذا كانت $lim_{x\to a} f(x) = 18$ و $lim_{x\to a} g(x) = 6$ فأن $lim_{x\to a}[f(x) \div g(x)] =$ ... ...

$$\lim_{x\to a}[f(x) \div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = 18 \div 6 = 3$$

إيجاد النهاية باستخدام القانون

إيجاد النهاية باستخدام القانون

$$\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} \times a^{m-n}$$

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8} = \lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^3 - 2^3} = \frac{5}{3} \times 2^{5-3} = \frac{5}{3} \times 4 = \frac{20}{3}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 15}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x^2 - 2^2} = \frac{4}{2} \times 2^{4-2} = \frac{4}{2} \times 4 = 8$

3) $\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 27} = \lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3^4}{x^3 - 3^3} = \frac{4}{3} \times 3^{4-3} = \frac{4}{3} \times 3^1 = 4$

4) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} = \lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 5^3}{x^2 - 5^2} = \frac{3}{2} \times 5^{3-2} = \frac{3}{2} \times 5^1 = \frac{15}{2}$

5) $\lim_{x\to -1} \frac{x^8 - 1}{x^5 + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^8 - (-1)^8}{x^5 - (-1)^5} = \frac{8}{5} \times (-1)^{8-5} = \frac{8}{5} \times (-1)^3 = -\frac{8}{5}$

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

$\frac{\infty}{\infty},$ كمية غير معينة

$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty, \quad \frac{\infty}{6} = \infty, \quad \frac{\infty}{24} = \infty$ – – – – – – – $\infty \pm \text{عدد} = \infty, \quad \infty + 6 = \infty, \infty - 5 = \infty$

$\infty \times \text{عدد} = \infty, \quad \infty \times 7 = \infty, \quad \infty \times 5 = \infty,$ – – – – – – – $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0, \quad \frac{5}{\infty} = 0, \quad \frac{11}{\infty} = 0$

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{4 - 2x + 3x^2} = \frac{2(\infty)^2 + 3(\infty) - 5}{4 - 2(\infty) + 3(\infty)^2} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم البسط والمقام على x بأكبر اس فى المقام

$$2)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}+4} == \frac{2+\frac{3}{\infty}-\frac{5}{(\infty)^2}}{\frac{4}{(\infty)^2}-\frac{2}{\infty}+4} = \frac{2+0-0}{0-0+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+4\,x^2+8}{6\,x^3+14} = \frac{5(\infty)^3+4(\infty)^2-5}{6(\infty)^3+14} \quad = \frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على x بأكبر اس في المقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}+\frac{14}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{6+\frac{14}{x^3}} == \frac{5+\frac{4}{\infty}+\frac{8}{(\infty)^3}}{6+\frac{14}{(\infty)^3}} = \frac{5+0+0}{6+0} = \frac{5}{6}$$

اوجد نهاية الدوال الاتية

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{3x-3}$

2) $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-36}{2x-12}$

3) $\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{x^5-32}{x^3-8}$

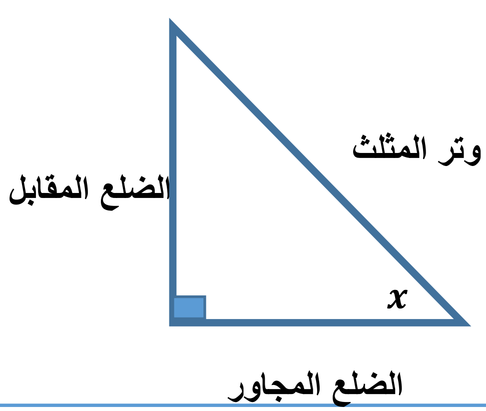
5) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+2\,x^2+1}{3\,x^3-5}$

6) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-7}{3-8x+4x^2} =$

7) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$

8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x-3}$

الدوال المثلثية



المثلث القائم

هو المثلث الذي يحتوي على زاوية قائمة

الوتر: هو الضلع المقابل للزاوية القائمة

الدوال المثلثية الأساسية:

١) دالة جيب الزاوية (جا) (sin)

٢) دالة جيب تمام الزاوية (جتا) (cos)

$$\sin x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos x = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$

٣) دالة ظل الزاوية (ظا) (tan)

$$\tan x = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المقابل}}$$

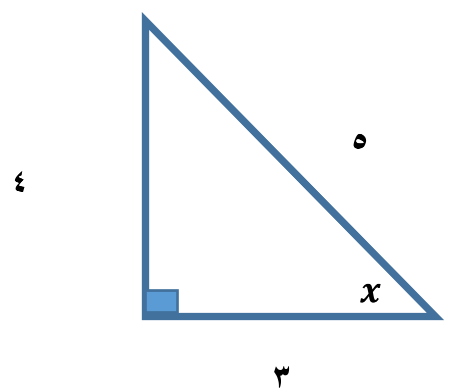
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

مثال في الشكل المقابل

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{4}{3}$$



سؤال: إذا كانت $\sin x = 0.2$ و $\cos x = 0.5$ *فإن:*

1) $\tan x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) ٠.٢ ب) ٠.٥ ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

2) $\cot x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) ٠.٢ ب) ٠.٥ ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{2}{5}$]

مقلوبات الدوال المثلثية

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

سؤال: إذا كانت $\sin x = 0.3$ و $\cos x = 0.7$ *فإن:*

1) $\tan x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) ٠.٣ ب) ٠.٧ ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$]

2) $\cot x = \cdots\ldots\ldots$ [أ) 0.3 ب) 0.7 ج) $\frac{7}{3}$ د) $\frac{3}{7}$]

3) $csc\, x = \cdots \ldots \ldots ..$] أ) ٠.٣   ب) ٠.٥   ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$ [

4) $sec\, x = \cdots \ldots \ldots ..$] أ) ٠.٣   ب) ٠.٥   ج) $\frac{10}{7}$ د) $\frac{10}{3}$ [

نهاية الدوال المثلثية

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ a\,x}{x}\right)=a,\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{bx}\right)=\frac{1}{b},\quad 4)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{bx}\right)=\frac{a}{b}$$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan\ a\,x}{x}\right)=a,\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{bx}\right)=\frac{1}{b},\quad 4)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{bx}\right)=\frac{a}{b}$$

تمارين

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 3\,x}{x}\right)=3$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ \ x}{2\,x}\right)=\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 7\,x}{2x}\right)=\frac{7}{2}$

4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ \ x}{-3\,x}\right)=\frac{1}{-3}$

5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 2\,x}{5x}\right)=\frac{2}{5}$

6) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ \ 2x}{11\,x}\right)=\frac{2}{11}$

بقسمة حدود البسط والمقام على x

7) $\lim_{x\to 0}\frac{3x\ +\ \sin\ 2\,x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{\sin\ 2\,x}{x}}{\frac{7x}{x}}=\frac{3\ +\ 2}{7}=\frac{5}{7}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{6x-\ \tan\ 2\,x}{\sin 5x\ \ +4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{x}-\frac{\tan\ 2\,x}{x}}{\frac{\sin\ 5\,x}{x}+\frac{4x}{x}}=\frac{6-\ 2}{5+4}=\frac{4}{9}$

تمارين

1) $lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\ 2\,x}{3x}\right)=\cdots$] أ) 2   ب) 3   ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{2}{3}$ [

2) $lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{7x}=\cdots$] أ) ١   ب) ٧   ج) $\frac{1}{7}$ د) $\frac{2}{7}$ [

3) $lim_{x\to 0}\frac{\tan\ 3x}{5x}=\cdots$] أ) $\frac{3}{5}$ ب) 5   ج) ٣   د) $\frac{5}{3}$ [

4) $lim_{x\to 0}\frac{\tan\ 2x}{\sin\ 3x}=\cdots$] أ) $\frac{3}{2}$ ب) ٢   ج) ٣   د) $\frac{2}{3}$ [

5) $lim_{x\to 0}\frac{3x-\tan\ 2\,x}{\sin\ 3x+2x}=$] أ) $\frac{1}{5}$ ب) 5   ج) ٣   د) 1 [

…

تفاضل الدوال المثلثية

$$1)\ y = \sin ax \quad \Rightarrow \quad y' = a.\cos ax$$

$1)\ y = \sin 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3.\cos 3x$ $\qquad 2)\ y = \sin \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}.\cos \frac{1}{2}x$

$3)\ y = \sin 7x \quad \Rightarrow \quad y' = 7.\cos 7x$ $\qquad 4)\ y = \sin(-3x) \quad \Rightarrow \quad y' = -3.\cos(-3x)$

سؤال

١) اذا كانت $y = \sin 4x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $\cos 4x$ ب) $4\sin 4x$ ج) $4\cos 4x$ د) $4 + \cos 4x$

$$2)\ y = \cos ax \quad \Rightarrow \quad y' = -a.\sin ax$$

$1)\ y = \cos 5x \quad \Rightarrow \quad y' = -5.\sin 5x$ $\qquad 2)\ y = \cos 2x \quad \Rightarrow \quad y' = -2.\sin 2x$

$3)\ y = \cos 6x \quad \Rightarrow \quad y' = -6.\sin 6x$ $\qquad 4)\ y = \cos(-4x) \quad \Rightarrow \quad y' = 4.\sin(-4x)$

سؤال

١) اذا كانت $y = \cos 5x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $\sin 5x$ ب) $-5\sin 5x$ ج) $5\sin 5x$ د) $5\sin 5x$

$$3)\ y = \tan ax \quad \Rightarrow \quad y' = a.\sec^2 ax$$

$1)\ y = \tan 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3.\sec^2 3x$ $\qquad 2)\ y = \tan \sqrt{5}x \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{5}.\sec^2 \sqrt{5}x$

$3)\ y = \tan 9x \quad \Rightarrow \quad y' = 9.\sec^2 9x$ $\qquad 4)\ y = \tan 7x \quad \Rightarrow \quad y' = 7.\sec^2 7x$

سؤال

١) اذا كانت $y = \tan 2x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $\sec^2 2x$ ب) $-\sec^2 2x$ ج) $2\sec^2 2x$ د) $-2\sec^2 2x$

$$3)\ y = \cot ax \quad \Rightarrow \quad y' = -a.\csc^2 ax$$

$1)\ y = \cot 2x \quad \Rightarrow \quad y' = -2.\csc^2 2x$ $\qquad 2)\ y = \cot 7x \quad \Rightarrow \quad y' = -7.\csc^2 7x$

$3)\ y = \cot 6x \quad \Rightarrow \quad y' = -6.\csc^2 6x$ $\qquad 4)\ y = \tan 7x \quad \Rightarrow \quad y' = 7.\sec^2 7x$

سؤال

١) اذا كانت $y = \tan 3x$ فان: $y' = \cdots$

٢) اذا كانت $y = \cot 5x$ فان: $y' = \cdots$

تكامل الدوال المثلثية

$$\int \sin ax\,dx = \frac{-\cos ax}{a} + c$$

1) $\int \sin 2x\,dx = \frac{-\cos 2x}{2} + c$

2) $\int \sin 7x\,dx = \frac{-\cos 7x}{7} + c$

3) $\int \sin 3x\,dx = \frac{-\cos 3x}{3} + c$

4) $\int \sin 9x\,dx = \frac{-\cos 9x}{9} + c$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

1) $\int \cos 4x\,dx = \frac{\sin 4x}{4} + c$

2) $\int \cos \frac{1}{4}x\,dx = \frac{\sin \frac{1}{4}x}{\frac{1}{4}} + c = 4\sin \frac{1}{4}x + c$

3) $\int \cos 5x\,dx = \frac{\sin 5x}{5} + c$

4) $\int \cos 6x\,dx = \frac{\sin 6x}{6} + c$

$$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + c$$

1) $\int \sec^2 3x\,dx = \frac{\tan 3x}{3} + c$

2) $\int \sec^2 5x\,dx = \frac{\tan 5x}{5} + c$

3) $\int \sec^2 7x\,dx = \frac{\tan 7x}{7} + c$

4) $\int \sec^2 9x\,dx = \frac{\tan 9x}{9} + c$

$$\int \csc^2 ax\,dx = \frac{-\cot ax}{a} + c$$

1) $\int \csc^2 8x\,dx = \frac{-\cot 8x}{8} + c$

2) $\int \csc^2 3x\,dx = \frac{-\cot 3x}{3} + c$

3) $\int \csc^2 7x\,dx = \frac{-\cot 7x}{7} + c$

4) $\int \csc^2 4x\,dx = \frac{-\cot 4x}{4} + c$

تمارين: ١) اذا كانت $y = \sin 5x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $5\cos 5x$ ب) $-5\cos 5x$ ج) $\frac{\cos 5x}{5}$ د) $-\frac{\cos 5x}{5}$

٢) $\int \sin 3x\,dx = \cdots$

أ) $3cos3x$ ب) $-3cos3x$ ج) $\frac{cos\,3x}{3}$ د) $-\frac{cos\,3x}{3}$

٣) اذا كانت $y = sin\,2x + cos\,3x$ فان: $y' = \cdots$

أ) $cos\,2x + sin\,3x$ ب) $\frac{cos\,2x}{2} + \frac{sin\,3x}{3}$

ج) $2\,cos\,2x - 3sin\,3x$ د) $-2\,cos\,2x + 3sin\,3x$

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

يكون للدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة نهاية إذا كانت: <u>النهاية اليمنى = النهاية اليسرى</u>

الدالة المعرفة قاعدتين علي يمين ويسار نقطة معينة ليس لها نهاية عندها إذا كانت: <u>النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى</u>

مثال١) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 2 \\ 5x - 4\,, & x > 2 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{x\to 2} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــل

$f(x) = x^2 - 2$ $\quad$ $f(x) = 5x - 4$

$x < 2$ $\quad$ 2 $\quad$ $x > 2$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(2^+) = \lim_{x\to 2^+} 5x - 4 = 5(2) - 4 = 10 - 4 = 6$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(2^-) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 2 = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: <u>الدالة ليس لها نهاية عند</u> $x \to 2$

مثال2) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + 1, & x < 3 \\ \frac{5-x}{2}\,, & x > 3 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــل

$f(x) = \frac{3}{x} + 1$ $\quad$ $f(x) = \frac{5-x}{2}$

$x < 3$ $\quad$ 3 $\quad$ $x > 3$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{5-x}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x} + 1 = \frac{3}{3} + 1 = 1 + 1 = 2$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: <u>الدالة ليس لها نهاية عند</u> $x \to 3$

مثال٣) اذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x>1\\ 5-x, & x<1\end{cases}$ فابحث وجود: $\lim_{x\to1} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــــل

$f(x)=5-x$ $f(x)=3x+1$

$x<1$ 1 $x>1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^{+})=\lim_{x\to1^{+}} 3x+1=3(1)+1=3+1=4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^{-})=\lim_{x\to1^{-}} 5-x=5-1=4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←← وبالتالي: نهاية الدالة =٤ $x\to1$

مثال٣) اذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x>1\\ 5-x, & x<1\end{cases}$ فابحث وجود: $\lim_{x\to1} f(x)$ ؟

الحـــــــــــــــــل

$f(x)=5-x$ $f(x)=3x+1$

$x<1$ 1 $x>1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^{+})=\lim_{x\to1^{+}} 3x+1=3(1)+1=3+1=4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^{-})=\lim_{x\to1^{-}} 5-x=5-1=4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←← وبالتالي: نهاية الدالة =4 $x\to1$

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}x^3+3, & x>1\\ 5x-1, & x<1\end{cases}$ فان: $\lim_{x\to1} f(x)=\cdots$

أ) 3   ب) 4   ج) 5   د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــــل

$f(x)=5x-1$ $f(x)=x^3+3$

$x<1$ 1 $x>1$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(1^{+})=\lim_{x\to1^{+}} x^3+3=(1)^3+3=1+3=4$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(1^{-})=\lim_{x\to1^{-}} 5x-1=5(1)-1=5-1=4$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ←← وبالتالي: نهاية الدالة =٤ $x\to1$

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x>0\\ 2\cos 3x, & x<0\end{cases}$ فان: $\lim_{x\to0} f(x)=\cdots$

أ) 2   ب) 3   ج) -2   د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــــــل

$f(x) = 2\cos 3x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$

$x < 0$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $x > 0$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(0^-) = \lim_{x\to 1^-} 2\cos 3x = 2\cos 3(0) = 2(1) = 2$

النهاية اليمني = النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: نهاية الدالة =2 $x \to 0$

سؤال) إذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 3x}{x}, & x > 0 \\ \cos 3x, & x < 0 \end{cases}$ فان: $\lim_{x\to 0} f(x) = \cdots$

أ) 3 $\qquad$ ب) 2 $\qquad$ ج) 9 $\qquad$ د) ليس لها نهاية

الحـــــــــــــــــــل

$f(x) = \cos 3x$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \dfrac{\tan 3x}{x}$

$x < 0$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $x > 0$

أولا: إيجاد النهاية اليمني: $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan 3x}{x} = 3$

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى: $f(0^-) = \lim_{x\to 1^-} \cos 3x = \cos 3(0) = 1$

النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى ⟵⟵ وبالتالي: ليس للدالة نهاية $x \to 0$

تمارين :

1) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8, & x > 1 \\ 2x + 9, & x < 1 \end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 1} f(x)?$

2) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x > 3 \\ x^2 + 3, & x < 3 \end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 3} f(x)?$

3) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 1} f(x)?$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x > 2 \\ x^2 + 7, & x < 2 \end{cases}$ $\quad find \lim_{x\to 2} f(x)?$

اتصال الدالة عند نقطة

اتصال الدالة عند نقطة $x = a$

١) الدالة معرفة عن $x = a$ أي قيمة الدالة $f(a)$ موجودة $\qquad$ ٢) نهاية الدالة موجودة عند $x \to a$

٣) قيمة الدالة = نهاية الدالة

مثال ١) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ 11, & x = 2 \end{cases}$ عند $x = 2$ ؟

الحـــــــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2) = 11$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{3x^2}{1} = 3(2)^2 = 3\times4 = 12$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة ≠ نهاية الدالة ∴الدالة غير متصلة عند $x = 2$

مثال ٢) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq2\\ 1, & x=2\end{cases}$ عند $x = 2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2) = 1$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{2x-1}{1} = \frac{2(1)-1}{1} = 2-1 = 1$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x = 2$

مثال ٣) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, & x\neq3\\ 6, & x=3\end{cases}$ عند $x = 3$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(3) = 6$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{2x}{1} = \frac{2(3)}{1} = 6$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x = 2$

مثال ٤) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1}, & x\neq1\\ k, & x=1\end{cases}$ متصلة عند $x = 1$ فان: $k = \cdots$

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(1) = k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة $k = \frac{1}{2}$

مثال ٥) اذا كانت الدالة $f(x) = \begin{cases}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}, & x\neq2\\ k, & x=2\end{cases}$ متصلة عند $x = 2$ فان: $k = \cdots$

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2) = k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2}\frac{2x}{2x-3} = \frac{2(2)}{2(2)-3} = \frac{4}{1} = 4$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة $k = 4$

مثال ٦) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x\neq0\\ 3, & x=0\end{cases}$ عند $x = 0$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(0)=3$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=3$

ثالثا: بحث اتصال الدالة: قيمة الدالة = نهاية الدالة ∴الدالة متصلة عند $x=0$

مثال ٧) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq2\\ 4, & x=2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(2)=4$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x}{1}=2(2)=4$

ثالثا: بحث الاتصال قيمة الدالة = نهاية الدالة =٤ ∴الدالة متصلة عند $x=2$

مثال ٨) إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-27}{x^2-9}, & x\neq3\\ k, & x=3\end{cases}$ متصلة عند $x=3$ فأوجد قيمة k؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة: من تعريف الدالة $f(3)=k$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3(3)^2}{2(3)}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

ثالثا: الدالة متصلة قيمة الدالة = نهاية الدالة = $\frac{9}{2}$ ∴ $k=\frac{9}{2}$

اتصال الدالة المعرفة بقاعدتين

تكون الدالة المعرفة بقاعدتين متصلة عند نقطة $x=a$ اذا كان:

قيمة الدالة $f(a)$ = النهاية اليمني $f(a^+)$ = النهاية اليسرى $f(a^-)$

مثال ١) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geq2\\ 4x-3, & x<2\end{cases}$ عند $x=2$ ؟

الحـــــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x=2$	ثانيا: إيجاد النهاية اليمني	ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى
$f(2)=2^2+2=4+2=6$	$f(2^+)=\lim_{x\to2^+}x^2+2$ $=2^2+2=4+2=6$	$f(2^-)=\lim_{x\to2^-}4x-3$ $=4(2)-3=8-3=5$

قيمة الدالة = النهاية اليمني ≠ النهاية اليسرى لذلك الدالة غير متصلة عند $x=2$

مثال ٢) ابحث اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>1\\ x+1, & x\leq1\end{cases}$ عند $x=1$ ؟

الحـــــــــــــــل

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى	ثانيا: إيجاد النهاية اليمنى	أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 1$
$f(1^-) = \lim_{x\to1^-} x+1$ $= 1+1 = 2$	$f(1^+) = \lim_{x\to1^+} 3x-1$ $= 3(1)-1 = 3-1 = 2$	$f(1) = 1+1 = 2$

قيمة الدالة = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى =٢ لذلك الدالة متصلة عند $x = 1$

مثال ٣) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 5-2x, & x \geq 2 \\ x-3, & x < 2 \end{cases}$ **عند** $x = 2$ ؟

الحـــــــــــــل

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى	ثانيا: إيجاد النهاية اليمنى	أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 2$
$f(2^-) = \lim_{x\to2^-} x-3$ $= 2-3 = -1$	$f(2^+) = \lim_{x\to2^+} 5-2x$ $= 5-2(2) = 5-4 = 1$	$f(2) = 5-2(2) = 5-4 = 1$

قيمة الدالة = النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى لذلك الدالة غير متصلة عند $x = 2$

....

مثال ٤) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x^2-5, & x \geq 2 \\ 2x+3, & x < 2 \end{cases}$ **عند** $x = 2$ ؟

الحـــــــــــــل

ثانيا: إيجاد النهاية اليسرى	ثانيا: إيجاد النهاية اليمنى	أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 2$
$f(2^-) = \lim_{x\to2^-} 2x+3$ $= 2(2)+3 = 7$	$f(2^+) = \lim_{x\to2^+} 3x^2-5$ $= (2)^2-5 = 12-5 = 7$	$f(2) = 3(2)^2-5 = 12-5$ $= 7$

قيمة الدالة = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى =٧ لذلك الدالة متصلة عند $x = 2$

....

مثال ٥) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{3x}, & x \neq 0 \\ 5\cos 3x, & x = 0 \end{cases}$ **عند** $x = 0$ ؟

الحـــــــــــــل

أولا: إيجاد قيمة الدالة عند $x = 0$ $f(0) = 5\cos 3(0) = 5 \times 1 = 5$

ثانيا: إيجاد نهاية الدالة عند $x \to 0$ $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$

قيمة الدالة ≠نهاية الدالة لذلك الدالة متصلة عند $x = 0$

....

فترات التزايد والتناقص للدالة

الخطوات:

١) إيجاد المشتقة الاولي للدالة ٢) مساواة المشتقة الاولي بالصفر وحل المعادلة وايجاد قيم x الحرجة

٣) نضع قيم x علي خط الاعداد وتقسيمه فترات ٤) من كل فترة نأخذ قيمة اختيارية لـ x ونعوض في المشتقة الاولي

٥) إذا كانت قيم المشتقة موجبة كانت الدالة تزايديه في الفترة وإذا كانت قيمة المشتقة سالبة كانت الدالة تناقصية في الفترة

....

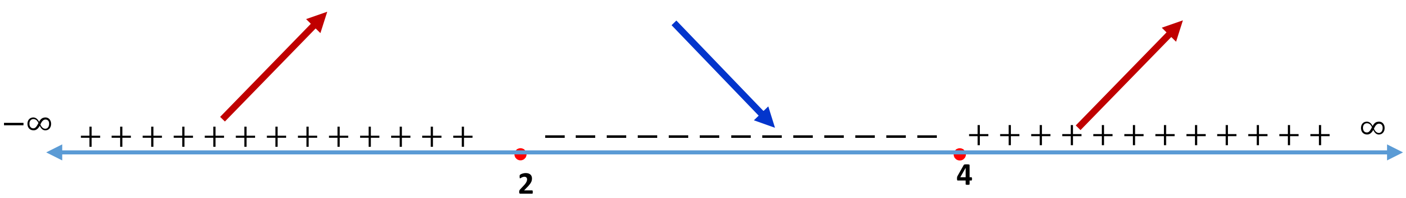
مثال ١) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ ؟

الحـــــــــــــــل

١) إيجاد المشتقة الاولي للدالة $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ ٢) ثم مساواة المشتقة بالصف

$3x^2 - 18x + 24 = 0$ ويمكن حل المعادلة باستخدام الالة فنحصل علي

$x = 2,\qquad x = 4$



٢) تحديد الفترات

1) $]-\infty, 2[,\quad x = 0$ $f'(0) = 3(0)^2 - 18(0) + 24$ $= 0 - 0 + 24 = +24$ الدالة تزايديه في الفترة $]-\infty, 2[$	2) $]2,4[,\quad x = 3$ $f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24$ $= 27 - 54 + 24 = -3$ الدالة تناقصية في الفترة $]2,4[$	3) $]4, \infty[,\quad x = 5$ $f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24$ $= +9$ الدالة تزايديه في الفترة $]4, \infty[$

....

فترات التحدب لأعلي والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

١) نوجد المشتقة الاولي ٢) ثم نوجد المشتقة الثانية ٣) نساوي المشتقة الثانية بالصفر وايجاد قيم x الحرجة

٤) نضع قيم x على خط الاعداد ونقسمه الي فترات ٥) نختار قيمة اختيارية من كل فترة ونعوض في المشتقة الثانية

٦) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية في الفترة موجبة كل تحدب لأسفل وإذا القيمة سالبة يكون تحدب لأعلي في الفترة

٧) اذا تغير التحدب قبل وبعد قيمة x (من تحدب لأعلي الي تحدب لأسفل) كانت النقطة هي نقطة انقلاب

٨) نعوض بقيمة x في الدالة الاصلية لإيجاد نقطة الانقلاب $(x, f(x))$

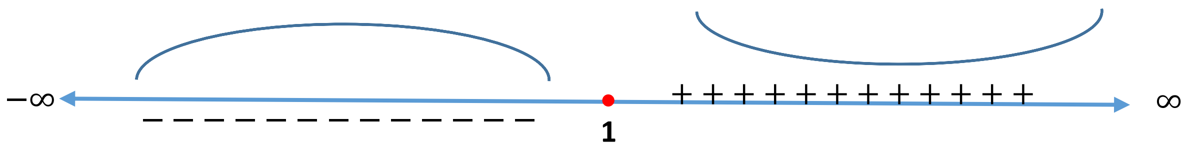
مثال ١) اوجد فترات التحدب لأعلي والتحدب لأسفل ونقطة الانقلاب للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ؟

الحـــــــــــــــل

١) المشتقة الاولي $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $f''(x) = 6x - 6$

٢) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $\mathbf{6x-6=0 \quad \rightarrow 6x=6 \quad \rightarrow \quad x=1}$

3) تحديد الفترات



1) $]-\infty,1[, \quad x=0$

$f''(0)=\mathbf{6(0)-6=-6}$

الفترة تحدب لأعلي للدالة

2) $]1,\infty[, \quad x=2$

$f''(2)=\mathbf{6(2)-6=6}$

الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد *x=1* فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>(1,2)</u> $\boldsymbol{f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=1-3+4=2}$

....

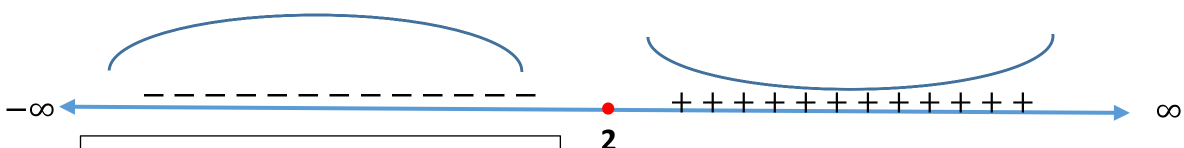
مثال ٢) نقطة الانقلاب للدالة $\boldsymbol{f(x)=x^3-6x^2+9x+1}$ هي ....<u>(2,3)</u>............

الحـــــــــــــل

١) المشتقة الاولي $\boldsymbol{f'(x)=3x^2-12x+9}$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $\boldsymbol{f''(x)=6x-12}$

٢) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $\mathbf{6x-12=0 \quad \rightarrow 6x=12 \quad \rightarrow \quad x=2}$

3) تحديد الفترات



1) $]-\infty,2[, \quad x=0$

$f''(0)=\mathbf{6(0)-12=-12}$

الفترة تحدب لأعلي للدالة

2) $]2,\infty[, \quad x=3$

$f''(3)=\mathbf{6(3)-12=6}$

الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $\boldsymbol{x=2}$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>(2,3)</u> $\boldsymbol{f(2)=2^3-6(2)^2+9(2)+1=3}$

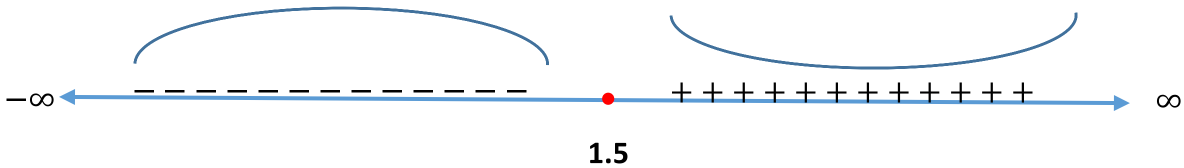
....

مثال ٣) نقطة الانقلاب للدالة $\boldsymbol{f(x)=2x^3-9x^2+12x-10}$ هي .... <u>(1.5,-5.5)</u>.........

الحـــــــــــــل

١) المشتقة الاولي $\boldsymbol{f'(x)=6x^2-18x+12}$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $\boldsymbol{f''(x)=12x-18}$

٢) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $\mathbf{12x-18=0 \quad \rightarrow 12x=18 \quad \rightarrow \quad x=1.5}$



3) تحديد الفترات

1) $]-\infty, 1.5[, \quad x = 0$

$f''(0) = \mathbf{12(0) - 18 = -18}$

الفترة تحدب لأعلي للدالة

2) $]1.5, \infty[, \quad x = 2$

$f''(2) = \mathbf{12(2) - 18 = 6}$

الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x = 1.5$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

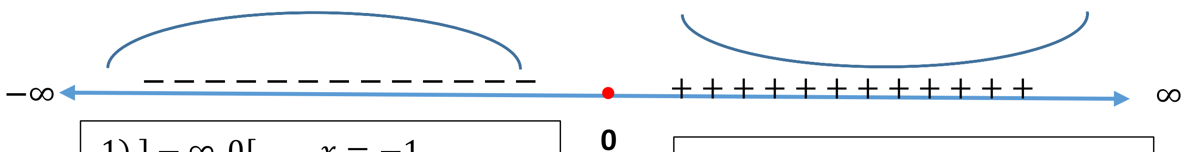
تكون نقطة الانقلاب <u>(1.5,-5.5)</u> $\quad \boldsymbol{f(1.5) = 2(1.5)^3 - 9(1.5)^2 + 12(1.5) - 10 = -5.5}$

مثال ٤) نقطة الانقلاب للدالة $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1}$ هي ....<u>$(0,1)$</u>..........

الحـــــــــــــــل

١) المشتقة الاولي $\boldsymbol{f'(x) = x^2 - 4}$ ثم إيجاد المشتقة الثانية $\boldsymbol{f''(x) = 2x}$

٢) مساواة المشتقة الثانية بالصفر وحل المعادلة $\boldsymbol{2x = 0 \quad \rightarrow x = 0}$



3) تحديد الفترات

1) $]-\infty, 0[, \quad x = -1$

$f''(-1) = \mathbf{2(-1) = -2}$

الفترة تحدب لأعلي للدالة

2) $]0, \infty[, \quad x = 1$

$f''(1) = \mathbf{2(1) = 2}$

الفترة تحدب لأسفل للدالة

نظرا لتغير التحدب قبل وبعد $x = 0$ فان للدالة نقطة انقلاب ولإيجاد نقطة الانقلاب نعوض في الدالة

تكون نقطة الانقلاب <u>$(0,1)$</u> $\quad \boldsymbol{f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 4(0) + 1 = 1}$

تمارين:...

١) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة <u>موجبة</u> فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

٢) إذا كانت قيمة المشتقة الاولي للدالة عند أي نقطة في فترة <u>سالبة</u> فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

٣) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة <u>موجبة</u> فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

٤) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند أي نقطة في فترة <u>سالبة</u> فان الدالة ....في الفترة

أ) تزايدية ب) تناقصية ج) لها تحدب لأعلي د) لها تحدب لأسفل

....

الدالة الصريحة والدالة الضمنية

الدالة الصريحة: هي دالة يكون المتغير التابع في أحد طرفي الدالة والمتغير او المتغيرات المستقلة في الطرف الاخر

$$y = f(x)$$

$1)\ y = x^2 + 2x + 3 \qquad 2)\ f(x) = 4x^3 - 3x \qquad 3)\ y = 4x + 9 \qquad 4)\ y = x^5 - 3$

كل الدوال السابقة دوال صريحة

الدالة الضمنية: يكون المتغير التابع والمتغير او المتغيرات المستقلة في طرف واحد (أي في مقدار واحد)

$$f(x, y) = c$$

$1)\ 2y - 3x^2 + 2x = 3 \qquad 2)\ 3y + 4x^3 = 3x \qquad 3)\ y + 4x = 9 \qquad 4)\ x^5 + y = 6$

كل الدوال السابقة دوال ضمنية

١) الدالة $y + 3x = 5$ تكون دالة صريحة على الشكل ....

أ) $y + 3x - 5 = 0$ ب) $x = y - 5$ ج) $y = -3x + 5$ د) $x = 3y + 5$

٢) الدالة $y^2 + x^2 = 4$ تكون دالة صريحة على الشكل ....

أ) $y = 4 - x^2$ ب) $x = 4 - y^2$ ج) $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ د) $x = 2 - y$

$1)\ y^2 + x^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \qquad \rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

$2)\ y^2 + x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 - y^2 \qquad \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}$

الدالة الفردية والدالة الزوجية

الدالة الزوجية: هي الدالة التي يكون $f(-x) = f(x)$

امثلة على الدوال الزوجية

$1)\ f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^2 = -x \times -x = x^2 = f(x)$ دالة زوجية

$2)\ f(x) = |x| \quad \Rightarrow \quad f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ دالة زوجية

$3)\ f(x) = cos\ x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = cox\ (-x) = cosx = f(x)$ دالة زوجية

الدالة الفردية: هي الدالة التي يكون $f(-x) = -f(x)$

امثلة على الدوال الفردية

$1)\ f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f(-x) = (-x)^3 = -x \times -x \times -x = -x^3 = -f(x)$ دالة فردية

$2)\ f(x) = sin\ x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = sin\ (-x) = -sin\ (x) = -f(x)$ دالة فردية

$3)\ f(x) = tan\ x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = tan\ (-x) = -tan\ x = -f(x)$ دالة فردية

تكون الدالة ليست فردية وليست زوجية إذا كان $f(-x) \neq -f(x) \qquad f(-x) \neq f(x)$

امثلة بين أي الدوال الاتية فردية ام زوجية ام ليست فردية وليست زوجية:

$$1)\ f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 - 5$$

$$f(-x) = x^4 - 4x^2 - 5 = f(x)$$

الدالة زوجية

$$2)\ f(x) = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \sin(-x)}{(-x)^4 + 5}$$

$$f(-x) = \frac{-x^3 \times -\sin x}{x^4 + 5} = \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5} = f(x)$$

الدالة زوجية

$$3)\ f(x) = \frac{|x| \sin x}{x^2}$$

$$f(-x) = \frac{|-x| \sin(-x)}{(-x)^2}$$

$$f(-x) = \frac{|x| \times -\sin x}{x^2} = -\frac{|x| \sin x}{x^2}$$

الدالة فردية

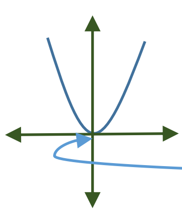
$$4)\ f(x) = \frac{|x|.(x^2 + 1)}{x^3}$$

$$f(-x) = \frac{|-x|.((-x)^2 + 1)}{(-x)^3}$$

$$f(-x) = \frac{|x|.(x^2 + 1)}{-x^3} = -\frac{|x|.(x^2 + 1)}{x^3} = -f(x)$$

الدالة فردية

الدالة التربيعية والتمثيل البياني لها



الصورة العامة للدالة التربيعية: $f(x) = (x-a)^2 \pm b$ حيث a , b ثوابت

أ) اذا كان قيمة $a = b = 0$ فان الدالة تصبح علي الصورة $f(x) = x^2$

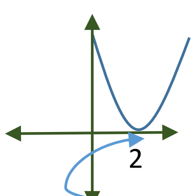
التمثيل البياني لها منحني مفتوح لأعلي راس المنحني عند نقطة الأصل $o = (0,0)$

وهى دالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات

ب) اذا كانت $a \neq 0, b = 0$

١) فاذا كانت الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ افقيا علي محور السينات الي اليمين بمقدار a من الوحدات

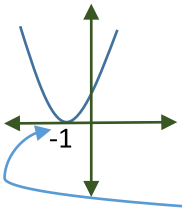
٢) فاذا كانت الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ افقيا علي محور السينات الي اليسار بمقدار a من الوحدات



مثال١) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x-2)^2$

الإشارة في القوس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ افقيا على محور السينات الي اليمين بمقدار ٢ وحدة فيكون راس المنحني $(2,0)$

مثال٢) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x+1)^2$



الإشارة في القوس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ افقيا على محور السينات الي اليسار

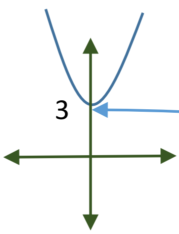
بمقدار وحدة واحدة فيكون راس المنحني $(-1, 0)$

ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل القوس سالبة تكون إزاحة الي اليمين واذا كانت الإشارة داخل القوس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) اذا كانت $a = 0, b \neq 0$

اذا كان قيمة b موجبة فان الازاحة تكون راسيا الي اعلي علي محور الصادات واذا كانت سالبة تكون الازاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال٣) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + 3$

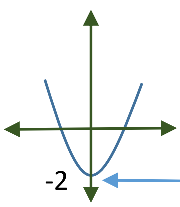


قيمة العدد $b = 3$ موجب فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ راسيا الي أعلي علي محور الصادات

بمقدار ٣ وحدة فيكون راس المنحني $(0, 3)$

مثال٤) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 2$



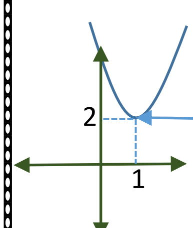
قيمة العدد $b = -2$ سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار ٢ وحدة واحدة فيكون راس المنحني $(0, -2)$

ملحوظة: إذا كانت قيمة b موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت b سالبة تكون إزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال٥) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x-1)^2 + 2$

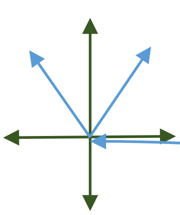


هنا نلاحظ هناك إزاحة افقيا الي اليمين على محور السينات بمقدار ١ وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي على محور الصادات بمقدار ٢ وحدة للدالة التربيعية

$f(x) = x^2$ فيكون راس المنحني $(1, 2)$

ثانيا: الصورة العامة لدالة المقياس: $f(x) = |x - a| \pm b$ حيث a , b ثوابت



أ) إذا كان قيمة $a = b = 0$ فان الدالة تصبح على الصورة $f(x) = |x|$

التمثيل البياني لها شعاعين لأعلي لهما نقطة بداية واحدة عند نقطة الأصل $o = (0, 0)$

وهي دالة زوجية لتماثلها حول محور الصادات

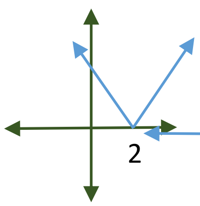
ب) إذا كانت $a \neq 0, b = 0$

١) فاذا كانت الإشارة في المقياس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس $f(x) = |x|$ **افقيا علي محور السينات الي اليمين بمقدار a من الوحدات**

٢) فاذا كانت الإشارة في المقياس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس $f(x) = |x|$ **افقيا علي محور السينات الي اليسار بمقدار a من الوحدات**

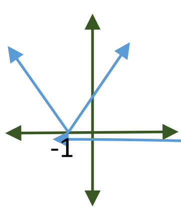
مثال١) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x - 2|$

الإشارة في المقياس سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس $f(x) = |x|$ **افقيا على محور السينات الي اليمين بمقدار ٢ وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين** $(2, 0)$



مثال٢) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x + 1|$

الإشارة في المقياس موجبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس $f(x) = |x|$ **افقيا على محور السينات الي اليسار بمقدار وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين** $(-1, 0)$



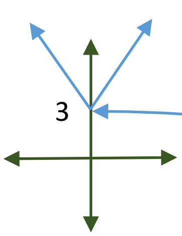
ملحوظة: إذا كانت الإشارة داخل المقياس سالبة تكون إزاحة الي اليمين وإذا كانت الإشارة داخل المقياس موجبة تكون إزاحة الي اليسار

ج) إذا كانت $a = 0, b \neq 0$

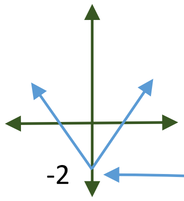
اذا كان قيمة b موجبة فان الازاحة تكون راسيا الي اعلي علي محور الصادات واذا كانت سالبة تكون الازاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال٣) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x| + 3$

قيمة العدد $b = 3$ **موجب فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني دالة المقياس** $f(x) = |x|$ **راسيا الي أعلى علي محور الصادات بمقدار ٣ وحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين** $(0, 3)$



مثال٤) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x| - 2$



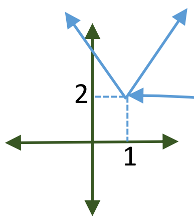
قيمة العدد $b = -2$ سالبة فنحصل علي منحني الدالة بإزاحة منحني

دالة المقياس $f(x) = |x|$ راسيا الي أسفل علي محور الصادات

بمقدار ٢ وحدة واحدة فيكون نقطة بداية الشعاعين$(0, -2)$

ملحوظة: إذا كانت قيمة b موجبة تكون إزاحة راسيا الي اعلي علي محور الصادات وإذا كانت b سالبة تكون إزاحة راسيا الي اسفل علي محور الصادات

مثال٥) اوجد التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x - 1| + 2$



هنا نلاحظ هناك إزاحة افقيا الي اليمين على محور السينات بمقدار ١ وحدة

وإزاحة راسيا الي اعلي على محور الصادات بمقدار ٢ وحدة لدالة المقياس

$f(x) = |x|$ فيكون راس المنحنى $(1, 2)$

تمارين:

١) يمكن الحصول علي منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 1$ بإزاحة منحنى الدالة $f(x) = x^2$ الي.........

٢) يمكن الحصول علي منحنى الدالة $f(x) = |x - 3|$ بإزاحة منحنى الدالة $f(x) = x^2$ الي.........

٣) نوع الدالة $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^4+1}$ ....

٤) نوع الدالة $f(x) = \frac{x^3 \cos x}{x^5+x}$ ....

٥) الدالة $2y^2 + x = 7$ هي دالة صريحة على الشكل ....

٦) الدالة $y = 6x^2 + 3$ هي دالة ضمنية على الشكل ....

٧) إذا علمت ان دالة الطلب لسلعة معينة $Q_n = 3p - 4$ ودالة العرض لنفس السلع $Q_n = 36 - 2p$ فأجب عما يأتي ا) سعر التوازن .... (٢٠ ، ٨ ، ١٠ ، ٤٠)

ب) الكمية التي يحدث عندها التوازن ....(٣٦ ، ٨ ، ٢٤ ، ٢٠)

٨) إذا كانت $y = e^{-5x}$ فان $y'' = \cdots$, $\int e^{-5x}\, dx = \cdots,$ $y' = \cdots,$

٩) اذا كانت الدالة $y = x^3 - 3x^2$ فان نقطة الانقلاب هي .....[$(1, -2)$, $(1, 0)$, $(1, -4)$, $(1, -3)$]

....

التفاضل الجزئي

تنقسم الدوال الي   أ) دوال ذات متغير واحد   ب) دوال ذات أكثر من متغير

أ) دوال ذات متغير واحد (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل عادى)

$1)\ y = x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x - 3,$ $2)\ y = 3x^2 + 6x + 1 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 6x + 6$

متغير تابع   متغير مستقل   تفاضل عادي   متغير تابع   متغير مستقل   تفاضل عادي

(دوال ذات اكثر من متغير (يسمى التفاضل في هذه الحالة تفاضل جزئى)

$1)\ z = 2xy + 3x^2y^2$ $2)\ z = 3xt + x^2y + yt^5$

متغير تابع   x ,y متغيرين مستقلين   متغير تابع   x ,y, t 3 متغيرات مستقلة

في هذه الحالة يطلق على التفاضل تفاضل جزئي بالنسبة لـ x و y و t ويرمز له بالرمز $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, ..$

مثال١) اذا كانت الدالة $z = 2x^2y + 3xy^3$ فأوجد: $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x)y + 3(1)y^3 = 4xy + 3y^3, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial} = 2x^2(1) + 3x(3y^2) = 2x^2 + 9xy^2$$

مثال٢) اذا كانت الدالة $z = x^2 + y^2$ فأوجد: $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 = 2x, \qquad Z_y = \frac{\partial z}{\partial} = 0 + 2y = 2y$$

مثال٣) اذا كانت الدالة $z = 2x^3y^2 + 5y^3t^2 + 6xyt$ فأوجد: $\dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2(3x^2)y^2 + 0 + 6(1)yt = 6x^2y^2 + 6y\,t$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3(2\,y) + 5(3y^2)t^2 + 6x(1)t = 4x^3\,y + 15y^2t^2 + 6xt$$

$$Z_t = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 + 5y^3(2t) + 6xy(1) = 10y^3t + 6xy$$

مثال٤) اذا كانت الدالة $z = 3x^2y^3 + 5xy^2 + 2x^4y^5$ فأوجد: $\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial z}{\partial x}$

الحـــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^3 + 5(1)y^2 + 2(4x^3)y^5 = 6xy^3 + 5y^2 + 8x^3y^5$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(3y^2) + 5x(2y) + 2x^4(5y^4) = 9x^2y^2 + 10xy + 10x^4y^4$$

مثال٥) اذا كانت الدالة $z = x^2 + 2xy$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2(1)y = 2x + 2y, \qquad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x(1) = 2x$$

مثال٦) اذا كانت الدالة $z = 6x^2y + 3xy^2$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 6(2x)y + 3(1)y^2 = 6xy + 3y^2, \quad Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2(1) + 3x(2y) = 6x^2 + 6xy$$

مثال٧) اذا كانت الدالة $z = 3x^2y^2 + 6x^3y + 4xy^3$ فأوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

الحـــــــــــل

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3(2x)y^2 + 6(3x^2)y + 4(1)y^3 = 6xy^2 + 18x^2y + 4y^3$$

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2(2y) + 6x^3(1) + 4x(3y^2) = 6x^2y + 6x^3 + 12xy^2$$

المعادلات التفاضلية

ينقسم التفاضل الى

١) تفاضل عادي يكون للدالة متغير واحد $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots\dots,$ تفاضل عادي من الرتبة الاولي والثانية والثالثة ...

٢) تفاضل جزئي يكون للدالة أكثر من متغير $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$ تفاضل جزئي من الرتبة الاولي والثانية ...

رتبة المشتقة: هو أعلي مستوي تفاضل للدالة

تعريف المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات لمتغير تابع بالنسبة لمتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x + 3y, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x - 3y = 2$$

أنواع المعادلات التفاضلية

١) معادلات تفاضلية عادية ٢) معادلات تفاضلية جزئية

معادلات تفاضلية عادية إذا كانت المعادلة تحتوي على متغير مستقل واحد فإن المشتقة تصبح مشتقة عادية وتصبح المعادلة ***معادلة تفاضلية عادية***(*Ordinary Differential Equation*) مثل $\frac{d^2y}{dx^2} - 3x = 6$ ، $\frac{dy}{dx} = 2x + 3,$

معادلات تفاضلية جزئية إذا احتوت المعادلة على أكثر من متغير مستقل واحد فإن المشتقات تكون مشتقات جزئية وتصبح المعادلة ***معادلة تفاضلية جزئية*** ***(Partial Differential Equation)*** مثل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4x = 3y$ ، $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y,$

مثال ١) المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}+5y=e^x$ هي معادلة تفاضلية عادية

وذلك لأن المشتقة $\frac{dy}{dx}$ هي مشتقة عادية.

مثال ٢) لمعادلة التفاضلية $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}=3y$ هي معادلة تفاضلية جزئية

وذلك لأن المشتقات $\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}$ هي مشتقات جزئية.

$\frac{dy}{dx}+5y=e^x$

dx: متغير مستقل واحد

لاحظي أن:

$\frac{d^2y}{dx^2}\neq\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ تعني تربيع المشتقة الاولى

$\frac{d^2y}{dx^2}$ تعني المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x

تصنيف المعادلات التفاضلية [حسب الرتبة والدرجة]

تعريف: رتبة المعادلة التفاضلية هي **أكبر او اعلى مشتقة** تظهر في المعادلة التفاضلية.

مثال١ المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5=5x$ من الرتبة الثالثة

نلاحظ أكبر مشتقه هي الثالثة ∴ هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة.

مثال٢ المعادلة التفاضلية $y''''+y''+y=x$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة

مثال٣) المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}+y=1$ من الرتبة الاولي (العبارة صحيحة - العبارة خاطئة)

مثال٤) المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+x=7$ من الرتبة الخامسة (العبارة صحيحة - العبارة خاطئة)

درجة المعادلة التفاضلية هي أس أكبر مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية التالية $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^6=7$ هي من الدرجة الثانية..

نلاحظ أن..

١. أكبر مشتقة هي $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ وهذا يعني أنها من الرتبة الثالثة.

٢. لهذه المشتقة (والتي هي أكبر مشتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثاني وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية.

مثال ٢) المعادلة التفاضلية التالية $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+x=11$ هي من الدرجة الثالثة.

نلاحظ أن..

١. أكبر مشتقة هي $\frac{d^2y}{dx^2}$ وهذا يعني أنها من الرتبة الثانية.

٢. لهذه المشتقة (والتي هي أكبر مشتقة) ندرس الأس المرفوعة إليه فنجدها مرفوعة للأس الثالث وهذا يعني أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثالثة.

مثال ٣) المعادلة التفاضلية $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\frac{dy}{dx}+x=11$:

هي من الدرجة الثانية (×) لان اس اعلي مشتقة بها هو ٣ لذلك فهي من الدرجة الثالثة

هي من الرتبة الثالثة (×) لان اعلي مشتقة بها هي المشتقة الثانية لذلك فهي من الرتبة الثانية

حل المعادلات التفاضلية

حل المعادلات التفاضلية عن طريق فصل المتغيرات (باستخدام التكامل)

مثال١) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = 2x \times dx \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow \int dy = \int 2xdx$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + c \quad \Rightarrow y = x^2 + c$$

مثال٢) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = (2x+3)dx \Rightarrow dy = (2x+3)dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int (2x+3)dx \quad \Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + 3x + c \quad \Rightarrow y = x^2 + 3x + c$$

مثال٣) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 6x$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{1} \quad \Rightarrow \quad dy \times 1 = 6x \times dx \Rightarrow dy = 6xdx \Rightarrow \int dy\, dy = \int 6xdx$$

$$\Rightarrow y = \frac{6x^2}{2} + c \quad \Rightarrow y = 3x^2 + c$$

مثال٤) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ؟ الحـــــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y\, dy = xdx \Rightarrow \int y\, dy = \int xdx$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2} \quad \Rightarrow y^2 = x^2 + c$$

مثال٥) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ؟ الحـــــــــل هنا لفصل المتغيرات نقسم البسط ÷ البسط = المقام÷ المقام

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + \ln(c) \quad \Rightarrow \ln(y) = \ln(c.x) \quad \Rightarrow y = c.$$

مع تحياتي بالتوفيق والنجاح لجميع الطلاب

د محمد تركي