الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- **تعريف: العلاقة**

هي ارتباط بين بعض أو كل من عناصر مجموعة ببعض أو كل من عناصر مجموعة أخرى.

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{1, 2, 4\}$، $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a + 2$

حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$، اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

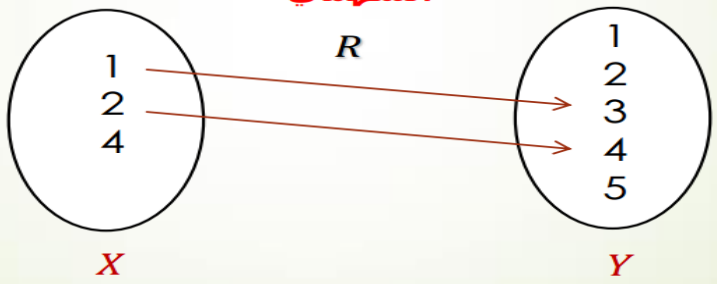
الحل: الصفحة التالية

IMAM ABDULRAHMA

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

$$R = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

المخطط السهمي



لاحظ أن العدد ٤ من المجموعة X لا يمكن أن يرتبط بأي عدد من المجموعة Y وذلك لان ٤+٢=٦ والعدد ٦ لا ينتمي الى المجموعة Y

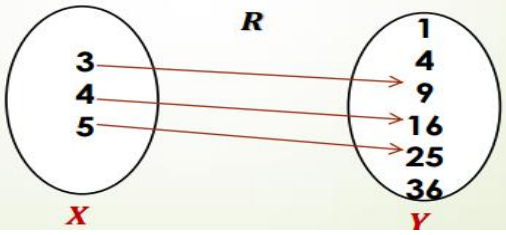
الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{3, 4, 5\}$، $Y = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a^2$ حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: $R = \{(3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

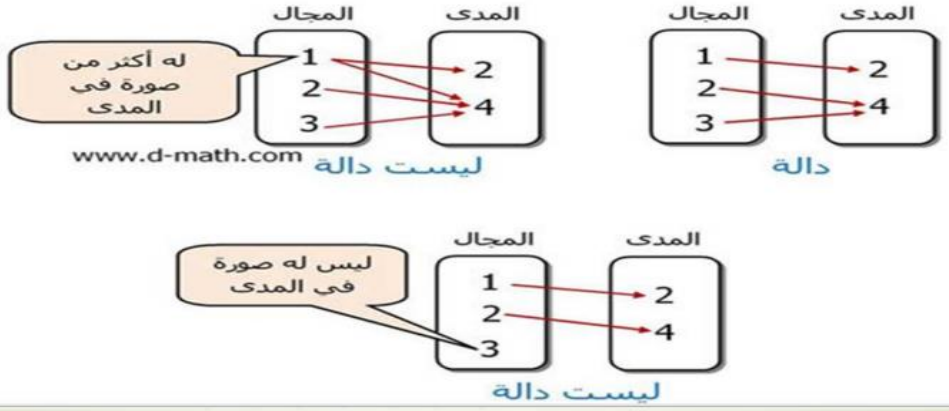
تعريف: الدالة

إذا كانت A, B مجموعتين، فإن f دالة من A الى B بمعنى $(f: A \to B)$ إذا كانت f **مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي** $A \times B$ بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد y واحدة تنتمي الى B.

تسمى y قيمة الدالة عند x ويرمز لها بالرمز $y = f(x)$، كما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل والمتغير y بالمتغير التابع.

الدالة:

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.



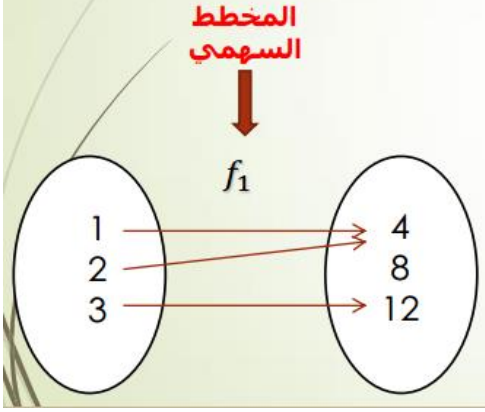
مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3\}$، $B = \{4,8,12\}$ وكانت

$f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$ و $f_2 = \{(1,4), (2,8)\}$

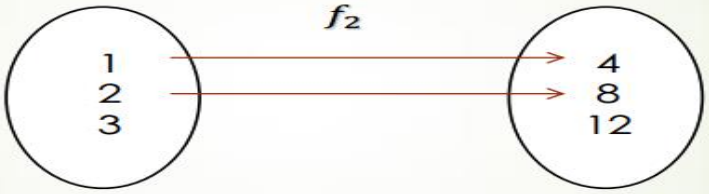
و $f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$

فأي من f_1 و f_2 و f_3 يعتبر دالة؟

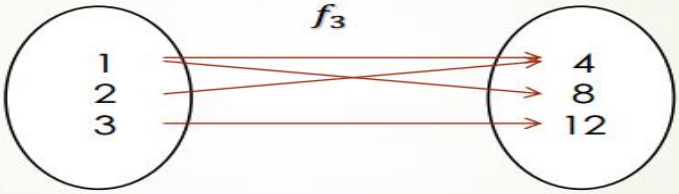


الحل: f_1 يعتبر دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما ان عناصر f_1 مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$.

f_2 ليست دالة لان العدد $3 \in A$. ولكن ليس له صورة في B.



f_3 ليست دالة لان العدد $1 \in A$. ولكن اكثر من صورة في B.



ملاحظة» إذا كانت f دالة من A الى B، فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل (مدى) الدالة.

$$f: A \rightarrow B$$

عناصر المجال — عناصر المقابل

مثال: إذا كانت $A = \{1,2\}$، $B = \{3,4,5,6\}$ وكانت

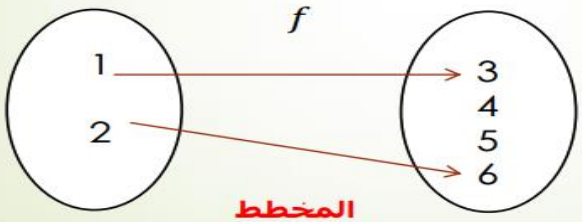
$f = \{(1,3), (2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجال والمدى؟

الحل:

عناصر المجال = $\{1,2\}$

عناصر المدى=$\{3,6\}$



المخطط السهمي

الفصل الأول: الدوال (الدالة – كثيرات الحدود)

- انواع الدوال: سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من انواع الدوال وهي الدالة الحقيقية، وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f: R \to R$

تعريف: كثيرات الحدود

تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التي تكتب على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقيقية وتسمى المعاملات أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود ممثلة بأعلى أس.

الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

- ومن الأمثلة على كثيرات الحدود

١ – كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5$$
$$f_2(x) = -2$$

المدى

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$ أما مداها فهو عبارة عن قيمة العدد الثابت حيث يساوي 5 في الدالة الاولى و-2 في الدالة الثانية.

٢ – كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = -2x + 3$$

معامل x — الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$، كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوى العدد 1.

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثانية (وتسمى بالدالة التربيعية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x^2$$

القيمة = -١ ولا يكتب

$$f_2(x) = -2x^2 - x + 5$$

معامل x^2 | معامل x | الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$،
كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 2

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 3x^3 - x^2 - 4$$

$$f_2(x) = -2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$$

معامل x^3 | معامل x^2 | معامل x | الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathcal{R}$،
كما أن قيمة اعلى أس للمتغير x تساوي العدد 3.

❑ ايجاد قيمة دالة:

يمكن ايجاد قيمة أي عدد أو متغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أو المتغير بدل المتغير x في تلك الدالة.

مثال: إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$، فأوجد

$(i)\ f(2)$

$(ii)\ f(-1)$

$(iii)\ f(a)$

❑ الحل:

$$(i)\ f(2) = 2^2 + 4 \times 2 - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$$

$$(ii)\ f(-1) = (-1)^2 + (4 \times -1) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$$

$$(iii)\ f(a) = a^2 + 4 \times a - 3 = a^2 + 4a - 3$$

المحاضرة الثانية

الفصل الأول: الدوال (العمليات على الدوال)

تشمل العمليات الثنائية على الدوال خمسة عمليات:

١- الجمع $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

٢- الطرح $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

٣- الضرب $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

٤- القسمة $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

٥- التركيب $(fog)(x)=f(g(x))$

وهنالك عملية احادية هي معكوس الدالة f ورمزها f^{-1} وتعرف كالآتي:

إذا كانت $y=f(x)$ دالة فان معكوس الدالة يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$،

الفصل الاول: الدوال (تمارين وتدريبات)

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$، $g(x)=x^2+1$، فأوجد

$i-(f+g)(x)$

$ii-(f-g)(x)$

$iii-(f\times g)(x)$

$iv-(\frac{f}{g})(x)$

$v-(fog)(x)$

$vi-f^{-1}(x)$

الحل:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(3x+5)+(x^2+1)$$
$$=x^2+3x+6$$

$$(i)(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(3x+5)-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4=-x^2+3x+4$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$

الحل:

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

نعوض قيمة

$g(x) = x^2+1$

بدلا من

$f(x) = 3(x)+5$

$$(v)\ (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = 3(x^2+1)+5$$
$$= 3x^2+3+5$$
$$= 3x^2+8$$

(vi)- $f^{-1}(x)$

نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدالة بالرمز $f(x)$ أو y

- لإيجاد معكوس دالة $f^{-1}(x)$ فإننا نقوم بكتابتها على الصورة $y = 3x+5$

ثم نعيد كتابتها على صورة x كدالة في y من خلال استخدام العمليات الجبرية المختلفة.

$3x = y-5$ ← $x = \frac{y-5}{3}$ ← $f^{-1}(x) = \frac{y-5}{3}$

نقل العدد الثابت 5 الى الطرف الأخر

قسمة الطرف الأيمن على معامل x

فيكون المعكوس مساويا للطرف الايمن