عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع
إدارة أعمال – المستوى الثاني

ملزمة مقرر رياضيات الإدارة

المستوى الثاني - الفصل الثاني ١٤٣٨هـ

دكتور المقرر : د. رائد الخصاونة

إعداد :

عادل الذرمان

ورد القحطاني

مريم عبدالرحمن

(رزان الغامدي - آمنة الشمري: محاضرة)

الفصل الأول: (الدوال المجموعات ..)

أولاً المجموعات ..

- **تعريف ١.١ :**

لتكن A مجموعة جزيئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R فإن عدد عناصر المجموعة A يرمز له بالرمز n(A) .

مثال١ : إذا كانت A = {1,2,3,4,5} فإنّ n(A) = 5 .

مثال ٢ : إذا كانت B = ϕ = { } حيثُ B هي المجموعة الخالية فإن n(B) = 0 .

مثال ٣ : إذا كانت C = {1,2,s,t} فإنّ n(C) = 4 .

- المجموعة A = {1,2,3,4,…} تسمى مجموعة غير محدودة .
- المجموعة B = {1,3,5,7,9} فهي مجموعة محدودة (معدودة) .
- نلاحظ أيضاً {2,6} = {6,2} ترتيب العناصر في أي مجموعة غير ضروري .

- **تعريف ١,٢** : مجموعة القوى لمجموعة ما

مجموعة القوى للمجموعة X هي مجموعة كل المجموعات الجزيئية من المجموعة X ويرمز لمجموعة القوى الخاصة بالمجموعة X على
الصورة : P(X) .

مثال ١: أوجد مجموعة القوى للمجموعة X={a,b,c} ؟

الحل :

$$P\,(X) = \{\emptyset, (a)\,, (b)\,, (c)\,, (a,b)\,, (a,c)\,, (b,c)\,, (a,b,c)\}$$

*ملاحظة : إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي n من العناصر فإن عدد المجموعات الجزيئية الممكن الحصول عليها يساوي $2n$.

ومثال على ذلك :
إذا كانت A = {1,2} فإن عدد المجموعات الجزيئية للمجموعة A
يساوي : 4 = 2^2 .
أما مجموعة المجموعات الجزيئية من A فهي :

$$P\,(A) = \{\emptyset, (1)\,, (2)\,, (1{,}2)\}$$

الفصل الأول: (الدوال .. الأزواج المرتبة..)

- **تعريف ١,٣ : الأزواج المرتبة**

وتكتب على الصورة (x,y) حيث يسمى المتغير x بالإحداثي السيني أو المسقط (الأول) ويسمى المتغير y بالإحداثي الصادي أو المسقط (الثاني).

مثال : $(-1,-2)$, $(3,-5)$

المسقط الأول المسقط الثاني الإحداثي السني الإحداثي الصادي

*ملاحظات على الأزواج المرتبة :

$(x, y) \neq (y, x)$ ← الترتيب ضروري ،

مثال : $(2,5) \neq (5,2)$.

وإذا كانت $(x,y) = (a,b)$ فإن :

$X = a$ و $y = b$.

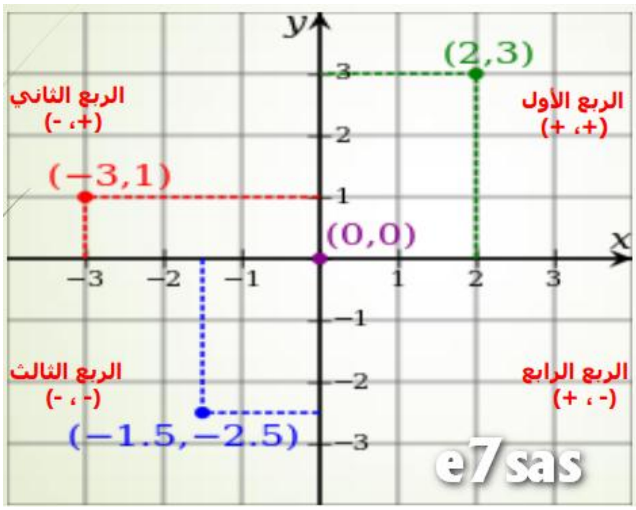
مثال : إذا كانت $(x+1,y-2)=(3,-1)$ فأوجد قيمة كل من x,y ؟

قيمة x = $x + 1 = 3$ ومنها $x = 3 - 1 = 2$.

قيمة y = $y - 2 = -1$ ومنها $y = -1 + 2 = 1$.

الفصل الأول: (الدوال .. المستوى الديكارتي ..)

يمكن تمثيل الأزواج المرتبة على المستوى الديكارتي (المستوى البياني) كما في الشكل التالي :



- **تعريف ١,٤ :** يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B

ورمزه (A X B) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (X , Y) التي ينتمي مسقطها الأول (X) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (Y) إلى المجموعة الثانية B ، وبالرموز :

$$A \times B = \{(X,Y) \mid X \in A \wedge Y \in B\}$$

مثال ١ : إذا كانت $A = (-2,1)$ و $B = (-3,1,4)$

$AXB = \{(-2,-3),(-2,1),(-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$

$BXA = \{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$

نلاحظ أن : $\mathbf{AXB \neq BXA}$

<u>مثال ٢ :</u> $A = \{1,2\}$, $B = \{x, y, w\}$

فأوجد : AXB و BXA ؟

الحل :

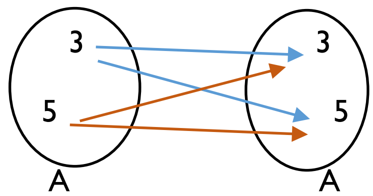
$$A\times B = \{(1,x),(1,y),(1,w),(2,x),(2,y),(2,w)\}$$

$$B\times A = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2),(w,1),(w,2)\}$$

<u>مثال ٣</u>: إذا كانت $A = \{3,5\}$

فأوجد : A X A ؟

الحل : $A\times A = \{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$



*ملاحظة : عدد عناصر الضرب الديكارتي لمجموعتين =

عدد عناصر المجموعة الأولى X عدد عناصر المجموعة الثانية .

بالرموز : $n\ (A \times B) = n\ (A) \times n\ (B)$.

مثال : إذا كانت عدد عناصر مجموعة $A = 3$ وعدد عناصر المجموعة $B = 4$ فإن عدد عناصر الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B .

$$n\ (A \times B) = n\ (A) \times n\ (B) = 3 \times 4 = 12$$

الفصل الأول .. (تمارين وتدريبات) ..

إذا كانت A = (x,y,z) ، B = (-1,1) , C = (3,5,7) فأوجد كلاً مما يلي :

1- $\boldsymbol{n(A)}$
2- $\boldsymbol{A \times B}$
3- $\boldsymbol{B \times B}$
4- $\boldsymbol{P(A)}$
5- $\boldsymbol{P(B)}$
6- $\boldsymbol{A \times C}$
7- $\boldsymbol{C \times B}$
8- $\boldsymbol{P(C)}$
9- $\boldsymbol{n(B \times C)}$
10 – $\boldsymbol{n(A \times C)}$

إذا كانت $\boldsymbol{(2x + 5, 10) = (3, -3y - 2)}$.

فأوجد قيمة كل من x,y ؟

حد كل من الأزواج التالية على المستوى البياني :

1- $\boldsymbol{(-2, -3)}$
2- $\boldsymbol{(2, -3)}$
3- $\boldsymbol{(-2, 3)}$
4- $\boldsymbol{(2, 3)}$

الفصل الأول : .. الدوال (العلاقة)

تعريف : العلاقة

هي ارتباط بين بعض أو كل من عناصر مجموعة ببعض ، أو كل من عناصر مجموعة أخرى .

<u>مثال</u> : إذا كان لدينا $X = \{1, 2, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

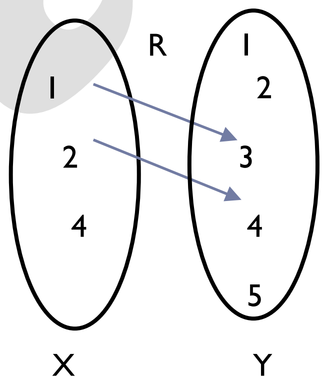
وكانت لدينا العلاقة R من X الى Y بحيث R تعني $b = a + 2$

وحيث $a \epsilon X$ و $b \in y$. اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي :

<u>الحل</u>:

$$R = \{(1, 3 , 2, 4)\}$$

المخطط السهمي



ملاحظة *: نلاحظ أن العدد ٤ من المجموعة X لايمكن بأن يرتبط بأي عدد من المجموعة Y وذلك لأن ٢+٤=٦ والعدد ٦ لاينتمي للمجموعة Y

<u>مثال آخر</u> : إذا كان لدينا $X = \{3, 4, 5\}$, $Y = (1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

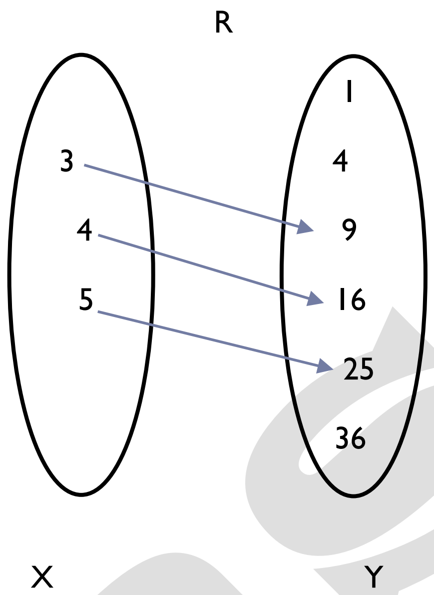
وكانت لدينا العلاقة R من X الى Y بحيث R تعني : $b = a2$ ،

حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ ، اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي ؟

<u>الحل</u> :

$$R = \{(3, 9), (4, 16) , (5, 25)\}$$

المخطط السهمي



تمرين : إذا كان لدينا $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

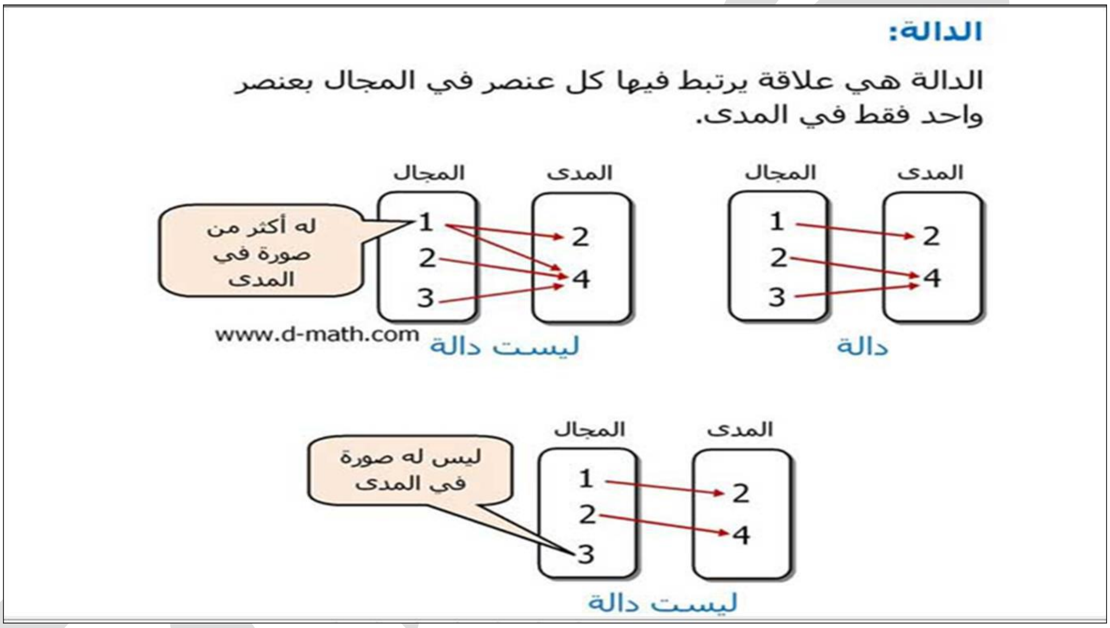
وكانت لدينا العلاقة R من X الى Y بحيث R تعني $b = 1 + a$

حيث $a \epsilon X$ و $b \in y$ ، اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي ؟

الفصل الأول : .. الدوال (الدالة)

تعريف : الدالة

إذا كانت A,B مجموعتين فإن f دالة من A الى B بمعنى : $(f: A \to \mathrm{B})$ إذا كانت f مجموعة جزيئية من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد Y واحدة تنتمي الى B تسمى Y قيمة الدالة عند X ويرمز لها بالرمز $y = f(x)$ ، كما يسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير Y بالمتغير التابع .



<u>مثال :</u>

إذا كانت $B = \{4,8,12\}$ و A = {1,2,3}

وكانت :

$f1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$

$f2 = \{(1,4), (2,8)\}$

$f3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\}$

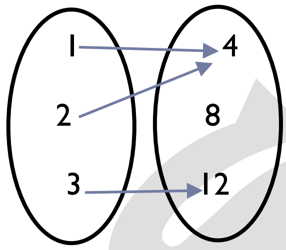
فأي من $f1$ و $f2$ و $f3$ يعتبر دالة ؟

الحل :

١/ $f1$ يعتبر دالة لأن كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما أن عناصر $f1$ مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$.

المخطط السهمي

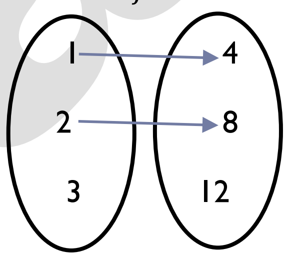
$f1$



٢/ $f2$ ليست دالة لأن العدد $3 \in A$ ولكن ليس له صورة في B .

المخطط السهمي

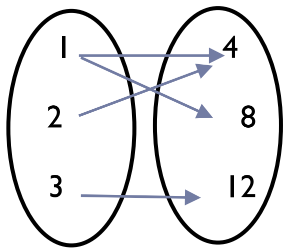
$f2$



٣/ $f3$ ليست دالة لأن العدد $1 \in A$ ولكن أكثر من صورة في B .

المخطط السهمي

$f3$



*ملاحظة : إذا كانت f دالة من A الى B فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل (مدى) الدالة .

عناصر المجال

$f : A \rightarrow B$

عناصر المدى

مثال آخر :

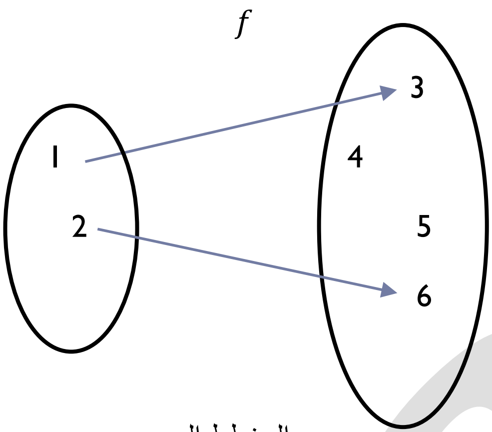
إذا كانت $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ وكانت $f=\{(1,3)\,,(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجال والمدى ؟

الحل :

عناصر المجال = {1,2}

عناصر المدى = {3,6}



المخطط السهمي

 # تمرين : أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1. $R=\{(-1,2),(2,2),(3,5),(6,1)\}$
2. $R=\{(0,7),(1,5),(1,2),(3,-4)\}$
3. $R=\{(-3,1),(-1,1),(0,1),(4,1)\}$
4. $R=\{(-4,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$
5. $R=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
6. $R=\{(1,1),(2,2),(4,4),(9,9)\}$

الفصل الأول : .. الدوال (الدالة – كثيرات الحدود ..)

أنواع الدوال :

سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من أنواع الدوال وهي الدالة الحقيقية ، وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلأى مجموعة الأعداد الحقيقية

أي : $f:R \to R$.

تعريف : كثيرات الحدود

تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التي تكتب على الصورة :

$$f\ x = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية وتسمى المعاملات ، أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود مُمثلة بأعلى أس .

ومن الأمثلة على كثيرات الحدود :

١/ كثيرة الحدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة) ومن الأمثلة عليها :

$f1\ x = 5$

المدى

$f2\ x = -2$

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R أما مداها فهو عبارة عن قيمة العدد الثابت ، حيث يساوي 5 في الدالة الأولى و2- في الدالة الثانية .

٢/ كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية) ، ومن الأمثلة عليها :

$f1\ x = 5x$

$f2\ x = -2x + 3$

معامل X الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد I .

٣/ كثيرة حدود من الدرجة الثانية (وتسمى بالدالة التربيعية) ، ومن الأمثلة عليها :

$f1\ x = 5x2$

القيمة = -١ ، ولا تكتب

$f2\ x = -2X^2 - x + 5$

معامل X2 معامل X الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد 2 .

٤/ كثيره حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى الدالة التكعيبية) ، ومن الأمثلة عليها :

$$f1\ x = 3\ X^3 - X^2 - 4$$

$$f2\ x = -2\ X^3 - 3\ X^2 - 5x + 1$$

الحد الثابت   معامل X   معامل X2   معامل X3

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير X تساوي العدد 3.

إيجاد قيمة دالة :

يمكن إيجاد قيمة أي عدد أو متغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أول المتغير بدل المتغير X في تلك الدالة .

مثال :

إذا كان $f(x) = X^2 + 4X - 3$، فأوجد :

$(i)\ f(2)$
$(ii)\ f(-1)$
$(iii)\ f(a)$

الحل :

(i) $f(2) = 2^2 + 4(2) - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$
(ii) $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$
(iii) $f(a) = a^2 + 4(a) - 3 = a^2 + 4a - 3$

تمرين : إذا كان/
$f(x) = 2\ X^2 - 3x$
فأوجد :
(i) f (0)
(ii) f (−4)

الفصل الأول : .. الدوال (العمليات على الدوال ..)

تشمل العمليات الثنائية على الدوال خمس عمليات :

الجمع : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
الطرح $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
الضرب : $(f \times g)\ x = f(x) \times g(x)$
القسمة : $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. $g(x) \neq 0$
التركيب : $(fog)(x) = f(g(x))$

وهنالك عملية أحادية هي معكوس الدالة f ورمزها f -1 وتعرف كالآتي :

إذا كانت $y = f(x)$ دالة فإن معكوس الدالة يعني إيجاد x كدالة في y

أي : $x = f-1(y)$.

الفصل الأول : .. الدوال (.. تمارين وتدريبات ..)

مثال : إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ ، $g\,x = X^2+1$ فأوجد :

$i - (f + g)\,(x)$
ii- $(f - g)\,(x)$
iii- $(f \times g)\,(x)$
iv- $(f/\,g)(x)$
v- $(fog)\,(x)$
vi- $(f-1)(x)$

الحل :

$i = \ (f + g)(x) = f\,(x) + g(x) = (3x+5)+(\,X^2+1)$

$= x^2 + 3x + 6$

$ii = (f - g)\,(x) = f\,(x) - g(x)\ = (3x+5)+(\,X^2+1)$
$= 3x + 5 - X^2 - 1 = 3x - X^2 + 4 = - X^2 + 3x + 4$

$iii = (f \times g)\,(x) = f(x) \times f(g) = (3x+5) \times (\,X^2+1)$
$= 3X^3 + 3x + 5\,X^2 + 5$
$= 3X^3 + 5\,X^2 + 3x + 5$

$iv = f/\,g\,(x) = f(x)\,/\,g(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$

نعوض عن

$\boxed{g\,(x) = x^2+1}$

بدلاً من

$f\,(x) = 3(x) + 5$

$(v)\ (fog)\ = f(g(x)) = f(X^2+1) = 3(X^2+1) + 5$
$= 3x^2 + 3 + 5$
$= 3x^2 + 8$

vi - $f^{-1}(x)$

لإيجاد معكوسة دالة $f^{-1}(x)$ فإننا نقوم بكتابتها على الصورة $y=3x+5$

ثم نعيد كتابتها على صورة x كدالة في y من خلال إستخدام العمليات الجبرية المختلفة .

فيكون المعكوس مساوياً للطرف الأيمن		قسمة الطرف الأيمن على معامل x		نقل العدد الثابت 5 إلى الطرف الآخر
$f^{-1}(x)=\frac{y-5}{3}$	⟸	$x=\frac{y-5}{3}$	⟸	$3x=y-5$

نلاحظ : يمكن التعبير عن الدالة بالرمز f(x) أو y .

تمرين : إذا كانت $fx=3x2$ ، $gx=x+1$ فأوجد مايلي :

$i-$ $(f+g)(x)$
ii- $(f\times g)(x)$
v- $(fog)(x)$
vi- $(gof)(x)$
v- $g^{-1}(x)$ & $f^{-1}(x)$

علمتنى الرياضيات : أن الانتقال من جهه لأخرى سيغير من قيمتى وانه متى ماكبر المقام صغر كل شئ.

E7sas

الفصل الأول: الدوال (تزايد وتناقص الدوال)

- **تعريف: تزايد وتناقص الدالة على فترة**

تكون الدالة $f(x)$ دالة متزايدة على فترة معينة إذا حققت الشرط التالي :

إذا كانت $x_2 > x_1$ ، فإن $f(x_2) > f(x_1)$ ، حيث x_1 ، x_2 قيم عشوائية منداخل الفترة .

وتكون الدالة $f(x)$ دالة متناقصة على فترة معينة إذا حققت الشرط التالي :

إذا كانت $x_2 > x_1$ ، فإن $f(x_2) < f(x_1)$ ، حيث x_1 ، x_2 قيم عشوائية من داخل الفترة .

<u>مثال</u>: أي من الدوال التالية دوال متزايدة ، متناقصة أم غير ذلك ؟

1 – $f(x) = 2$

2 – $f(x) = 2x + 1$

3 – $f(x) = 1 - 2x$

نلاحظ أنه لم يتم تحديد فترة في هذا السؤال وبالتالي فإن هذه الدوال معرفة على جميع الأعداد الحقيقية.

الحل: 1 - لاحظ أن الدالة الأولى **<u>دالة ثابتة</u>** حيث أن

$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 2$

اما عندما

$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2$

(نلاحظ ان الناتج في كلا الحالتين لم يتغير)

-2 لاحظ أن الدالة الثانية **دالة متزايدة** لأن $f(x) = 2x + 1$

اختيار قيمة

x_1, x_1

هو عشوائي من بين مجموعة الأعداد الحقيقية

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

اما عندما

$$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2(2) + 1 = 5$$

3 - لاحظ أن الدالة الثالثة **دالة متناقصة** لأن $f(x) = 1 - 2x$

$$x_1 = 1 \rightarrow f(1) = 1 - 2(1) = -1$$

$$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 1 - 2(2) = -3$$

$1 < 2$ $\qquad$ $-1 > -3$

الفصل الأول : الدوال (تمارين وتدريبات)

- تمرين: بين أي من الدوال التالية دوال متزايدة ، متناقصة أم غير ذلك

1 – $f(x) = -\frac{1}{2}$

2 – $g(x) = 3 - 5x$

3 – $h(x) = 2x + 7$

الفصل الأول: الدوال (الدالة الصريحة والدالة الضمنية)

- **الدالة الصريحة والدالة الضمنية**

تعريف: الدالة الصريحة هي الدالة التي يمكن كتابتها على الصورة $y = f(x)$

مثال: $f(x) = 5 - x^2 + 2x$

$Y = 2x - 3$

نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدالة بالرمز Y أو $f(x)$

تعريف: الدالة الضمنية هي الدالة التي تكون على الصورة $f(x , y) = 0$

مثال: $x^2 + y^2 = 1$

$3x - 2y + 5 = 0$

يمكن في بعض الأحوال تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة ، والمثال التالي يوضح ذلك:

- **مثال**: حول كل من الدوال التالية إلى دوال صريحة:

i) $3x + 4y - 12 = 0 \rightarrow 4y = 12 - 3x \rightarrow y = \frac{12-3x}{4}$

ii) $2x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 25 - 2x^2 \rightarrow y = \sqrt{25-2x^2}$

iii) $x^2 - xy - 1 = 0 \rightarrow xy = x^2 - 1 \rightarrow y = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$

الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

- **تمرين: بين أي من الدوال التالية دوال صريحة وأيها ضمني**

1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y - x = 3 - x5$

3) $x = 2y + 2$

- **تمرين: حول كل من الدوال التالية إلى دوال صريحة**

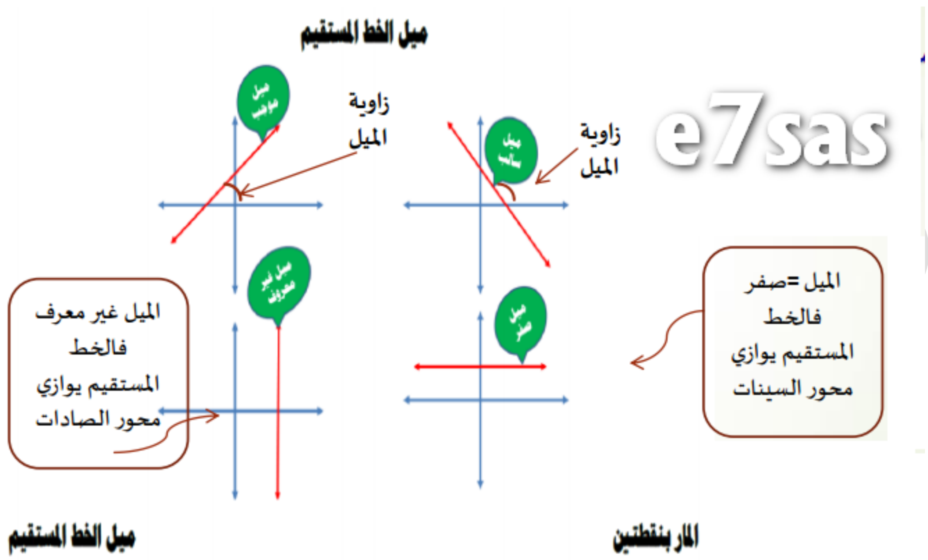
1) $2y - 3x = 6$

2) $y - 3x = 2y + 6x - 6$

الفصل الأول: الدوال (زاوية الميل)

- زاوية ميل الخط المستقيم:

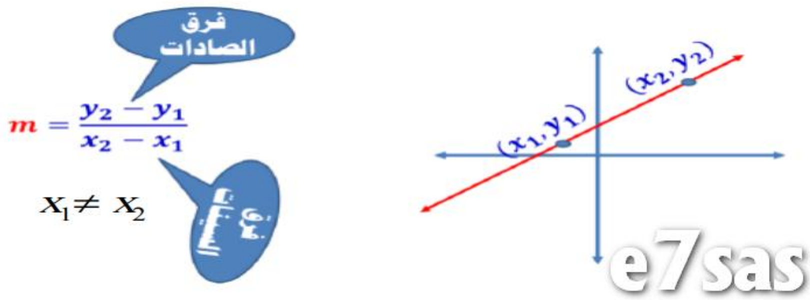
هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات x.



الفصل الأول: الدوال (ميل الخط المستقيم)

- ميل الخط المستقيم: ورمزه m

تعريف: ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(y_2 ، x_2)$ ، $(y_1 ، x_1)$ هو



- **مثال: أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقاط التالية:**

1) $(-5 ، -3) ، (3 ، 1)$

2) $(-5 ، 4) ، (4 ، -2)$

الحل:

$$1)\ m = \frac{-5-3}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$2)\ m = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

الفصل الأول: الدوال (معادلة الخط المستقيم)

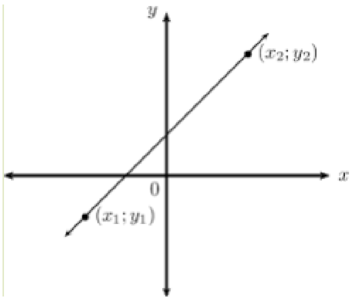
- **اشكال معادلة الخط المستقيم:**

أولا: معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (x_1 y_1) ، (x_2 ، y_2) هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3 ، 2) ، (2 ، 1) ؟

الحل: نجد الميل أولا من خلال قانون الميل السابق:



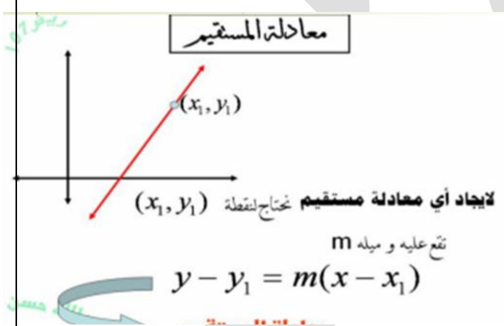
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

نلاحظ أن ميل المستقيم يساوي معامل x.

وبالتعويض في المعادلة نحصل على:

$$y - 2 = 1\,(x - 1) \rightarrow y = x - 1 + 2 \rightarrow y = x + 1$$

ثانيا: معادلة الخط المستقيم الذي علم ميله m ويمر بالنقطة (x_1 ، y_1) هي نفس المعادلة الخاصة بالحالة السابقة:



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3- ، 2 -) وميله = 2 - ؟

الحل:

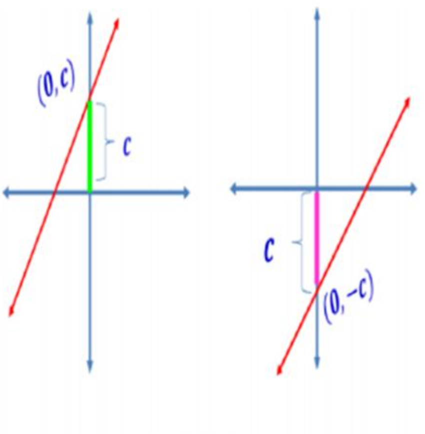
$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y + 3 = -2\,(x + 2)$$

$$\rightarrow y + 3 = -2x - 4$$

$$\rightarrow y = -2x - 7$$

ثالثا: معادلة الخط المستقيم علم فيه الميل والمقطع الصادي (نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات) ولتكن C هي:

$$y = mx + c$$



y=mx+c

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم

الذي ميله $m = 3$ ومقطعه الصادي $c = -2$ ؟

الحل:

$$y = mx + c$$

$$y = 3x - 2$$

مثال: أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم $2X + 3Y = 6$

الحل: لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة:

$$y = mx + c$$

من المعادلة المعطاة نجد أن

$2 + 3 = 6$ ومنها الميل يساوي

$3 = - 2 + 6$ $\quad m = -\frac{2}{3}$

$= -\frac{2}{3} + 2$ والمقطع الصادي

$$c = 2$$

4: تمرين أوجد معادلة كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

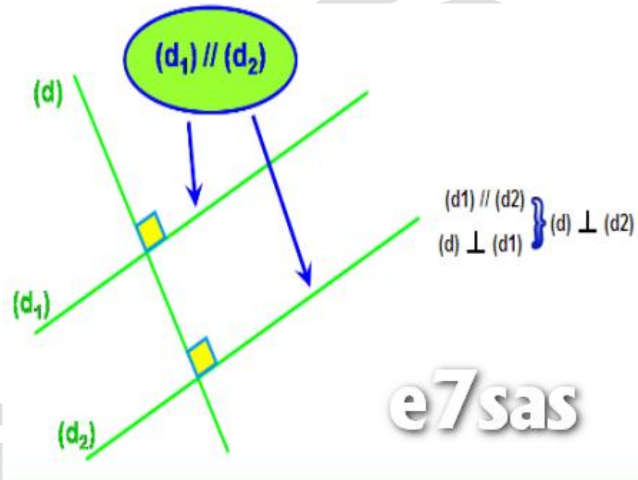
أ- المستقيم المار بالنقطة (2 –، ا) وميله $m = -3$
ب- المستقيم المار بالنقطة (4 ، 3) وميله صفر
ت- المستقيم المار بنقطة الأصل وميله 2
ث- المستقيم المار بالنقطتين (3،4) و (7،2)
ج- المستقيم الذي ميله $m = -2$ ومقطعه الصادي $c = 3$

- **تمرين: أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيمات التالية:**

١- $2y - 4x = 6$
٢- $2x - y + 5 = 0$

الفصل الأول: الدوال (التوازي والتعامد)

- **تعريف**: نقول بأن المستقيمان d_2 , d_1 متوازيان إذا وفقط اذا كان ميلهما متساوي $m_1 = m_2$ ، ويكون المستقيمان d_2 , d_1 متعامدان إذا كان $m^1 \times m^2 = -1$



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

مثال: هل المستقيمان $y - 2 = -4x$ و $y = -4x + 1$

متوازيان أم متعامدان أم غيرذلك ؟

الحل: نجد ميل المستقيم الأول والثاني والذي يساوي معامل x وذلك بعد كتابتهما على الصورة العامة $y = ax + c$

$$y - 2 = -4x \to y = -4x + 2 \to m_1 = -4$$

$$y = -4x + 1 \to m_2 = -4$$

نلاحظ أن $m_1 = m_2$ فالمستقيمان متوازيان.

مثال: هل المستقيمان $y = -2x - 9$ و $y = \frac{1}{2}x + 1$ متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك ؟

الحل: نجد ميل المستقيم الأول والثاني والذي يساوي معامل x وذلك بعد كتابتهما على الصورة العامة $y = ax + c$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

$$y = -2x - 9 \rightarrow m_2 = -2$$

لاحظ ان كلاهما

مكتوبان على الصورة العامة.

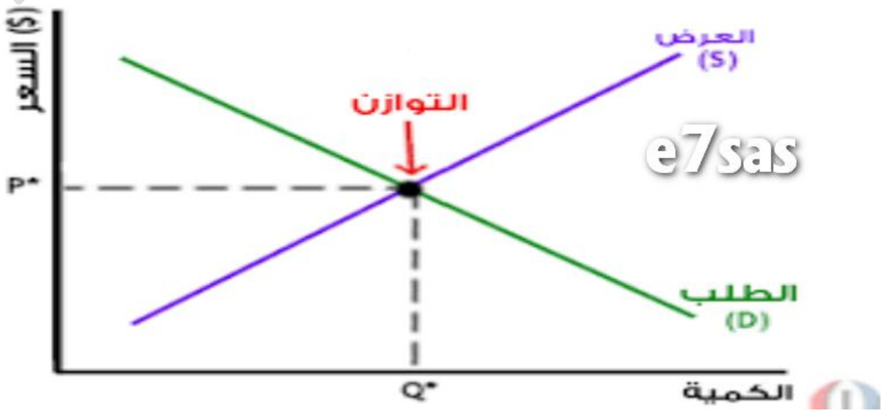
نلاحظ أن $\boldsymbol{m_1 \times m_2 = \frac{1}{2}\ -2 = -1}$ فالمستقيمان متعامدان.

<u>الفصل الأول: الدوال (تطبيقات اقتصادية)</u>

- **دالة العرض والطلب:**

- **تعريف:** **<u>دالة العرض</u>** هي كمية السلع أو الخدمات التي يعرضها منتجوها عند كل مستوى مرتقب من الأسعار ، في مدة زمنية محددة.
- **تعريف:** **<u>دالة الطلب</u>** هي كمية السلع أو الخدمات التي يرغب المستهلكون في الحصول عليها عند كل مستوى مرتقب من الأسعار ، وذلك في مدة زمنية محدودة.
- **تعريف:** **<u>نقطة التوازن</u>** وهي النقطة التي تقع عند تقاطع الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة عند سعر يمثل سعر التوازن وهو السعر الذي يقبل به العارضون وفي الوقت ذاته يكون مقبولا من قبل المستهلكين.

- **<u>دالة الطلب والعرض:</u>**



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

مثال: أوجد نقطة التوازن إذا علمت أن دالتي العرض والطلب هما:

دالة العرض: $y = 3x + 5$

دالة الطلب: $y = 25 - 2x$

الحل: عند نقطة التوازن في السوق: الطلب = العرض

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

وبتعويض قيمة $x = 4$ في دالة العرض (أو الطلب) فإننا نحصل على

$$y = 3\,(4) + 5 = 17$$

وبالتالي فإن نقطة التوازن هي (17، 4)

تمرين: أوجد نقطة التوازن إذا علمت أن دالتي العرض والطلب هما:

دالة العرض: $y = 5x + 10$

دالة الطلب: $y = 26 - 3x$

علمتنى الرياضيات : أن العدد السالب كلما كبرت أرقامه كلما صغرت قيمته
كالمتعالين على الناس ؛ كلما ازدادوا تعالياً كلما صغروا فى عيون غيرهم

E7sas

الفصل الأول:(الدوال)تمارين وتدريبات

- **تمارين وتدريب على الفصل الأول:**

1- إذا كانت f (x) = 2 فإن ... = 4 × F(3)

أ) 2 ب) 4 ج) 3 د)8

2- الدالة $F(x) = X - 2X^2 + 5x^4$ كثيرة حدود من الدرجة

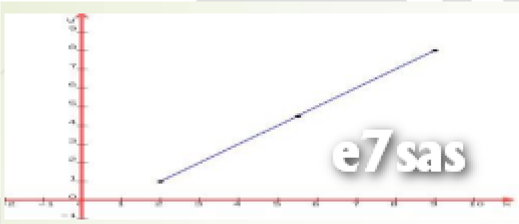
أ) الثانية ب) الرابعة ج) الأولى د)الثالثة

3- -معادلة الخط المستقيم الذي ميله = 2− ويمر بنقطة الأصل هي

أ) y = −2 ب) y = 2 ج) y = -2x د) y = 2x

الفصل الأول: (الدوال) تزايد وتناقص الدوال

4- ميل الخط المستقيم في الشكل المجاور هو قيمة



أ) موجبة ب) سالبة ج) صفر د) غير معرفة

5- إذا كانت { (2,4) , (-2,5) , (1,2) } = F(x) تمثل دالة،فإن مداها يساوي

أ) {1،2} ب) { 2، −2 ، 1} ج) { 5 ،4، 2} د){2 , −2})

6- -الدالة y = x −1 تمثل دالة

أ)صريحة ب) خطية ج) من الدرجة الأولى د) جميع ما ذكر

7- إذا كان (4 ,1) = (2x,y) , فإن قيمة .... = x + y

أ) 3 ب) 4 ج) 2 د)غير ذلك

8- إذا كانت { 9، 7، 1} = x تمثل مجموعة ما، فإن عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من المجموعة x يساوي

أ) 3 ب) 6 ج) 8 د) 9

9- -الدالة y = x −3 تمثل دالة

أ) متزايدة ب) متناقصة ج) تربيعية د) ثابتة

الفصل الأول: (الدوال) تمارين وتدريبات

10- مستقيم ميله = -٢ ومقطعه الصادي = -١ فإن معادلته هي

A) $y=2x-1$ ب) $y=-2x+1$ ج) **$y=-2x-1$**   د) $y=-2x+1$

11- -إذا كانت $Y = \{1\}$ تمثل مجموعة ما، فإن ... = $Y \times Y$

أ) (١،١)   ب) {(١ ، ١)}   ج) ١   د) {1 ,1}

12- إذا كانت $F(x) = x - 3$ وكانت $g(x) = X^2$, فإن..... = $gof(x)$

أ) $x^2 - 3$ ب) $(x-3)^2$ ج) $x^3 - 3x^2$ د) $x^3 - 3x$

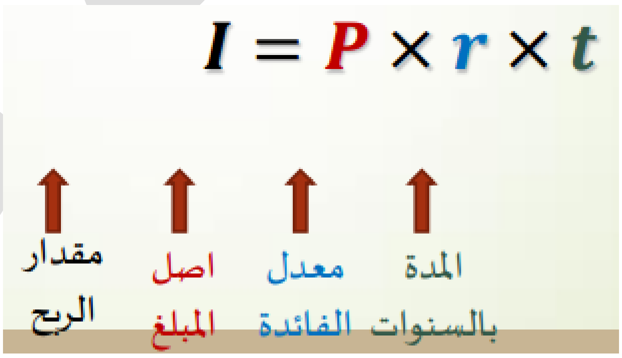
13- اعتماد على السؤال السابق، فإن... = $F \times g(x)$

أ) $x^2 - 3$ ب) $(x-3)^2$ ج) x^3-3x^2 د) $x^3 - 3x$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

- تعريف الربح (الفائدة): هو ذلك المبلغ الذي يزيد عن المبلغ الأصلي)رأس المال في بداية العملية الاستثمارية) سواء كان المبلغ الاصلي مبلغ مستثمر أو مقترض خلال فترة زمنية معينة وفي العادة تكون بالسنوات، ويقسم الربح الى قسمين:

- 1 الربح البسيط (الفائدة البسيطة): وهو تلك الفائدة التي يجنيها الشخص الذي يودع امواله في البنك بهدف استثمارها بحيث يتم احتساب الربح على المبلغ الاصلي في كل سنة أو الفائدة التي يجنيها البنك نتيجة اقراضه مبلغ مالي معين لشخص ما ..ويعطى بالصيغة التالية:



الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح البسيط)

أما جملة المبلغ (وهو اصل المبلغ مضاف إليه مقدار الربح) فيعطى بالصيغة التالية:

S: Sum

P: Principle Amount

I: Interest earned

r: Simple Interest Rate

t: Time

$$\boldsymbol{S = P + I}$$

$$\boldsymbol{S} = \underbrace{\boldsymbol{P}}_{\text{اصل المبلغ}} + \underbrace{(\boldsymbol{P \times r \times t})}_{\text{مقدار الربح}}$$

الفصل الثاني: الرياضيات المالية(الربح البسيط)

١) **مثال:** أودع شخص مبلغ ٥٠٠٠ ريال في احد البنوك بمعدل فائدة بسيطة مقداره ٥% سنويا لمدة ثلاث سنوات، أوجد مقدار الربح وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 5000, r = 0.05, t = 3$$

$$I = P \times r \times t = 5000 \times 0.05 \times 3 = 750\ Riyal$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 5000 + 750 = 5750\ Riyal$$

(جملة المبلغ)

٢) **مثال:** اقترض محمد مبلغ ٣٠٠٠٠ ريال من احد البنوك بمعدل فائدةبسيطة مقداره ١٢% سنويا لمدة عشر سنوات سنوات، أوجد مقدار الربح البسيط وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 30000, r = 0.12, t = 10$$

$$I = P \times r \times t = 30000 \times 0.12 \times 10 = 3600\ Riyal\ )$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 30000 + 36000 = 33600\ Riyal\ )$$

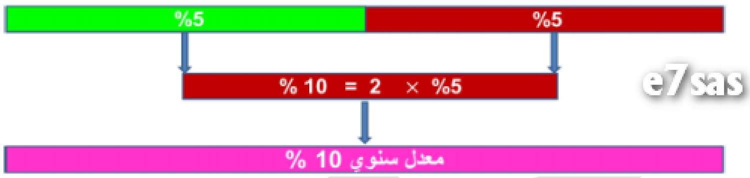
(جملة المبلغ)

ملاحظة: احيانا قد يعطى معدل الربح (الفائدة)بمعدل غير سنوي، مثل نصف سنوي أو شهري أو ثلث سنوي)كل اربعةأشهر(وفي هذه الحالة يجب تحويله إلى معدل سنوي كالاتي :

الحالة الأولى : نصف سنوي

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل نصف سنوي	المعدل النصف سنوي × 2	المعدل السنوي

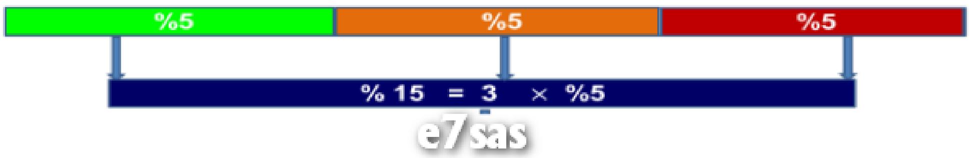
اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل نصف سنوي فان المعدل السنوي -



الحالة الثانية: معدل ثلث سنوي (كل أربعة شهور) :

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل ثلث سنوي كل أربعة شهور	المعدل الثلث سنوي × 3	المعدل السنوي

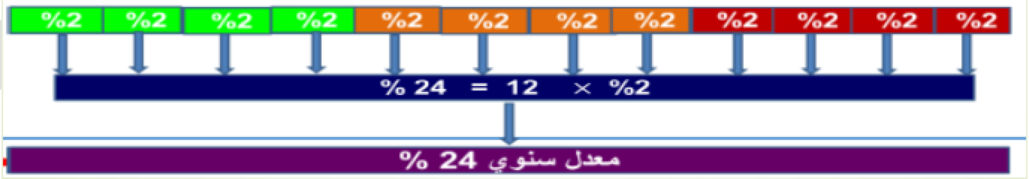
اذا كان معدل الفائدة البسيطة 5 ٪ معدل ثلث سنوي فان المعدل السنوي -



الحالة الثالثة: معدل شهري

معدل فائدة غير سنوي	تحويل معدل الفائدة الي معدل سنوي	المعدل السنوي
معدل شهري	المعدل الشهري × 12	المعدل السنوي

اذا كان معدل الفائدة البسيطة 2 ٪ معدل شهري فان المعدل السنوي - ....



٣) **مثال**: اقترض احمد مبلغ ٥٠٠٠ ريال من احد البنوك بمعدل فائدة نصف سنوي مقداره ٤% لمدة ٦ سنوات، أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ؟

الحل:

$$P = 5000,\ r = 0.04 \times 2 = 0.08,\ t = 6$$

$$I = P \times r \times t = 5000 \times 0.08 \times 6 = 2400\ Riyal\ )$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 5000 + 2400 = 7400\ Riyal\ )$$

(جملة المبلغ)

٤)**مثال**: اودع شخص مبلغ ٨٠٠٠ ريال في احد البنوك بمعدل فائدة ثلث سنوي مقداره ٣% لمدة ٤ سنوات، أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل:

$$P = 5000,\ r = 0.03 \times 3 = 0.12,\ t = 4$$

$$I = P \times r \times t = 8000 \times 0.09 \times 4 = 2880\ Riyal\ )$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 8000 + 2880 = 10880\ Riyal\ )$$

(جملة المبلغ)

الفصل الثاني: الرياضيات المالية (الربح المركب)

ملاحظة: احيانا قد تكون المدة t بالأشهر وليست بالسنوات، وفي هذه الحالة يجب تحويلها الى سنوات من خلال تقسيمها على١٢(عدد شهور السنة الواحدة).

فمثلا، اذ اكانت مدة الاستثمار = ١٨ شهرا،فإن المدة بالسنوات هي $t= \frac{18}{12}$

أما إذا كانت مدة الاستثمار = ٣٠ شهرا، فإن المدة بالسنوات هي $t = \frac{30}{12}$

وهكذا....

١)**مثال** : اودع شخص مبلغ ٢٠٠٠ ريال في احد البنوك بمعدل فائدة سنوية مقدارها ٧% لمدة ٩ اشهر ,أوجد مقدار الفائدة البسيطة وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

$$P = 2000,\ r = 0.07,\ t = \frac{9}{12}$$

$$I = P \times r \times t = 2000 \times 0.07 \times \frac{9}{12} = 105\ Riyal\ )$$

(مقدار الربح)

$$S = P + I = 2000 + 105 = 2105\ Riyal\ )$$

(جملة المبلغ)

الربح المركب: هي عملية اضافة الربح (الفائدة) على اصل المبلغ في السنة الأولى ليصبح لدينا رأس مال جديد ومن ثم حساب الربح على هذا المبلغ في السنة الثانية واضافته على جملة المبلغ وهكذا حتى نهاية المدة بالسنوات، ونلاحظ أن الربح المتحقق في هذه الطريقة يكون أكبر من الربح البسيط. ويعطى قانون الربح المركب بالصيغة التالية:

$$S = P \times (\ 1 + \frac{r}{n})\ n{\times}t$$

حيثn: بالسنوات، s: جملة المبلغ

أما مقدار الربح المركب فيمكن ايجاده من خلال الفرض بين جملة المبلغ ناقص اصل المبلغ كالآتي:

$$I = S - P$$

ملاحظات على قيمة الفائدة المركبة (t) :

1) إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل سنوي، فإنها تعطى مرة واحدة في السنة (n =1).

2)إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل نصف سنوي، فإنها تعطى مرتين في السنة بمعنى (n = 3).

3)إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل ثلث سنوي، فإنها تعطى ثالث مرات في السنة (n = 3)

4)إذا كانت قيمة الفائدة معطاة في السؤال بشكل شهري، فإنها تعطى ١٢ مرة في السنة (n =١٢)

مثال: أودع خالد مبلغ ٥٠٠٠ ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة سنوية مقدارها٨% لمدة ٣ سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل

$$S = P \times (\ 1 + \frac{r}{n})\ n{\times}t$$

$$S = 5000 \times (1+ \frac{0.08}{3}\ )^{\ 1\times3} = 6298.5$$

مقدار جملة المبلغ بعد ثلاث سنوات

$$I = S - P = 6298.5 - 5000 = 1298.5\ Riyal$$

مقدار الربح المركب بعد ثلاث سنوات

مثال: أودع شخص مبلغ ٧٠٠٠ ريال في أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية مقدارها١٠% لمدة ٥ سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل: $S = P \times (1 + \frac{r}{n})\ n \times t$

$S = 7000 \times (1 + \frac{0.01}{2})^{2\times 5} = 11402$

مقدار جملة المبلغ بعد خمس سنوات

$I = S - P = 11402 - 7000 = 4402\ Riyal$

مقدار الربح المركب بعد خمس سنوات

مثال: اقترض شخص مبلغ ١٢٠٠٠ ريال من أحد البنوك بمعدل فائدة مركبة ثلث سنوية مقدارها 7% لمدة ٦ سنوات، أوجد مقدار الربح المركب وجملة المبلغ في نهاية المدة؟

الحل: $S = P \times (1 + \frac{r}{n})\ n \times t$

$S = 12000 \times (1 + \frac{0.07}{3})^{3\times 6} = 18{,}175.6$

مقدار جملة المبلغ بعد ست سنوات

$I = S - P = 18{,}175.6 - 12000 = 6{,}175.6\ Riyal$

مقدار الربح المركب بعد ست سنوات

<u>الفصل الثاني: الرياضيات المالية (تمارين ومسائل)</u>

السؤال الأول: الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة مركبة مقدارها٥% لمدة ثلاث سنوات يساوي ....

السؤال الثاني: الفائدة البسيطة لمبلغ ١٠٠٠ ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة بسيطة مقدارها 5%لمدة ٢٠ شهر يساوي...........

السؤال الثالث: الفائدة المركبة لمبلغ ٥٠٠٠ ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة مركبة شهرية مقدارها١% لمدة اربع سنوات يساوي...........

السؤال الرابع: الفائدة البسيطة لمبلغ ٥٠٠٠ ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة بسيطة شهرية مقدارها١% لمدة اربع سنوات يساوي

<u>علمتني الرياضيات : أن العدد السالب كلما كبرت أرقامه كلما صغرت قيمته</u>
<u>كالمتعالين على الناس ؛ كلما ازدادوا تعالياً كلما صغروا في عيون غيرهم</u>

E7sas

المحاضرة المباشرة الأولى

- اذا كانت $A=\{x,y,z\}$ ، $B=\{-1,1\}$ ، $C=\{3,5,7\}$

اوجد كل مما يلي:

1) $n(A)=3$ (عدد عناصر المجموعة A).

2) $A\times B=\{(x,-1),(x,1),(y,-1),(y,1),(z,-1),(z,1)\}$

(الضرب الديكارتي لمجموعتين A,B).

3) $B\times B=\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$.

4) $P(A)=\{\phi,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$.

5) $P(B)=\{\phi,\{-1\},\{1\},\{-1,1\}\}$.

6) $A\times C=\{(x,3),(x,5),(x,7),(y,3),(y,5),(y,7),$
$(z,3),(z,5),(z,7)\}$.

7) $C\times B=\{(3,-1),(3,1),(5,-1),(5,1),(7,-1),(7,1)\}$

8) $P(C)=\{\phi,\{3\},\{5\},\{7\},\{3,5\},\{3,7\},\{5,7\},$
$\{3,5,7\}\}$.

9) $n(B\times C)=n(B)\times n(C)$
$= 2\times 3=6$.

10) $n(A\times C)=n(A)\times n(C)$
$\Downarrow \quad = 3\times 3=9$.

عدد عناصر الضرب الديكارتي لمجموعتين.

- إذا كان $(2X+5, 10) = (3, -3y-2)$ فاوجد قيمة كل من X, y؟

الحل:-

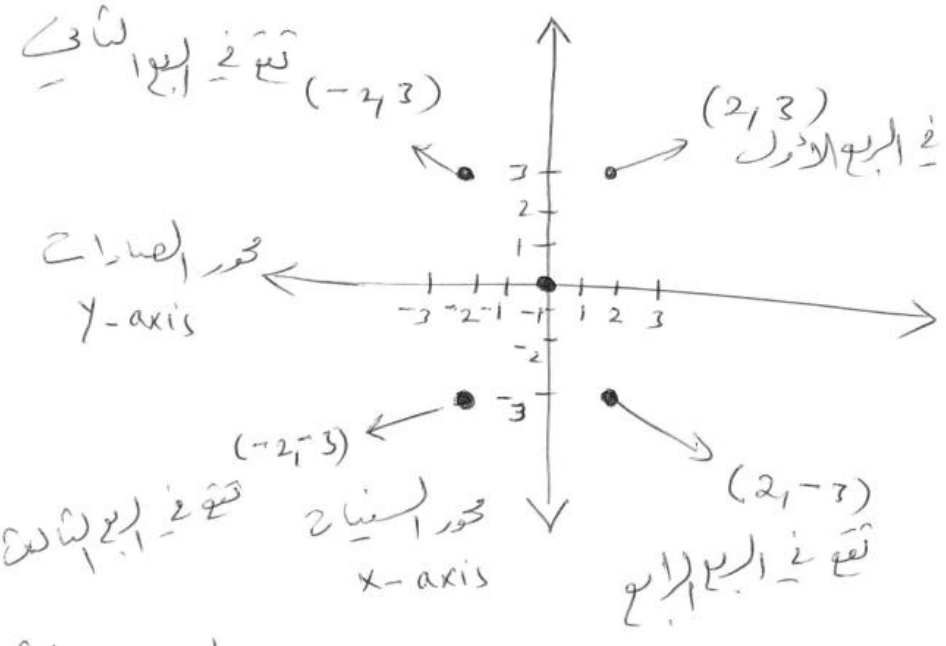
$$2X+5 = 3 \Rightarrow 2X = 3-5$$
$$\Rightarrow 2X = -2$$
$$\Rightarrow \boxed{X = -1}$$

$$-3y-2 = 10 \Rightarrow -3y = 10+2$$
$$\Rightarrow -3y = 12$$
$$\Rightarrow \boxed{y = -4}$$

- حدد موقع كل من الأزواج التالية على المستوى البياني:

① $(-2,-3)$ ، ② $(2,-3)$ ، ③ $(-2,3)$ ، ④ $(2,3)$

الحل:-



(نهاية التمارين الخاصة بالمحاضرة المسجلة الأولى)

تمارين المحاضرة المسجلة الثانية

- تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل دالة:

1) $R=\{(-1,2),(2,2),(3,5),(6,1)\}$

R في هذه الحالة تمثل دالة حيث أن كل عنصر في المجال ارتبط بعدد واحد فقط في المجال المقابل

2) $R=\{(0,7),(\underline{\underline{1}},5),(\underline{\underline{1}},2),(3,-4)\}$

R ليست دالة حيث أن العدد 1 له أكثر من صورة .

3) $R=\{(-3,1),(-1,1),(0,1),(4,1)\}$

R تمثل دالة في هذه الحالة.

4) $R=\{(\underline{\underline{-4}},0),(\underline{\underline{-4}},4),(2,3),(1,9)\}$

R ليست دالة، العدد -4 له أكثر من صورة .

5) $R=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

R ليست دالة، العدد 3 له خمس صور .

6) $R=\{(1,1),(2,2),(4,4),(9,9)\}$

R تمثل دالة .

- تمرين: إذا كان $f(x)=2x^2-3x$ ، أوجد

i) $f(0)=2(0)^2-3(0)=0.$

ii) $f(-4)=2(-4)^2-3(-4)=32+12=44$

- تمرين : اذا كانت $f(x)=3x^2$ ، $g(x)=x+1$ ، فاوجد :-

i) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x^2+(x+1)=3x^2+x+1$

ii) $(f\times g)(x)=f(x)g(x)=3x^2(x+1)=3x^3+3x^2$.

iii) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=3(x+1)^2$

$=3(x^2+2x+1)$

$=3x^2+6x+3$.

vi) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2)=3x^2+1$.

v) $g^{-1}(x)=??$

Let $y=x+1 \Rightarrow x=y-1 \Rightarrow g^{-1}(x)=y-1$

$f^{-1}(x)=??$

Let $y=3x^2 \Rightarrow x^2=y/3 \Rightarrow x=\mp\sqrt{y/3}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\pm\sqrt{y/3}$.

نأتي حل التمارين الخاصة بالمحاضرة
المباشرة الثانية

تمارين المحاضرة المسجلة الثالثة

- اي من الدوال التالية دالة متزايدة ، متناقصة أم غير ذلك؟

1) $f(x) = -\frac{1}{2}$.

نفرض أن f :-

$x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = f(1) = -\frac{1}{2}$

$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = f(2) = -\frac{1}{2}$

نلاحظ أن

$1 < 2$ لكن $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

∴ الدالة ثابتة.

2) $g(x) = 3 - 5X$

نفرض أن

$x_1 = 1 \Rightarrow g(1) = 3 - 5 = -2$

$x_2 = 2 \Rightarrow g(2) = 3 - 10 = -7$.

$1 \leq 2$ لكن $-2 \geq -7$

∴ الدالة متناقصة.

3) $h(x) = 2x + 2$.

$x_1 = 1 \Rightarrow h(1) = 2(1) + 2 = 4$

$x_2 = 2 \Rightarrow h(2) = 2(2) + 2 = 6$.

$1 < 2$ لكن $4 < 6$

∴ الدالة متزايدة.

- تمرين: أي من الدوال التالية صريح وأيها ضمني:-

1) $y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow$ دالة صريحة

2) $y - x = 3 - 5x \Rightarrow$ دالة ضمنية

3) $x = 2y + 2 \Rightarrow$ دالة ضمنية

- تمرين: حول كل من الدوال التالية إلى دوال صريحة:-

1) $2y - 3x = 6$.

$2y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3x+6}{2} = \frac{3}{2}x + 3$

2) $y - 3x = 2y + 6x - 6$

$y - 2y = 6x + 3x - 6$.

$-y = 9x - 6 \Rightarrow y = -9x + 6$

- تمرين: أوجد معادلة الخط المستقيم فيما يلي:-

أ- المستقيم المار بالنقطة (1,2) وميله = -3

a) $(x_1, y_1) = (1, 2)$

$m = -3$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -3(x - 1)$

$y - 2 = -3x + 3 \Rightarrow y = -3x + 3 + 2$

$y = -3x + 5$.

ب- المستقيم المار بالنقطة (3,4) وميله = صفر

b) $(x_1, y_1) = (3, 4)$

$m = 0$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 0(x - 3) \Rightarrow y = 4$

ج) المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = 2 ؟

c) $(x_1, y_1) = (0,0)$,

$m = 2$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x.$$

د) المستقيم المار بالنقطتين (7,2) و (3,4) ؟

$(x_1, y_1) = (3,4)$, $(x_2, y_2) = (7,2)$.

d) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-4}{7-3} = \dfrac{-1}{2}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\tfrac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y - 4 = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} + 4$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{2}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{11}{2}.$$

هـ) المستقيم الذي ميله = -2 ، المقطع الصادي = 3 .

e) $m = -2$, $c = 3$

$$y = mx + c$$

$$y = -2x + 3$$

- تمرين : أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيمات التالية :

1) $2y - 4x = 6$

الحل: $2y = 4x + 6$

$y = \underline{2}x + \underline{3}$

$m = 2$

$c = 3$

2) $2x - y + 5 = 0$

$2x = y - 5$

$x = \tfrac{1}{2}y - \tfrac{5}{2}$

$m = \tfrac{1}{2}$

$c = -\tfrac{5}{2}$

- تمرين :- اوجد نقطة التوازن اذا كان لدينا :-

دالة العرض :- $Y = 5X + 10$

دالة الطلب :- $Y = 26 - 3X$

الحل :- نساوي دالة العرض مع دالة الطلب

$$5X + 10 = 26 - 3X$$

$$5X + 3X = 26 - 10$$

$$8X = 16$$

$$\boxed{X = 2}$$

بتعويض قيمة $X=2$ في دالة العرض (أو دالة الطلب)
نحصل على :-

$$Y = 5(2) + 10$$

$$Y = 20$$

نقطة التوازن $(2,20)$.

لاحظ التمارين الخاصة بالمحاضرة المسجلة الثالثة

التمارين الخاصة بالمحاضرة المسجلة الرابعة

١) الفائدة المركبة لمبلغ 1000 ريال ، معدل الفائدة المركبة 5% ، لمدة ثلاث سنوات؟

الحل :

$$S = P \times (1 + \tfrac{r}{n})^{n \times t}$$
$$= 1000 \times (1 + \tfrac{0.05}{1})^{1 \times 3}$$
$$= 1,157.6 \ SR.$$
$$I = S - P = 1,157.6 - 1000 = 157.6 \ SR.$$

٢) الفائدة البسيطة لمبلغ 1000 ريال ، معدل الفائدة البسيطة 5% ، لمدة 20 شهر ؟

$$I = P \times r \times t$$
$$= 1000 \times 0.05 \times \tfrac{20}{12} = 83.3 \ SR.$$

شئت الجمع

$$S = P + I = 1000 + 83.3 = 1083.3$$

٣) الفائدة المركبة لمبلغ 5000 ريال ، معدل الفائدة المركبة الشهري 1% لمدة اربع سنوات؟

$$S = P \times (1 + \tfrac{r}{n})^{n \times t}$$
$$= 5000 (1 + \tfrac{0.01}{12})^{12 \times 4} = 5,203.9$$
$$I = S - P$$
$$= 5,203.9 - 5000 = 203.9.$$

٤) الفائدة البسيطة لمبلغ 5000 ريال ، معدل الفائدة البسيطة الشهري 1% لمدة اربع سنوات؟

$$I = P \times r \times t \qquad (r = 0.01 \times 12 = 0.12)$$
$$= 5000 \times 0.12 \times 4 = 2,400$$
$$S = P + I = 5000 + 2,400 = 7,400 \ SR.$$

علمتني الرياضيات : ان لكل متغير قيمة تؤدي إلى نتيجة. .

فاختر متغيراتك جيداً لتصل إلى نتيجةٍ ترضيك

E7sas

الفصل الثالث .. النهايات والاتصال (مفهوم النهاية) ..

أولاً: مفهوم النهايات :

تعريف نهاية الدالة $f(x)$ بأنها عملية إيجاد قيمة تلك الدالة عندما تقترب قيمة المتغير x من قيمة معينة ولتكن a وعادة ما تكتب على الصورة التالية :

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

النهاية

x تقترب من a

وتقرأ بأنها نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :

إذا كانت $f(x)= x^3+2x^2-5x-1$ فأوجد $\lim_{x\to -1} f(x)$ ؟

الحل :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -1}\ x^3 + 2x^2 - 5x - 1 = \ -1^3 + 2(-1^2) - 5(-1) - 1 = 6$$

مثال آخر :

إذا كانت $f(x)= x^2+2x-1$ فأوجد

١/ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ؟

٢/ $\lim_{x\to -2} f(x)$ ؟

<u>**ملاحظة من ورد :**</u> لما ننسى الحل او نلخبط بالاختبار ، نطالع بالمسأله نلقاها تعويض مباشر بدون أي صعوبة ، لأن حدد لنا عندما x تروح لـ -٢ او ٢ زي مو مكتوب بالمسأله ، نعوض عن x بالعدد المكتوب ونحسب فقط

الحل :

ج١/

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 + 2x - 1 = 2^2 + 2(2) - 1 = 7$$

ج٢/

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -2}(x^2 + 2x - 1) = (-2)^2 + 2(-2) - 1 = -1$$

<u>**ملاحظه أخرى :**</u> لما يكون العدد سالب لازم نحط الأقواس ، وأيضاً لما يكون عندنا ضرب زي بالحل اللي فوق كتبت $2(2)$ هذي معناتها ضرب ، وبنفس الطريقة بالأعداد السالبه والأعداد اللي تكون مرفوعه لأس تكتب بهذا الشكل $(-2)^2$ سواءً موجب او سالب ، ننتبه للأقواس عشان لما ندخلها بالآله الحاسبة ما يطلع الناتج خطأ مهمه جداً الاقواس بالحسابات .

الفصل الثالث .. النهايات (قوانين النهايات) ..

جبر النهايات :

١/ إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال : إذا كانت $f(x) = -2$ فأوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$ ؟

الحل : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 2} -2 = -2$

نلاحظ : أن الدالة ثابتة ، وبالتالي ناتج التعويض دائماً يساوي قيمة الثابت ، والذي يساوي -2 .

٢/ إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = mx + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال : إذا كانت $f(x) = 1 - 2x$ فأوجد $\lim_{x\to -3} f(x)$ ؟

الحل : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -3} 1 - 2(-3) = 7$.

٣/ إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = m$ فإن $\lim_{x\to a} g(x) = n$ وكانت c عدد حقيقي فإن :

$i.\ \lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = m \pm n$

$ii.\ \lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(X) = c \times m$

$iii.\ \lim_{x\to a}\,[f(x) \times g(x)]\ \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = m \times n$

$iv.\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{m}{n}\ \ n\neq 0$

مثال :اذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ ، $\lim_{x\to 2} h(x) = 10$ فأوجد :

$i.\ \lim_{x\to 2} 8[f(x) - g(x)]$

$ii.\ \lim_{x\to 2}[f(x) \times g(x)]$

$iii.\ \lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$

$iv.\ \lim_{x\to 2}[f(x) - g(x) \times h(x)]$

الحل :

$i.\ \lim 8_{x\to 2}[f(x) - g(x)] = 8(5 - (-8)) = 8(13) = 104$

$ii.\ \lim_{x\to 2}[f(x) \times g(x)] = 10 \times (-8) = -80$

$iii.\ \lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{10}{5} = 2$

$iv.\ \lim_{x\to 2}[f(x) - g(x) \times h(x)] = 5 - (-8) \times 10 = 5 - (80) = 85$

٤/ إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وكان n عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال :

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3(1)-1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 64$$

أمثلة أوجد نهاية كل من الدوال التالية :

1. $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7) = 3(2)^3+5(2)^2-7 = 3(8)+5(4)-7 = 24+20-7 = 37$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+7}{x-5} = \frac{3(3)^2+7}{3-5} = \frac{3(9)+7}{-2} = \frac{27+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$

3. $\lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{2(2)-1}{5(2)+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

4. $\lim_{x\to 2} = e^x = e^2$

الدالة الأسيّة : هي الدالة التي تكتب على الصورة على الصورة $f(x)= e^x$ حيث $e \approx 2.718$ ويعتبر e أساس اللوغاريتم الطبيعي ويكتب على الصورة ($\ln x = \log_e x$) .

وقد تعلمنا سابقاً أن هنالك علاقة ما بين الأسس واللوغاريتمات حسب الصيغة التالية :

$x = \ln a$ تكافئ $e^x = a$

5. $\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^{2+2(1)+1}} = e^{1+2+1} = e^4$

6. $\lim_{x\to 2}(\log(3x^2+5)) = \log(3(2)^2+5) = \log(3(4)+5) = \log(12+5) = \log 17$

الدالة اللوغاريتمية: هي الدالة التي تكتب على الصورة $f(x) = \log_a x$. ويسمى باللوغاريتم العشري إذا كان اساس اللوغاريتم عشرة ويكتب على الصورة $f(x) = \log x$. أما اللوغاريتم الطبيعي فهو اللوغاريتم الذي اساسه العدد e ويكتب على الصورة $f(x) = \ln x$.

7. $\lim_{x\to 3}(\ln(2x-5)) = \ln(2(3)-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$

8. $\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3 = (3(1)^3+4(1)-2)^3 = (3+4-2)^3 = 5^3 = 125$

9. $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{(2)^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9}$

ملاحظه : الأقواس في المسائل السابقه يعني ضرب ، ندخلها بالآله الحاسبة بالأقواس عشان الحسابات تطلع صح ، لأن فيه أسس وفيه إشارات سالبه .

٥/ إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة ، حسب الشكل التالي :

$$F(x)=\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 & .x < d \\ b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 & .x > d \end{cases}$$

وأردنا إيجاد قيمة $\lim_{x \to c} f(x)$ ، ففي هذي الحالة قد تنشأ لدينا ثلاث حلات :

أ) قد تقع c ضمن مجال القاعدة الأولى .

ب) قد تقع c ضمن مجال القاعدة الثانية .

ج) قد تقع c على الحد الفاصل بين المجالين .

مثال : إذا كانت :

$$F(x)=\begin{cases} 3x^2 + 5 & .x < 1 \\ 7x - 2 & .x > 1 \end{cases}$$

فأوجد قيمة كل مما يلي :

1.. $\lim_{x \to 3} f(x)$

2. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

3. $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل:

١. نلاحظ أن العدد 3 يقع ضمن مجال القاعده الثانية لأن 3>1

$$.\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} 7x - 2 = 7(3) - 2 = 21 - 2 = 19$$

عوضنا بالمعادلة الثانية لأن 3 أكبر من الواحد .

.٢

نلاحظ أن العدد $\frac{1}{2}$ يقع ضمن مجال القاعدة الثانية $\frac{1}{2} < 1$

نعوض بالمعادلة الأولى

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} 3x^2 + 5 = 3(\tfrac{1}{2})^2 + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

.٣

العدد 1 يقع على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا النهايه من اليمين $\lim_{x\to1^+} f(x)$ والنهايه من اليسار $\lim_{x\to1^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1} 7x - 2 = 7(1) - 2 = 7 - 2 = 5$$

إشارة + تعني الإقتراب

من الطرف الأيمن للعدد

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1} 3x^2 + 5 = 3(1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

إشارة - تعني الإقتراب

من الطرف الأيمن للعدد

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

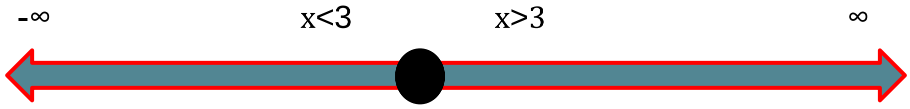
$\longrightarrow$ $\lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

مثال آخر : إذا كانت

$$F(x)=\begin{cases} \frac{3}{x}+1 & .x > 3 \\ \frac{7-x}{2} & .x < 3 \end{cases}$$

فأوجد قيمة $\lim_{x\to3} f(x)$ ؟

الحل :



$f(x)\,\frac{3}{x}+1$

$f(x)\,\frac{7-x}{2} \longrightarrow 3 \longleftarrow$

الإقتراب من اليسار الإقتراب من اليمين

نلاحظ أن $\lim_{x\to3+} f(x)\frac{3}{x}+1 = \lim_{x\to3-} f(x)\frac{7-x}{2} = 2$

فنقول بأن النهاية موجودة لأن (النهاية من اليمين = النهاية من اليسار)

<u>*تمارين : أوجد قيمة نهاية كل من الدوال التالية :</u>

1. $\lim_{x\to2}(x^2-2x+1)$
2. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$
3. $\lim_{x\to2}\frac{2x-3}{x+4}$
4. $\lim_{x\to0} e^x$
5. $\lim_{x\to6}\sqrt[4]{x^2-3x-8}$
6. $\lim_{x\to3}(\log(2x+4))$
7. $\lim_{x\to2}(\ln(x^2+1))$
8. $\lim_{x\to-1}(2x^2+5x+1)^2$
9. $\lim_{x\to1}\sqrt{x}$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - x^2 & . x > -1 \\ \frac{7+x^2}{2} & . x < -1 \end{cases}$$

المطلوب إيجاد : $\lim_{x\to -2} f(x)$ و $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؟

$$11. .f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{2x} & . x > 1 \\ \frac{x^3-x^2}{3} & . x < 1 \end{cases}$$

المطلوب إيجاد $\lim_{x\to 1} f(x)$ ؟

ملاحظات مهمة :

- ننتبه للأقواس في الأسس وفي الضرب ، وأيضاً في اللوغاريتمات ، فائدة الأقواس عشان لما ندخلها بالآله الحاسبه تطلع النتيجه صح .
- ننتبه للنهايات وإن في بعضها تجي على صيغة جذور ولوغاريتم ، مافيه شيء صعب مع التطبيق والفهم بإذن الله .
- بالنسبة للنهايات اللي هي lim موجوده بالآله الحاسبه ، بس مو كلها بنقدر ندخلها بعضها يحتاج لها حل يدوي تجنباً للأخطاء ، خصوصاً إن الإختبار النهائي في خيارات وأ:يد بيكون فيه تشابهه .

علمتنى الرياضيات : أنه فيه شيء أسمه ما لا نهاية. .

فلا تكن محدود الفكر و الطموح

E7sas

الفصل الثالث : النهايات والاتصال .. (نهاية الدوال غير محددة القيمة) ..

هنالك بعض الدوال يكون ناتج نهايتها عند التعويض بقيمة معينة بالتعويض المباشر قيمة غير معرفة .

لاحظ الشكل التالي :

أنواع الكميات العددية

$\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{عدد حقيقي}}$ = كمية حقيقية

$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد حقيقي}}$ = صفر

$\frac{\text{عدد حقيقي}}{\text{صفر}}$ = كمية غير معرفة

$\frac{\text{صفر}}{\text{wtv}}$ = كمية غير معرفة

$\frac{\infty}{\infty}$ = كمية غير معرفة

يمكن التخلص من حالة عدم التعيين (القيمة غير معرفة) التي تظهر عند حسابات النهايات بأحد الطرق التالية :

أولاً : عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق إحدى الطرق التالية :

أ / باستخدام طرق التحليل المختلفة ثم الاختصار ثم التعويض :

١/ إستخراج عامل مشترك .

٢/ الفرق بين مربعين .

٣/ تحليل المقدار الثلاثي.

الطريقة الأولى /

مثال : أوجد نهاية كل مما يلي :

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

الحل: بالتعويض المباشر نجد أن :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \frac{1-1}{(-1)+1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معرفة

إزالة هذه الحالة نحلل البسط لعوامله الأولية

قانون الفرق بين مربعين :

$(x^2-y^2) = (x-y)(x+y)$

$$\lim_{x\to -1} \boxed{\frac{x^2-1}{x+1}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x-1) = (-1)-1 = 2$$

عملية الإختصار بين البسط والمقام

قانون الفرق بين مربعين :

$(x^2-y^2) = (x-y)(x+y)$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$

الحل : كمية غير معرفة عند التعويض

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

3. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ قانون تحليل المقدار الثلاثي

الحل : بالتعويض المباشر = كمية غير معرفة :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(1)^2-3(1)+2}{1-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية ونقوم بعملية الاختصار ثم التعويض بقيمة a

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1}(x-2)=1-2=-1$$

4.$\lim_{x\to0}\frac{\boxed{x^2+x}}{2x}$ قانون إخراج العامل المشترك بين الحد الأول والحد الثاني

الحل : بالتعويض المباشر = كمية غير معرفة

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{2x}=\frac{(0)^2+0}{(2)\times0}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\times2}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

الطريقة الثانية /

بإستخدام القانون التالي :

$$\lim x_{x\to a}\frac{\cancel{x^n}-\cancel{a^n}}{\cancel{x^m}-\cancel{a^m}}=\frac{n}{m}\times a^{n-m}$$

مثال : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^3-8}?$$

الحل : بالتعويض في القانون :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x^4}-\cancel{2^4}}{\cancel{x^3}-\cancel{2^3}}=\frac{4}{3}\times(2)^{4-3}=\frac{8}{3}$$

مثال آخر : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^4-81}{x^2-9}?$$

الحل بالتعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ لذا نقوم بالحل بالتعويض في القانون كما في المثال السابق :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^4-81}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{x^4-3^4}}{\cancel{x^2-3^2}}=\frac{4}{2}\times(3)^{4-2}=2\times9=18$$

مثال آخر : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^3-125}?$$

الحل بالتعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ لذا نقوم بالحل بالتعويض في القانون كما في المثال السابق :

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^3-125}=\lim_{x\to5}\frac{\cancel{x^2-5^2}}{\cancel{x^3-5^3}}=\frac{2}{3}\times(5)^{2-3}=\frac{2}{3}\times(5)^{-1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

$\boxed{\text{للتخلص من الأس السالب } (5)^{-1}=\frac{1}{5}}$

ثانياً / عندما تكون نتيجة التّعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود بحيث كان المطلوب إيجاد نهاية حاصل قسمه **f** على الدالة **g** عندما **x→∞** فإننا نطبق إحدى النتائج التالية :

١/ القاعدة (١) : إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

مثال : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+2x+1}$$

نلاحظ أنَّ نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ ، وبالتالي سنتعامل معها حسب القاعدرة رقم (١) :

الحل : بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام إذاً :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+2x+1}=0$$

توضيح بسيط وللتسهيل :

طبعاً على طول إذا كانت الـ $x\to\infty$ راح نشوف أي وحدة من القواعد الثلاث تنطبق على المعادلة ، إما تكون الأولى اللي هي درجة البسط أقل من المقام يعني أصغر ، هنا على طول تساوي **0** بدون حل ، فقط تطبيق قاعدة ، زي المثال اللي فوق .

٢/ القاعدة (٢) : إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن :

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

مثال : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$$

الحل : بما أن درجة البسط = درجة المقام إذاً :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5} = \frac{1}{3}$$

بشرح لكم من وين جات $\frac{1}{3}$:

القاعدة تقول إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام

يعني درجة الأس إما تكون تربيع أو تكعيب أو غيرها ، ويكون الأس الموجود بالبسط نفسه بالمقام ، فأن معامل x بأكبر أس في البسط مقسوم على معامل x بأكبر أس في المقام ،

يعني إذا كان عندنا x في البسط مرفوعة لأس نشوف أكبر أس وين وناخذ معامله ، المعامل اللي هو العدد الثابت اللي قبل x ، زي المثال اللي فوق مكتوب x^3 فقط في البسط مافيه عدد قبله صح ؟ بيكون *1* لأن ما فيه شيء قبله ، وبالنسبة للمقام مكتوب $3x^3$ هنا بيكون المعامل *3*.

ونركز ناخذ أكبر أس ، لأن مكتوب في المقام $3x^3$ ومعها x^2 وإحنا نبغى ناخذ اللي يساوي x^3 واللي يساويها اللي درجة الأس مساوية لها ، أتمنى إني أفدتكم بالشرح وفهمتوا النقطه هذي .

الرياضيات جدّاً سهل بس يبغى له شوية تركيز مع فهم ، بعطيكم مثالين من عندي على هذي النقطة عشان تفهمونها أكثر وتستوعبون الشرح اللي كتبته مع خالص أمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح :

مثلاً :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-8-2}{9x^2-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{9}$$

معامل البسط = *4* ، ومعامل المقام = *9*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+2}{x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1}$$

معامل البسط = *2* ، ومعامل المقام = *1*

٣/ القاعدة (٣) : إذا كانت درجة البسط أبر من درجة المقام :

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

مثال : أوجد نهاية المقدار التالي :

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^3+x}{x^2+5} \ ?$$

الحل : بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام :

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

أذاً :

- **القاعدة (١) :إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ؟ على طول المقدار كله يساوي 0 .**
- **القاعدة (٢) : إذا كانت درجة البسط = درجة المقام ؟ ناخذ معامل أكبر أس في البسط على معامل أكبر أس في المقام زي ما شرحت لكم فوق .**
- **القاعدة (٣) : إذا كانت درجة البسط أبر من درجة المقام ؟ على طول المقدار يساوي ∞ .**

- **هذي قواعد أساسيه في النهايات لازم تنحفظ عشان تسهل عليكم المسائل ، اذا حفظتوها على طول بتشوفون المسألة وتطبقون القواعد بس ، بدون أي صعوبه ، وسهل حفظها افهموا كل قاعده وطبقوا عليها مثال او مثالين وعلى طول بترسخ في البال ، وبالتوفيق للكل ...**

مسائل إضافية : أوجد نهاية كل مما يلي :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^5+1}{3x^5+x^2+5}$$

الحل : بما أن درجة البسط = درجة المقام : إذاً سنطبق القاعدة رقم (٢) :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^5+1}{3x^5+x^2+5} = \frac{-2}{3}$$

مسألة أخرى :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2-3}{x^4+2x+1}$$

الحل : بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام : إذاً سنطبق القاعدة رقم (١) :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2-3}{x^4+2x+1} = 0$$

مسألة أخرى :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-3}{x^4+2x+1}$$

الحل : بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام : إذاً سنطبق القاعدة رقم (٣) :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-3}{x^4+2x+1}=\infty$$

***ملاحظة** : أي عدد حقيقي مقسوماً على ∞ ، فإنّ النتاج = صفر ، ($\frac{\text{عدد حقيقي}}{\infty}=0$)

وبالتالي نحصل على :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^n=0$$

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ \text{نعوض}\ =\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}=0$$

مثال آخر :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^3=0$$

مثال آخر :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{27}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\right]^3=0$$

<u>تمارين :</u> أوجد النهايات التالية ؟

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+4x}{x+x}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{7x^2+3x-2}{2x^2+2}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^6}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x+2}$$

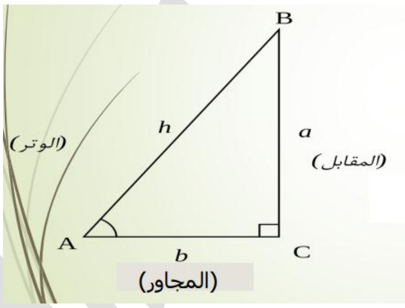
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+6x^2-x^4}{x^2+x^3}$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^3-729}$$

الفصل الثالث .. (النهايات والاتصال – نهاية الدوال المثليثية) ..

تعريف : الدوال المثلية :

وهي دوال تكون معرفة على زاوية معينة ، حيث تظهر أهميتها في دراسة المثلثات ، ويمكن تعريفها على أنها نسب بين ضلعين في مثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية معينة والشكل التالي يوضح ذلك :



ومن الدوال المثلثية الهامة :

دالة الجيب : $f(x) = \sin(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

دالة جيب التمام : $f(x) = \cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

دالة الظل : $f(x) = \tan(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

- **<u>نهاية الدوال المثلثية :</u>**

نظرية (١) : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

نظرية (٢) : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

نظرية (٣) : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{bx} = \frac{1}{b}$

نظرية (٤) : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

مثال : أوجد نهاية كل من الدوال التالية :

١. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$

٢. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{-7x} = \frac{1}{-7}$

طبعاً معامل x اذا ما كان فيه رقم قبلها على طول بيكون 1 ، وكتبنا $\frac{1}{-7}$ ، الـ x بيكون معاملها 1 على طول ، ثابته هذي المعلومة بكل المسائل .

٣. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}$

- <u>**وكذلك الحال ، تنطبق النظريات السابقة على دالة الظل ، كما يلي :**</u>

نظرية (٥) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

نظرية (٦) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$

نظرية (٧) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{bx} = \frac{1}{b}$

نظرية (٨) : $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

مثال : أوجد نهاية كل من الدوال التالية :

١. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{x} = 5$

٢. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{7x} = \frac{1}{7}$

٣. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{-3x} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

كذلك يمكن استخدام النظريات السابقة على بعض مسائل إضافية كما في المثال التالي :

مثال : أوجد نهاية كل من الدوال التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin(4x)}{5x}\ ?$$

الحل : في مثل هذا النوع من المسائل:

لابد ن قسمة كافة حدود (جميع) المقدار الكسري على المتغير x .

{ بمعنى ، الـ $2x$ راح نقسمها على x ، وكذلك الـ $\sin(4x)$ ، وأيضاً الـ $5x$ } :

فيصبح الحل على الصور التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{2x}{x}}+\cancel{\frac{\sin(4x)}{x}}}{\cancel{\frac{5x}{x}}}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$$

***ملاحظه: لما نقسم كافة الحدود على x تروح الـ sin أيضاً مع x .**

مثال آخر

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin(3x)}{2x-\tan(6x)}\ ?$$

الحل : أيضاً نقسم كافة حدود المقدار الكسري على المتغير x :

فيصبح على الصورة التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{x}{x}}+\cancel{\frac{\sin(3x)}{x}}}{\cancel{\frac{2x}{x}}-\cancel{\frac{\tan(6x)}{x}}}=\frac{1+3}{2-6}=\frac{4}{-4}=-1$$

مثال آخر :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(4x)}\ ?$$

الحل: وكذلك الحال في المثال التالي حيث نقسم حدود المقدار الكسري على المتغير x

فيصبح شكل نهاية الدالة على الصورة التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{\tan(4x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\cancel{\frac{\sin(3x)}{x}}}{\lim_{x\to 0}\cancel{\frac{\tan(4x)}{x}}}=\frac{3}{4}$$

تمارين على نهايات الدوال المثلثية ..

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{\tan(X)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(5x)}{2\text{x}-\tan(X)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(8x)}{-2x}$$

الفصل الثالث .. (النهايات الاتصال) ..

الاتصال : تعريف :

نقول بأن الدالة $f(x)$دالة متصلة عند النقطة a اذا حققت الشروط الثلاث التالية :

١- **الدالة معرفة عند a (بمعني :$f(a)$ لها قيمة حقيقية)**
٢- **$\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة .**
٣- **$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.**
٤-

بحيث اذا لم يتحقق أي شرط من الشروط التالية ، نقول بأن الدالة $f(x)$ غير متصلة .

مثال : ابحث في اتصال الدالة :

$f(x)\frac{2-x}{4-x^2}$ عند : $x = 2$ ؟

الحل : سوف نبدأ بالتحقق من الشروط الثلاث :

***ملاحظة : (اذا ما تحقق شرط واحد من الشروط الثلاث ؟ اذا الدالة غير متصله نوقف حل ونختصر الموضوع) .**

/١ هل $f(2)$ موجود ؟ (نتأكد بالتوعويض عن قيمة x .)

$f(2) = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0} = \infty$ نلاحظ أن : (الشرط الأول مايتحقق) .

وبالتالي نقول أن الدالة غير متصلة .

مثال آخر ..

هل الدالة معرفة حسب القاعدة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x - 9 \;.\; x \neq 3 \\ -6 \;.\; x = -3 \end{cases}$$

هل الدالة متصلة عند : $x = -3$ ؟

الحل : سوف نبدأ بالتحقق من الشروط الثلاث :

١/ هل $f(-3)$ موجودة ؟ (نتأكد بالتعويض عن قيمة x .)

$f(-3) = -6$ **نعم موجودة (التعويض تم في القاعدة الثانية)**

٢/ هل $\lim_{x\to -3} f(x)$ موجودة ؟

$$\lim_{x\to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

٣/ هل $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$ ؟

نلاحظ أن الناتج من رقم (١) $\neq$ الناتج من رقم (٢) ، وبالتالي فإن الدالة غير متصلة .

***يعني : لازم تكون الشروط الثلاثه متوفره ، هنا الشرط الأول موجود ، والشرط الثاني ايضاً موجود ، لكن الشرط الثالث لا ، قيمة الأول ما تساوي قيمة الثاني ، وهذا ما حقق الشرط الأخير ، لذلك الدالة غير متصلة .**

مثال آخر ..

هل الدالة معرفة حسب القاعدة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & . \ x \neq 5 \\ 10 & . \ x = 5 \end{cases}$$

هل الدالة متصلة عند : $x = 5$ ؟

الحل : سوف نبدأ بالتحقق من الشروط الثلاث :

١/ هل $f(5)$ موجودة ؟ (نتأكد بالتوعويض عن قيمة x .)

$f(5) = 10$ **نعم موجودة (التعويض تم في القاعدة الثانية)**

٢/ هل $\lim_{x\to5} f(x)$ موجودة ؟

نلاحظ أن التعويض المباشر بالنهاية = $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{(x-5)}}=5+5=10$$

<u>*ملاحظه : الـ x^2 لو عوضنا مباشرة بـ 5 راح تطلع النتيجة غير معرفة ، يعني = $\frac{0}{0}$ ، عشان كذا استخدمنا قانون الفرق بين مربعين ، وشطبنا على الحدود المتشابهة ، لتجنب النتيجة الغير معرفة .</u>

٣/ هل $\lim_{x\to5} f(x)=f(5)$ ؟

نلاحظ أن الناتج من رقم (١) = الناتج من رقم (٢) ، وبالتالي الدالة متصلة .

<u>مثال آخر ..</u>

هل الدالة معرفة حسب القاعدة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & . \; x\geq 3 \\ 4x-1 & . \; x<3 \end{cases}$$

هل الدالة متصلة عند : x = 3 ؟

الحل : سوف نبدأ بالتحقق من الشروط الثلاث :

١/ هل $f(3)$ موجودة ؟ <u>(نتأكد بالتعويض عن قيمة x .)</u>

$f(3)=3^2+2=9+2=11$ نعم موجودة (التعويض تم في القاعدة الأولى)

٢/ هل $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة ؟ (نلاحظ أن الدالة معرفة بقاعدتين ، وبالتالي سوف نبحث باتصال الدالة من اليمين ومن اليسار) بمعنى أنها معادلتين ولازم نعوض بالثنتين ويكون الناتج نفس الشيء :

الاتصال من اليمين : $\lim_{x\to 3^+} x^2+2 = 9+2 = 11$

الاتصال من اليسار : $\lim_{x\to 3^-} 4x-1 = 4(3)-1 = 11$

إذن نهاية الدالة من اليمين = نهاية الدالة من اليسار وبالتالي $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة وتساوي *11* .

٣/ هل $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ ؟

نلاحظ ان الناتج من رقم (١) = الناتج من رقم (٢)

وبالتالي نقول أن الدالة متصلة حيث أنها حققت الشروط الثلاث .

مثال آخر ..

اوجد نهاية الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{2x}. & x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{3}{2}. & x = 0 \end{cases}$$

هل الدالة متصلة عند : *x = 0* ؟

١/ $f(0) = \frac{3}{2}$

٢/ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}$

٣/ هل $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ؟ نعم متساوية وبالتالي الدالة متصلة .

مثال آخر ..

ابحث في اتصال الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ . \ x \geq -1 \\ x+2 \ . \ x < -1 \end{cases}$$

١/ هل / $f(-1)$ موجودة ؟

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

نعم موجودة (التعويض تم في القاعدة الأولى والتي فيها إشارة المساواة)

٢/ هل $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجودة ؟

(نلاحظ أن الدالة معرفة بقاعدتين وبالتالي سوف نبحث في اتصال الدالة من اليمين واليسار) .

الاتصال من اليمين : $\lim_{x\to -1+} 2x + 1 = -2 + 1 = -1$

الاتصال من اليسار : $\lim_{x\to -1-} x + 2 == 1 + 2 = 1$

إذن الدالة من اليمين ≠ الدلة من اليسار ، وبالتالي $\lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

وبالتالي نقول أن الدالة غير موجودة حيث أن الشرط الثاني لم يتحقق .

الفصل الثالث .. (النهايات والإتصال – الاتصال) ..

مسائل وتمارين : ابحث في اتصال الدوال التالية :

$$f(x) = \begin{cases} 2+x \ . \ x<2 \\ x-2 \ . \ x \geq 2 \end{cases}$$

عند النقطة : $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ . \ x \geq -1 \\ x-1 \ . \ x<-1 \end{cases}$$

عند النقطة : $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x \ . \ x<2 \\ 1 \ . \ x=2 \\ x-2 \ . \ x>2 \end{cases}$$

عند النقطة : $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 5 \ . \ x=0 \\ \frac{\tan(5x)}{x} . \ x \neq 0 \end{cases}$$

عند النقطة : $x = 0$

الفصل الرابع : التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

متوسط التغير :

تعريف : اذا كانت $y=f(X)$ داله ، فإن اي زياده في المتغير المستقل X مقدارها ΔX تحدث تغييرا في المتغير التابع y مقداره Δy . النسبه بين تغير في y الى التغير في x يسمى متوسط الدالة . و بالرموز :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(X_2)-f(X_1)}{X_2-X_1}$$

لأي X_1وX_2 في مجال الداله وحيث $X_2=X_1+\Delta X$

<u>مثال١</u>: اوجد متوسط التغير للدالة $f(X)=X^2+2$ عندما تتغير X من ١ الى ١.٥ ؟

الحل .: $X_1=1 \quad , \quad X_2=1.5$

$$(1)=1^2+2=1+2=3$$

$$(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(X_2)-f(X_1)}{X_2-X_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

<u>مثال</u> ٢ .: اوجد متوسط التغير للدالة $f(X)=3x+2$ عندما تتغير X من ١ الى ٢؟

الحل .: $X_1=1 \quad , \quad X_2=2$

$$(1)=3\times1+2=3+2=5$$

$$(2)=3\times2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(X_2)-f(X_1)}{X_2-X_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

<u>مثال٣</u> : اوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=X^3+5$ عندما تتغير x من ٠ الى ٢؟

الحل .: $X_1=0 \quad , \quad X_2=2$

$$f(0)=0^3+5=5$$

$$,\quad (2)=2^3+5=8+5=13$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(X_2)-f(X_1)}{X_2-X_1}=\frac{13-5}{2-0}=\frac{8}{2}=4$$

<u>المشتقة الاولى :</u>

تعريف: نهاية متوسط التغير للدالة f(X) عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقه الاولى للداله

Y=f(x) بالنسبة للمتغير X ويرمز لها بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d}{dx}f(x)\ ,\ \acute{y}\ ,\ \acute{f}(x)\ ,\ \frac{dy}{dx}$$

و بالرموز يعبر عن مشتقه الدالة f(X) كما يلي :

$$\acute{f}(x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للاشتقاق (التفاضل).

<u>مثال</u> : اذا كانت $f(x) = x^2$ اوجد $\acute{f}(x)$ باستخدام التعريف العام للاشتقاق ؟

الحل : اولا نلاحظ ان : $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

ومن خلال استخدام التعريف العام للاشتقاق ، نحصل على :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x.\Delta x+(\Delta x)^2-\cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

اخراج عامل مشترك

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$$

قوانين الاشتقاق :

١- مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر <u>دائما</u> :

تعريف: اذا كانت f(x)=c حيث C عدد ثابت ، فإن $f(x)' = 0$

<u>مثال</u>: اوجد مشتقه كل من الدوال التالية :

$$1)\ y = 5 \to \acute{y} = 0\quad ,$$

$$2)\ y = -10 \to \frac{dy}{dx} = 0$$

$$,\quad 3)\ y = \frac{3}{4} \to \acute{f}(x) = 0$$

٢- مشتقة الدالة الخطية تساوي معامل المتغير X فقط :

تعريف :اذا كانت f(x)=cx حيث C عدد ثابت ، فإن $\dot{f}(x) = c$

<u>مثال</u>. اوجد مشتقه كل من الدوال التالية :

$$1)\ y = 5x \rightarrow \dot{y} = 5$$

$$,\ 2)\ y = -10x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -10$$

$$,\ 3)\ y = \frac{3}{4}x \rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}$$

٣- مشتقة الدالة $f(x) = x^n$

تعريف : اذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد حقيقي ، فإن $\dot{f}(x) = nx^{n-1}$

<u>مثال</u>: اوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$1)\ y = x^2 \rightarrow y' = 2x$$

$$2)\ y = x^{-5} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$$

$$3)\ y = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$4)\ y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$5)\ y = x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

<u>ملاحظات</u> : (العلاقة بين الصورة الجذرية و الصورة الأسية الكسرية لمقدار جبري)

$$\sqrt[n]{X^m} = X^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[3]{X^2} = X^{\frac{2}{3}}\ ,\ \sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt{X^3} = X^{\frac{3}{2}}$$

<u>فمثلا</u> :

اوجد مشتقة الدوال التالية :

$$1)\ f(x) = \sqrt[4]{X}\quad ,\quad 2)\ y = \sqrt{X^3}$$

<u>الحل</u>.:

$$1)\ f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$2)\ y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

٤- مشتقة الدالة $f(x) = CX^n$

تعريف : اذا كانت $f(x) = CX^n$ حيث n عدد حقيقي ، فإن $\acute{f}(x) = ncX^{n-1}$

<u>مثال</u>: اوجد المشتقة الاولى للدوال التالية :

$$1) = 3^4$$

$$,\quad 2)\ y = -2x^7$$

$$,\quad 3) = 16^{\frac{1}{2}}$$

الحل :.

$$1)\ = 3\ {}^{4} \rightarrow\ ' = 3\times 4\times\ {}^{4-1} = 12\ {}^{3}$$

$$2)\ y = -2x^7 \rightarrow y' = -2\times 7\times x^{7-1} = -14x^6$$

$$3)\ = 16\ {}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times 16\times\ {}^{\frac{1}{2}-1} = 8\ {}^{-\frac{1}{2}}$$

٥- مشتقة الدالة على الصورة $y = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ حيث $a \neq 0$

تعريف : اذا كانت الدالة f(x) و المكتوبة بالصورة اعلاه ، فإن مشتقة تلك الدالة تعطى بالصورة التالية :

$$\dot{y} = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_1$$

<u>مثال</u> :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $= 3^4 + 5^3 - 2^2 + 7 + 20$

الحل: $\frac{dy}{dx} = 12^3 + 15^2 - 4 + 7$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$= -2\ {}^{-2} - 4\ {}^{3} + 2\ {}^{\frac{2}{3}} + \sqrt{\ } - 10$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4\ {}^{-2-1} - 12\ {}^{3-1} + \frac{4}{3}\ {}^{\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{2}\ {}^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 4\ {}^{-3} - 12\ {}^{2} + \frac{4}{3}\ {}^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\ {}^{-\frac{1}{2}}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{2}{5}\ {}^{5} - 4\ - 2\ {}^{\frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\ } + \frac{2}{9}$$

الحل:

$$— = 2\ {}^{5-1} - 4 - 7\ {}^{\frac{7}{2}-1} + \frac{1}{3}\ {}^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= 2\ {}^{4} - 4 - 7\ {}^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\ {}^{-\frac{2}{3}}$$

٦- مشتقة الدالة $y = [f(x)]^n$

تعريف: اذا كانت $y = [f(x)]^n$ ، حيث n عدد حقيقي فإن $\dot{y} = n[f(x)]^{n-1} \times \dot{f}(x)$

<u>مثال</u>: اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية : $(2^2 + 5)^8$

الحل:. $\_ = 8(2^2 + 5)^7 . 4 = 32(2^2 + 5)^7$

مثال: اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية : $(-3^2 - 4)^{-4}$

الحل :.

$$\_ = -4(-3^2 - 4)^{-4-1} . (-6 - 4)$$

$$= (24 + 16)(-3^2 - 4)^{-5}$$

<u>مثال:</u>

اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية :

$$= \left(-3\ ^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{\ }\right)^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(-3x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{x}\right)^{3-1} . \left(-3 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\right)$$

$$= \left(-3x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{x}\right)^2 \left(-6x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right)$$

مسائل وتمارين : اوجد مشتقة الدوال التالية :

1) $y = 4x^2 - 3x^4$

2) $y = -3x^{\frac{3}{4}} + 1$

3) $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

4) $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

5) $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

الفصل الثالث : النهايات والاتصال

- تمرين الأول : اوجد نهاية كل من الدوال التالية

① $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$ (عملية تعويض مباشر)

② $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ (قيمة غير معرفة)

$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2$

$= 4$

③ $\lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{x + 4} = \frac{2(-2) - 3}{-2 + 4} = \frac{-7}{2}$

④ $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$

⑤ $\lim_{x \to 6} \sqrt[4]{x^2 - 3x - 8} = \sqrt[4]{6^2 - 3(6) - 8}$

$= \sqrt[4]{36 - 26}$

$= \sqrt[4]{10} = (10)^{1/4}.$

6) $\lim_{x \to 3} (\log(2x+4)) = \log(2\times3+4)$

$= \log(10) = 1$

$\square$ ← لم يكتب الاساس وبالتالي قيمته = ١٠

$$\boxed{\log_X X = 1}$$

7) $\lim_{x \to 2} (\ln(x^2+1)) = \ln(4+1)$

$= \ln 5$.

8) $\lim_{x \to -1} (2x^2+5x+1)^2 = \left(2(-1)^2+5(-1)+1\right)^2$

$= (2-5+1)^2$

$= (-3)^2 = 9$.

9) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$,

10) $\lim_{x \to -1} \sqrt{x} = \sqrt{-1} =$ قيمة غير حقيقية .

٩٠ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} - x^2 & x > -1 \\ \dfrac{7+x^2}{2} & x < -1 \end{cases}$

دوال معرفة بأكثر من قاعدة

اقتراب من اليسار $\longrightarrow$ -1 $\longleftarrow$ اقتراب من اليمين

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7+x^2}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3}{x} - x^2$

$= \dfrac{7+1}{2}$ $\qquad$ $= \dfrac{3}{-1} - 1 = -3 - 1$

$= 4$ $\qquad$ $= -4$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \neq \lim\limits_{x \to -1^+}$ ∴ النهاية غير موجودة

٩١ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{2x} , & x > 1 \\ \dfrac{x^3 - x^2}{3} , & x < 1 \end{cases}$

الاقتراب من اليمين $\leftarrow$ ($x > 1$)

الاقتراب من اليسار $\leftarrow$ ($x < 1$)

المطلوب :

① $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2}{3} = \dfrac{-1-1}{3} = -2/3$.

② $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-x^2}{2x} = \dfrac{1-4}{2(2)} = \dfrac{-3}{4}$.

③ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$??

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{2x} \overset{??}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2}{3}$

$\dfrac{1-1}{2} = \dfrac{1-1}{3}$

$0 \qquad 0$

النهاية موجودة وتساوي الصفر .

نهايات الدوال غير محددة القيمة

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\text{عدد}}{0}$$

$$= \frac{\infty}{\infty}$$

غير معرفة

وفي مثل هذه الحالات، سنستخدم قوانين التحليل المختلفة.

- تمرين: اوجد النهايات التالية

1) $$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16} = \frac{4 - 4 - 8}{16 - 16} = \frac{-8}{0}$$

غير معرفة

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+2)}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

تعويض مباشر

② $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} = \frac{9 - 9}{9 - 15 + 6} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}}$$

$$= \frac{-3-3}{-3+2} = \frac{-6}{-1} = 6$$

③ $$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 4x}{x + 4} = \frac{-16+16}{-4+4} = \frac{0}{0}$$

غير معرفة

$$\lim_{x \to -4} \frac{x\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}} = \lim_{x \to -4} x$$

$$= -4$$

④ $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^{4} - 5x^{2} + 2}{7x^{5} + 6x^{3} - 3x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

التعويض المباشر

$$= 0$$

(لأن درجة أكبر أس في البسط أقل من درجة أكبر أس في المقام) حيث يكون الناتج = صفر.

⑤ $$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^{2} + 3x - 2}{2x^{2} + 4} = 7/2$$

[درجة الأس في البسط = درجة الأس في المقام]

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}$$

⑥ $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^{3}+6x-21}{x^{2}+1} = \infty$$

غير موجودة

درجة الأس في البسط > درجة الأس في المقام

⑦ $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{6}} = 0$$

⑧ $$\lim_{x \to -2} \frac{x^{2}+2x}{x+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$

نتيجة غير محددة

$$\lim_{x \to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = -2$$

ⓐ $$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3+6x^2-x^4}{x^2+x^3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(2x+6-x^2)}{\cancel{x^2}(1+x)}$$

اخراج عامل مشترك

$$= \frac{0+6-0}{1+0} = \frac{6}{1} = 6$$

نهاية الدوال المثلثية .

$f(x) = \sin x$

$\cancel{f(x) = \cos x}$

$f(x) = \tan x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$① \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$$

نعيد كتابة
هذا الشكل بأن نقسم x
من خلال على المتغير
الحدود

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\tan x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{1}}{\frac{1}{1}} = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$② \lim_{x \to 0} \frac{x + \tan 5x}{2x - \tan x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\tan 5x}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{\tan x}{x}} = \frac{1 + \frac{5}{1}}{2 - \frac{1}{1}}$$

$$= \frac{6}{1} = 6$$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = 3/2$.

④ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 8x}{-2x} = \frac{8}{-2}$

$= -4$.

الجزء الثاني :- الاتصال

ونقول بأن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$

اذا حققت ثلاثة شروط :-

① $f(a)$ معرفة

② $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

③ $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

- ابحث في اتصال الدوال التالية :-

① $f(x) = \begin{cases} \overset{\text{من اليسار}}{2+x}, & x<2 \\ \overset{\text{من اليمين}}{2-x}, & x\geq 2 \end{cases}$ انتبه الإشارة

عند النقطة $\underline{x=2}$ ؟؟

① $f(2) = 2-2 = 0$. معرفة ✓

② $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ??$

$\lim\limits_{x\to 2} 2-x \overset{??}{=} \lim\limits_{x\to 2} 2+x$

$\underset{0}{\underset{\|}{2-2}} \neq \underset{0}{\underset{\|}{2+2}}$. النهاية غير موجودة .

∴ الدالة غير متصلة

② $f(x) = \begin{cases} 2x, & x\geq -1 \;\leftarrow \text{من اليمين} \\ x-1, & x<-1 \;\leftarrow \text{من اليسار} \end{cases}$

عند $x=-1$ ؟؟

الحل :-

ⓐ $f(-1) = 2(-1) = -2$. ✓

ⓑ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = ??$

من اليمين من اليسار

$\lim\limits_{x\to -1} 2x \overset{??}{=} \lim\limits_{x\to -1} x-1$ النهاية موجودة .

$-2 = -2$ ✓

c) $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ الدالة متصلة

$-2 = -2$ ✓

3)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x<2 \leftarrow \text{من اليسار} \\ 1 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \leftarrow \text{من اليمين} \end{cases}$$

عند النقطة $x=2$ ؟؟

a) $f(2) = 1$ (من القاعدة الثانية)

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\lim_{x\to 2} 5-x \overset{?}{=} \lim_{x\to 2} x+1$

$5-2 = 2+1$ النهاية موجودة

$3 = 3$

c) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

$1 \neq 3$ الدالة غير متصلة

(4) $f(x) = \begin{cases} 5, & x = 0 \\ \dfrac{\tan 5x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

$x \to 0^{+}$, $x \to 0^{-}$

(a) $f(0) = 5$. عند $x=0$ ؟؟

(b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{x} = \dfrac{5}{1} = 5$.

(c) $\underset{5}{f(0)} = \underset{5}{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}$

∴ الدالة متصلة

الفصل الرابع :- التفاضل (الاشتقاق)

تمرين :- اوجد مشتقة الدوال التالية :-

(1) $y = 4x^{2} - 3x^{4}$

$y' = 4 * 2 * x^{2-1} - 3 * 4 * x^{4-1}$

$\dfrac{dy}{dx} = 8x - 12x^{3}$

$f'(x)$

② $y = -3x^{3/4} \cancel{+1}$

مشتقة الثابت : صفر

$= -3 * \frac{3}{4} * x^{3/4 - 1}$

$\frac{3}{4} - \frac{4}{4}$

$= -\frac{9}{4} * x^{-\frac{1}{4}}$

$= -\frac{9}{4}\, x^{-\frac{1}{4}}$.

③ $y = \sqrt{3}\,(x^5 - x^{-3})$

$y' = \sqrt{3}\,(5x^4 + 3x^{-4})$.

④ $y = \sqrt[5]{3x^2+4} = (3x^2+4)^{1/5}$

$y' = \frac{1}{5}(3x^2+4)^{\frac{1}{5}-1} \cdot (6x)$

مشتقة ما داخل القوس

$= \frac{6}{5}x(3x^2+4)^{-\frac{4}{5}}$

(5) $y = (4x^2 + 5x - 2)^{8}$ $\quad 8-1$

$y' = 8(4x^2 + 5x - 2)^{7} \cdot (8x + 5)$

مشتقة

$= (64x + 40)(4x^2 + 5x - 2)^{7}$ ما داخل الاقواس

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تابع قوانين الاشتقاق:

٧- مشتقة حاصل ضرب دالتين:

تعريف: إذا كانت $y = f(x) \times g(x)$، **فإن**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

= مشتقة الدالة الأول × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

مثال١: اوجد مشتقة الدالة التالية :

الحل :

$$y = (x^2+1)(2x^3-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\boxed{2x}}^{\text{مشتقة الدالة الاولى}}(2x^3-2) + \overbrace{\boxed{6x^2}}^{\text{مشتقة الدالة الثانية}}(x^2+1)$$

$$= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2$$

$$= 10x^4 + 6x^2 - 4x$$

مثال٢:. اوجد مشتقة الدالة التالية :

$$y = (-3x^{-2} - 5)(\frac{1}{2}X^2)$$

الحل:.

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{-3}\left(\frac{1}{2}X^2\right) + x(-3X^{-2} - 5)$$

$$3x^{-1} - 3x^{-1} - 5x = -5x$$

مثال٣: اوجد مشتقة الدالة التأليه :

مشتقة الدالة الاولى

$$y = (3x-5)^{\frac{1}{3}}(x^2-7)$$

مشتقة الدالة الثانية

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{1}{3}(-3x-5)^{-\frac{2}{3}}(3)}(x^2-7) + \boxed{2x}(3x-5)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-3x-5)^{-\frac{2}{3}}(x^2-7) + 2x(3x-5)^{\frac{1}{3}}$$

٨- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

تعريف: إذا كانت $\mathbf{y = \frac{f(x)}{g(x)}}$، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\dfrac{\text{دالة المقام ×مشتقة دالة البسط – دالة البسط×مشتقة دالة المقام}}{\text{تربيع المقام دالة}}$

مثال١: اوجد مشتقة الدالة التالية

$$y = \frac{5x^3}{3-x}$$

مشتقة دالة البسط

مشتقة دالة المقام

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x)(15\boxed{x^2}) - (5x^3)(-\boxed{1})}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{45x^2 - 15x^3 + 5x^3}{(3-x)^2} = \frac{45x^2 - 10x^3}{(3-x)^2}$$

مثال٢: اوجد مشتقة الدالة التالية:

مشتقة دالة البسط

$$y = \frac{2x+5}{3x-4}$$

مشتقة دالة المقام

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-4)\boxed{(2)} - (2x+5)\boxed{(3)}}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2} = \frac{-23}{(3x-4)^2}$$

مثال٣: أوجد مشتقة الدالة التالية

$$y=\frac{2x^{-\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^{\frac{1}{2}})(-x^{-\frac{3}{2}})-(2x^{-\frac{1}{2}})(x^{-\frac{1}{2}})}{(2x^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$=\frac{-2x^{-1}-2x^{-1}}{4x}=\frac{-4x^{-1}}{4x}=-\frac{x^{-1}}{x}=-\frac{1}{x^2}$$

١. نتيجة: إذا كانت $y=\frac{c}{g(x)}$، حيث c عدد ثابت فإن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-c\,.\;g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{3}{x^2-2}$

الحل: $\frac{dy}{dx}=\frac{-3(2x)}{(x^2-2)^2}=\frac{-6x}{(x^2-2)}$

١. **مثال:** اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{-5}{y-2}$

الحل: $\frac{dy}{dx}=\frac{-(-5)(1)}{(x-2)^2}=\frac{5}{(X-2)^2}$

١. **مثال:** اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{1}{3X-X^3}$

الحل: $\frac{dy}{dx}=\frac{-(1)(3-3x^2)}{(3x-x^3)^2}=\frac{-3+3X^2}{(3x-x^3)^2}$

9- (قانون السلسلة): إذا كانت $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y=u^2+5u$, $u=x+3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل:

$$\frac{dy}{du}=2u+5 \quad , \quad \frac{du}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(2u+5)(1)=2(x+3)+5=2x+11$$

❑مثال: إذا كانت $y = 5u^2 - 3$, $\boxed{u = x^2 - 2}$. فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 10u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (10u)(2x) = 10(x^2 - 2)(2x)$$
$$= 20x^3 - 40x$$

❑مثال: إذا كانت $y = -4u^2 - 1$. $u = \frac{1}{2}x$. فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل:

$$\frac{dy}{du} = -8u \quad , \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-8u)(\frac{1}{2}) = -4(u) = -4(\frac{1}{2}x) = -2x$$

١. المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة $f(x)$ للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة

الثانية ويرمز لها بأحد الرموز التالية: y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

أما عندما نشتق الدالة $f(x)$ للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة

الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز التالية: y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

وهكذا .....

١. مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة

$$y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$
$$y'' = 12x^2 + 30x$$
$$y''' = 24x + 30$$

١. **مثال: أوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة**

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$

١. **مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة**

$$y = -2x^{-5} - 3x^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 10x^{-6} - 9x^2$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -60x^{-7} - 18x$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 420x^{-8} - 18$$

١. مسائل وتمارين:

١. أوجد مشتقة الدوال التالية

$$i)\, y = 4x^2 - 3x^4 \quad ، \quad ii)\, y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$$

$$iii)\, y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right) \quad , \quad iv)\, y = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$v)\, y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1) \quad ، \quad vi)\, y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$$

$$vii)\, y = \frac{1}{2x+3} \quad ، \quad viii)\, y = (4x^2 + 5x - 2)^8$$

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت:

$$i)\, y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$$

$$ii)\, y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$$

$$iii)\, y = 5u \quad , \quad u = 3x + 7$$

١. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال التالية:

$$i)\, y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$ii)\, y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

$$iii)\, y = \frac{-1}{2x}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مشتقة الدوال الاسيه و الدوال اللوغاريتمية و الدوال المثلثيه :

اولا: مشتقة الدالة الاسية : تعريف : اذ كانت $y = e^x$ فإن $\frac{dy}{dx} = e^x$

وبشكل عام إذا كانت $y = ef^x$ ، فإن $\frac{dy}{dx} = ef^{(x)} \times f'(x)$

مثال١ : اوجد مشتقة الدالة التالية : $X^2 + 2x + 1$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\boxed{e^{x^2+2x+1}}}^{\text{المقدار نفسه}}\overbrace{\boxed{(2x+2)}}^{\text{مشتقة الأس}} = (2x+2)e^{x^2+2x+1}$$

مثال٢ : اوجد مشتقة الدالة التالية : $-2X^{-2}$

الحل:.

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\boxed{e^{-2x^{-2}}}}^{\text{المقدار نفسه}}\overbrace{\boxed{(-2\times -2\times x^{-2-1})}}^{\text{مشتقة الأس}} = (4x^{-3})e^{-2x^{-2}}$$

نتيجة : اذا كانت $y = a^x$ فإن $\frac{dy}{dx} = a^x.lna$

وبشكل عام ، اذا كانت $y = af^{(x)}$ فإن $\frac{dy}{dx} = af^{(x)} \times f'(x) \times lna$

مثال١: اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$1. y = 3^x$

الحل: $\frac{dy}{dx} = 3^x In3.$

$2. y = 9^{2x^2}$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2}(4x)In9$

مثال(٢) اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$1. y = 3^x \times x^2$

الحل: $\frac{dy}{dx} = 3^x \times 2x + X^2 \times 3^x In3 = 3^x 2x + x^2 3^x In3$

$2. y = \frac{4^x}{5x}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{5x \times 4^x In4 - 4^x \times 5}{(5x)^2} = \frac{5 \times 4^x (4In4 - 1)}{25x^2}$

ثانيا: مشتقة الدالة اللوغاريتمية :

تعريف : اذا كانت $y = In\, X$ فإن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

دالة اللوغاريتم الطبيعي
والتي اساسها e

وبشكل عام اذا كانت y=In f(X) ، فأن $\frac{dy}{dx} = \frac{f\prime(X)}{f\prime(x)}$

مثال١: اذا كانت $y = In(X^2 + 1)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل : $\frac{dy}{dx} = \frac{2X}{X^2+1}$

مثال٢: إذا كانت y=In(-5x-2) فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{-5x-2}$

نتيجه : اذا كانت $y = log_a X$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{X\, In\, a}$

الدالة اللوغاريتمية
والتي اساسها العدد *a*

وبشكل عام ، اذا كانت $y = log_a f(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{f\prime(x)}{f(x)} \times \frac{1}{In\, a}$

مثال١: اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$1. y = log_2 X$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{X\, In\, 2}$

$2. y = log_2(1 + X^2)$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = \frac{2X}{1+X^2} \times \frac{1}{In2} = \frac{2X}{(1+X^2)In2}$

مثال٢: اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

قاعده مشتقه حاصل ضرب دالتين

$1. y = Xlog_2X$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = X \times \frac{1}{X\,In2} + log_2X \times 1 = \frac{1}{In2} + log_2X$

قاعده مشتقه حاصل قسمة دالتين

$2. y = \frac{log_5X}{X}$

الحل :.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X \times \frac{1}{X\,In5} - log_5X \times 1}{X^2} = \frac{\frac{1}{In5} - log_5X}{X^2}$$

ثالثا: مشتقة الدوال المثلثية :

تعريف١: اذا كانت y=Sin X ، فإن $\frac{dy}{dx} = cos\,x$

وبشكل عام اذا كانت y=sin u حيث u=f(x) فإن $\frac{dy}{dx} = cos\,u \times \frac{dy}{dx}$

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$1. y = sin4X$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = cos(4x) \times 4 = 4cos(4x)$

$2. y = sin\,\frac{4}{5}X$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = cos\left(\frac{4}{5}x\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}cos\frac{4}{5}X$

تعريف٢: اذا كانت y=cos x فإن $\frac{dy}{dx} = -sinx$

وبشكل عام اذا كانت y=cos u حيث u=f(x) فإن $\frac{dy}{dx} = -sin\,u \times \frac{du}{dx}$

مثال١:. اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$$1. y = cos(-2x)$$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = -sin(-2x) \times -2 = 2sin(-2x)$

$$2. y = -cos3X$$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = -1X - Sin(3X) \times 3 = 3\ sin\ 3X$

مثال٢:. اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية :

ويمكن كتابتها على الصوره

$1. y = cos^2 X \longleftrightarrow y = (cos\ X)^2$

الحل:. $\frac{dy}{dx} = 2cos\ X\ .(-sin\ X) = -2cos\ X\ sin\ X$

قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$2. y = sin\ x\ cos\ x$$

الحل:. $\dot{y} = Sin\ X\ \times -sin\ X + cosX \times coX = sin^2 X + cos^2 X$

امثله اضافيه :. اوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$1)\ y = e^{sin\ x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{sin\ x} \times cos\ X = cos\ Xe^{sin\ x}$

$2)\ y = (2X-2)e^{-2x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = (2X-2) \times -2e^{-2x} + e^{-2x} \times 2 = (-4X+4)e^{-2x} + 2e^{-2x}$

$3)\ y = In(cos\ X) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-sin\ X}{cos\ X}$

تمارين و مسائل : اوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$1)\ y = e^{x^2-2x}$

$2)\ y = (2X+3)e^{-2x}$,

$3)\ y = e^{cos\ x}$,

$4) = \frac{1}{2}(\ ^{3x} + \ ^{-3x})$,

$6)\ y = 7^{x^3}$,

$7) y = In(Sin\ X)$,

$8) = \quad ^{2\ 2x}$,

الاشتقاق الضمني :-

لإيجاد مشتقة دالة ضمنية حيث نعتبر Y دالة في X ونطبق قواعد الاشتقاق المناسبة ، مع ملاحظة أن اشتقاق أي حد يحتوي على Y سنقوم بضرب تفاضله (اشتقاقه) في $\frac{dY}{dX}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dY}{dX}$ في طرف وننقل الحدود الأخرى إلى الطرف الآخر .

أنواع الدوال

الدوال الصريحة	الدوال الضمنية
القواعد التي تعلمناها خلال الفصل الرابع جميعها تتعلق بالدوال الصريحة والتي تكتب على الصورة	كيفية اشتقاق الدوال الضمنية
$Y = f(x)$	$f(x, Y) = 0$ ومثال عليها
$Y = 2X + 1$	$X + Y = 5$
$Y = X^2 - X^3$	$2Y - 3 = 4X$

مثال :- أوجد مشتقة الدوال التالية :-

(1) $Y^2 + X^2 = 9$.

الحل :-

(قاعدة السلسلة أو القوة)

التخلص من معامل $\frac{dY}{dX}$ من خلال عملية القسمة

$$2Y \cdot \frac{dY}{dX} + 2X = 0 \Rightarrow 2Y \frac{dY}{dX} = -2X .$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-2X}{2Y} = \frac{-X}{Y}$$

2. $y^2+x^2+3x^3+4y^3=9$

الحل :- نطبق قواعد الاشتقاق التي درسناها سابقاً.

$$2y \cdot \frac{dy}{dx}+2x+9x^2+12y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}+12y\frac{dy}{dx}=-9x^2-2x.$$

اخراج $\frac{dy}{dx}$ كعامل مشترك

$$(2y+12y)\frac{dy}{dx}=-9x^2-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-9x^2-2x}{2y+12y^2}.$$

3. $xy=5x+10$

الحل :-

$$x\frac{dy}{dx}+y(1)=5$$

$$x\frac{dy}{dx}=5-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{5-y}{x}$$

الاشتقاق الجزئي :-

- إذا كانت لدينا $Z = f(X,Y)$ دالة بمتغيرين ، فإذا أبقينا Y ثابتاً فإن Z دالة في X فقط وعليه نستطيع إيجاد تفاضل Z بالنسبة للمتغير X ونسمي المشتقة التي نحصل عليها بالمشتقة الجزئية للدالة Z بالنسبة الى X ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial Z}{\partial X}$.

وبنفس الطريقة إذا أبقينا X ثابتاً فإن Z دالة في Y فقط وعليه نستطيع إيجاد تفاضل Z بالنسبة إلى Y ونسمي المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة Z بالنسبة الى Y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial Z}{\partial Y}$.

مثال :- اوجد $\frac{\partial Z}{\partial X}$ ، $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ لكل من الدوال التالية :-

① $Z = XY + X^2Y + Y^2X$ ⇐ Z دالة مكتوبة بدلالة متغيرين X, Y.

الحل :-

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = Y + 2XY + Y^2.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = X + X^2 + 2YX.$$

2) $Z = 2X^2 + 3XY - 6X^2.$

الحل :-

$\frac{\partial Z}{\partial X} = 4X + 3Y - 12X = 3Y - 8X.$

$\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0 + 3X - 0 = 3X.$

سيظهر كثابت في الحالة الثانية حيث لم تظهر في الحد الاول ولا الثالث المتغير Y.

3) $Z = 5X - 2Y + 10X^2 - 30Y^3.$

الحل :-

$\frac{\partial Z}{\partial X} = 5 - 0 + 20X - 0$

$= 5 + 20X.$

$\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0 - 2 + 0 - 90Y^2.$

$= -90Y^2 - 2.$

تمارين ومسائل :-

① اوجد مشتقة الدوال التالية

① $x - 5y = 10$

② $x^2 + y^2 - 5x = 2.$

③ $xy - 3y^2 = x.$

② اوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ للدوال التالية :-

① $z = x^3 - 2xy + y^3.$

② $z = x \ln y + y^2$

قاعدة :- تتطلب بإيجاد معادلة وميل المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة $x=a$.

تعريفاً : ميل المماس هو عبارة عن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ عندما $x=a$.

أما معادلة المماس فهي تعطى بالصيغة التالية :-

$$Y - Y_1 = m(X - X_1).$$

مثال (1) :- احسب ميل ومعادلة المماس لمنحنى الدالة

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5x + 2$$

عندما $x = 1$ ؟؟ X_1

الحل :- أولاً : يجب أن نجد ميل المماس .

$$f'(x) = 12x^3 - 4x - 5 .$$

$$f'(1) = 12(1)^3 - 4(1) - 5 = 3 .$$

(m) الميل

ثانياً : نجد معادلة المماس لمنحنى الدالة كالتالي :-

$$f(1) = 3(1)^4 - 2(1)^2 - 5(1) + 2 = -2 .$$

Y_1

معادلة الحل هي :-

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

$$Y + 2 = 3(X - 1) \Rightarrow Y + 2 = 3X - 3$$

$$Y = 3X - 5$$

مثال :- اوجد معادلة المماس للدالة

$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 1$ عند النقطة $x=-1$:

الحل :- أولاً سنجد ميل المماس من خلال اشتقاق الدالة وتعويض بقيمة x فيها :-

$$f'(x) = 9x^2 - 18x$$

$$f'(-1) = 9(-1)^2 - 18(-1) = 9 + 18 = 27$$

ثانياً :- سنجد صورة $x=-1$ في الدالة $f(x)$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 9(-1)^2 + 1$$

$$= -3 - 9 + 1 = -11$$

ثالثاً :- نعوض بالنقطة التي حصلنا عليها $(\underset{x_1}{-1}, \underset{y_1}{-11})$ مع الميل $m = 27$ في المعادلة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 11 = 27(x + 1)$$

$$y + 11 = 27x + 27$$

$$y = 27x + 27 - 11 \Rightarrow \boxed{y = 27x + 16}$$

تمرين :- اوجد ميل ومعادلة مماس منحنى الدالة

$$f(x) = 3x - x^4$$

عندما $x = 2$ ؟ .

* *** *** ***

نهاية المحاضرة المسجلة

الحادية عشر

شاكراً للجميع حسن الاستماع

المحاضرة المسجلة الثانية عشر

الفصل الرابع :- الاشتقاق (التفاضل)

تطبيقات على الاشتقاق :-

- كيفية حساب فترات التزايد والتناقص وإيجاد القيم العظمى (محلية كبرى أو محلية صغرى) عن خلال اختبار المشتقة الأولى :-

خطوات الاختبار :-

① حل المعادلة $f'(x) = 0$ للحصول على القيم الحرجة

② نضع هذه القيم على خط الأعداد.

③ تحديد إشارة $f'(x)$ على كل فترة لدينا، حيث يكون للدالة $f(x)$ ما يلي :-

أ) قيمة عظمى محلية إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من + إلى − .

ب) قيمة صغرى محلية إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من − إلى + .

ج) لا يكون لدينا قيمة عظمى أو صغرى إذا لم تتغير إشارة $f'(x)$.

د) فترات تزايد عندما تكون إشارة $f'(x)$ موجبة.

هـ) فترات تناقص للدالة $f(x)$ عندما تكون إشارة $f'(x)$ سالبة .

مثال :- اوجد النقاط العظمى والصغرى وفترات التزايد والتناقص للدالة $f(x)=8x^2-4x$ ؟؟

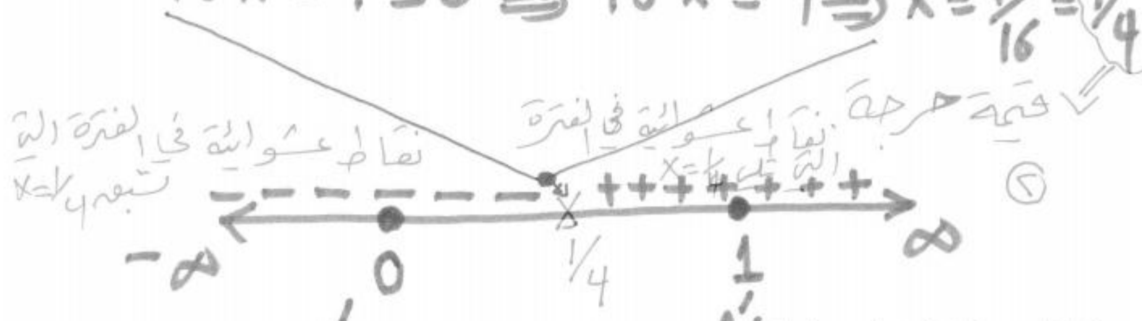
الحل :- ① يجب ان نجد قيمة المشتقة الأولى ونساويها بالصفر :-

$$f'(x)=16x-4 .$$

$$16x-4=0 \Rightarrow 16x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

قيمة حرجة

②



$f'(0)=-4<0$ $f'(1)=16(1)-4>0$

ونستنتج أنه للدالة $f(x)$ نقطة صغرى محلية عند $x=1/4$

وفترات التزايد من $(1/4, \infty)$ وفترة تناقص من $(-\infty, 1/4)$

مثال :- اوجد القيم العظمى والقيم الصغرى وفترات التزايد والتناقص (إن وجدت) للدالة

$$f(x) = x^3 - 27x.$$

الحل :- أولاً نجد المشتقة الأولى للدالة $f(x)$:-

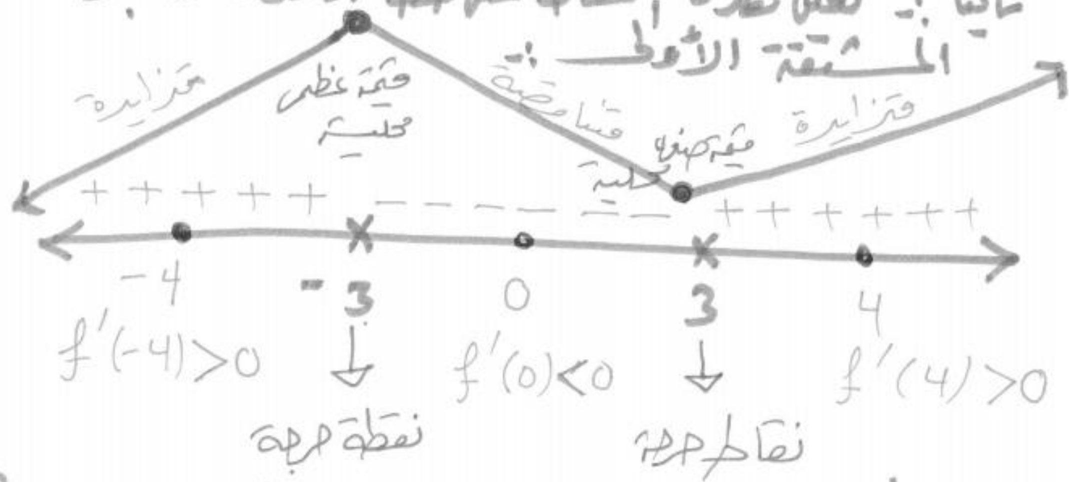
$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$3x^2 - 27 = 0.$$

$$3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}.$$

نقاط حرجة

ثانياً :- نضع هذه النقاط على خط الأعداد ونختبر إشارة المشتقة الأولى :-



قيمة عظمى محلية عند $x=-3$ ، قيمة صغرى محلية عند $x=3$

فترات التزايد :- $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

فترات التناقص :- $(-3,3)$.

- كيفية حساب فترات التقعر ونقاط الانعطاف من خلال اختبار المشتقة الثانية :

* خطوات الاختبار :-

① نجد المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ ونساويها بالصفر

② نضع هذه النقاط على خط الاعداد :

③ تحديد اشارة $f''(x)$ على كل فترة، حيث يكون $f(x)$ ما يلي :-

ⓐ مقعرة للاعلى اذا كانت $f''(x) > 0$.

ⓑ مقعرة للاسفل اذا كانت $f''(x) < 0$

ⓒ نقطة انعطاف عند $x = a$ إذا تغيرت اشارة $f''(x)$ من موجب الى سالب أو العكس حيث $f''(a) = 0$.

ⓓ واذا لم تتغير اشارة $f''(x)$ عند $x = a$ فإنه لا توجد نقاط انعطاف للدالة $f(x)$.

مثال :- اوجد مجالات التقعر ونقاط الانعطاف للدالة $f(x)=x^3-6x^2$.

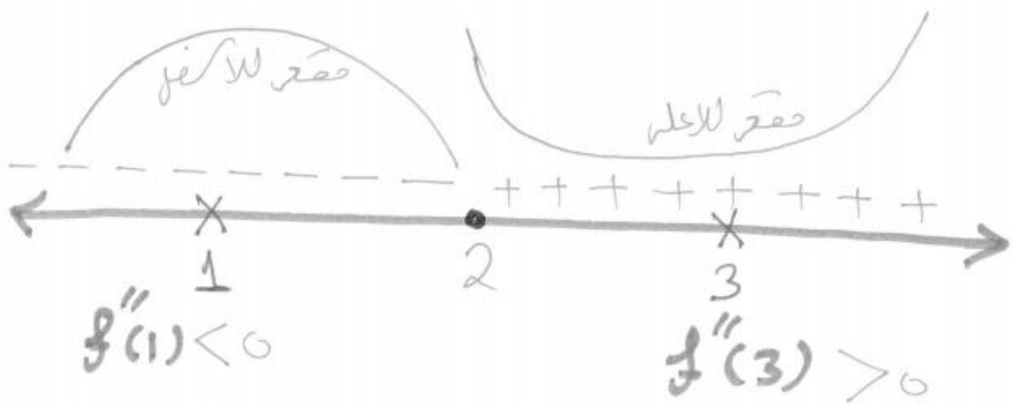
الحل :-

① $f'(x)=3x^2-12x$.

② $f''(x)=6x-12$.

③ $6x-12=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow \boxed{x=2}$

④ نرسم خط الاعداد



وبالتالي سنحصل على ما يلي :-

عند $x=2$ (نقطة انعطاف).

الدالة $f(x)$ مقعرة للاعلى على الفترة $(2,\infty)$

الدالة $f(x)$ مقعرة للاسفل على الفترة $(-\infty,2)$

مثال :- اوجد مجالات التقعر ونقاط الانعطاف (إن وجدت) للدالة $f(x) = 5x^3 - 2x$.

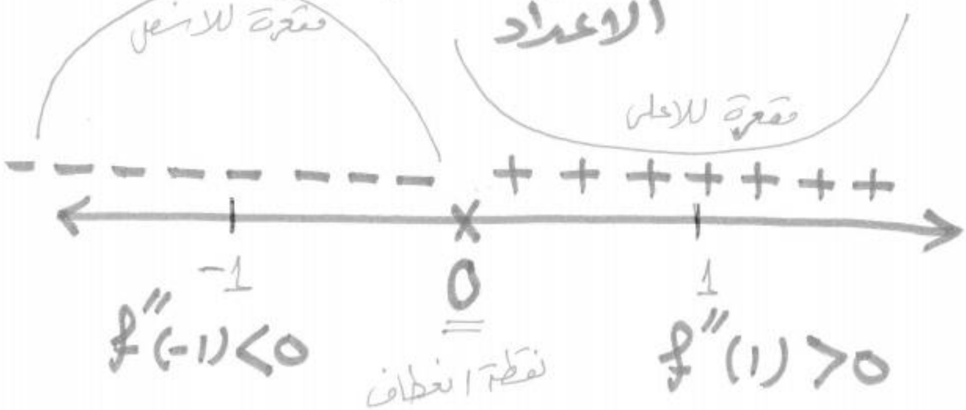
الحل :-

① $f'(x) = 15x^2 - 2$.

② $f''(x) = 30x$.

④ $30x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{30} \Rightarrow x = 0$

⑤ نعين هذه النقطة على خط الاعداد



النتيجة النهائية :-

• نجد $f(x)$ مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$

• نجد $f(x)$ مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$

نقطة انعطاف عند النقطة $x = 0$.

تمرين :- أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى أو الصغرى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف (إذا وجدت) للدالة

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4$$

نهاية المحاضرة المسجلة الثانية عشر

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

- **دالة التكلفة الحدية Marginal Cost**

التكاليف الثابتة Fixed Cost : وهي التكاليف التي لا تتغير بتغير كميات الانتاج.

التكاليف المتغيرة Variable Cost: وهي التكاليف التي تتغير بتغير كميات الانتاج.

التكاليف الكلية Total Cost: وهي مجموع التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة للإنتاج معا.

التكاليف الحدية Marginal Cost: وهي أي تكاليف اضافية مطلوبة من اجل انتاج وحدة واحدة إضافية من سلعة ما حيث يمكن الحصول على دالة الإيراد الحدى من خلال تفاضل دالة التكلفة الكلية.

- **دالة الايراد الحدى Marginal Revenue:**

دالة الإيراد الكلي Total Revenue: وهو العائد من بيع عدد من وحدات منتج معين

دالة الايراد الكلي= عدد الوحدات المباعة × سعر البيع للوحدة الواحدة

الإيراد الحدي Marginal Revenue

وهي العائد الناتج من بيع وحدة انتاج اضافية، حيث يمكن الحصول على دالة الإيراد الحدي من خلال تفاضل دالة الإيراد الكلي.

- **دالة الربح الحدى Marginal Revenue:**

دالة الربح الكلي Total Profit

الربح الكلي= الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

الربح الحدي Marginal Profit

يمكن الحصول على دالة الربح الحدي من خلال تفاضل دالة الربح الكلي.

- **مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية لسلعة ما ولتكن x هي:**

$$C(x) = 5x^2 + 2x + 8$$

أوجد دالة التكاليف الحدية ثم أوجد قيمة التكلفة الحدية عند انتاج الوحدة الخامسة؟

الحل:

دالة التكلفة الحدية = مشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية

$$C'(x) = 10x + 2$$

وعند انتاج الوحدة الخامسة $(x = 5)$ فإن التكلفة الحدية تساوي

$$C'(5) = 10 \times 5 + 2 = 52 \text{ ريال}$$

- **مثال:** **إذا كانت دالة التكلفة الكلية لسلعة ما ولتكن x هي:**

$$C(x) = x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 200$$

أوجد دالة التكاليف الحدية ثم أوجد قيمة التكلفة الحدية عند انتاج الوحدة العاشرة؟

الحل:

دالة التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية

$$C'(x) = 5x^4 + x^3 - 9x^2$$

وعند انتاج الوحدة العاشرة $(x = 10)$ فإن التكلفة الحدية تساوي

$$C'(10) = 5 \times 10^4 + 10^3 - 9 \times 10^2 = 50,100 \text{ ريال}$$

- **مثال:** **إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:**

$$R(x) = 500x - 0.05x^2$$

أوجد دالة الإيراد الحدي وقيمة الإيراد الحدي عند بيع ١٠٠ وحدة (x =100)؟

الحل:

دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلية

$$R'(x) = 500 - 0.10x$$

وعند بيع مئة وحدة $(x = 100)$فإن الإيراد الحدي يساوي

$$R'(100) = 500 - 0.10(100) = 500 - 10 = 490 \text{ ريال}$$

- **مثال:** **إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:**

$$R(x) = 5 + 10x - 2x^2 + 3x^3$$

أوجد دالة الإيراد الحدي وقيمة الإيراد الحدي عند بيع ٢٠ وحدة ($x = 20$)؟

الحل:

دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلية

$$R'(x) = 10 - 4x + 9x^2$$

وعند $(x = 20)$فإن الإيراد الحدي يساوي

$$R'(20) = 10 - 4(20) + 9(20)^2 = 10 - 80 + 3600 = 3,530 \text{ ريال}$$

- **<u>مثال:</u> إذا كانت دالة الربح الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:**

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 150$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع ٣٥ وحدة من السلعة x؟

<u>الحل:</u>

دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي

$$P'(x) = 9x^2 - 4x$$

وعند بيع ٣٥ وحدة $(x = 35)$ فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(35) = 9(35)^2 - 4(35) = 11,025 - 140 = 10,885 \text{ ريال}$$

- **<u>مثال:</u> إذا كانت دالة الربح الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:**

$$P(x) = 10x^2 - 200x - 50$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع 70 وحدة من السلعة x؟

<u>الحل:</u>

دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي

$$P'(x) = 20x - 200$$

وعند بيع ٧٠ وحدة $(x = 70)$ فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(70) = 20(70) - 200 = 1400 - 200 = 1200 \text{ ريال}$$

- **<u>مثال:</u> إذا كانت دالة الإيراد الكلي لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية:**

$$R(x) = 5x^2 - 200x - 50$$

وكانت دالة التكاليف الكلية لنفس السلعة تعطى بالعلاقة التالية:

$$C(x) = x^2 - 30x + 200$$

أوجد دالة الربح الحدي وقيمة الربح الحدي عند بيع 125 وحدة من السلعة x؟

<u>الحل:</u>

أولا: نجد أولا دالة الربح الكلي

دالة الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x) = (5x^2 - 200x - 50) - (x^2 - 30x + 200)$$

$$\rightarrow P(x) = 4x^2 - 170x - 250$$

ثانيا: نجد المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي ($P(x) = 4x^2 - 170x - 250$)

لنحصل على دالة الربح الحدي

$$P'(x) = 8x - 170$$

وعند بيع الوحدة رقم ١٢٥ ($x = 125$) فإن الربح الحدي يساوي

$$P'(125) = 8\,(125) - 170 = 1000 - 170 = 830 \text{ ريال}$$

- **مسائل وتمارين**

إذا كانت دالة التكاليف الكلية لسلعة ما ولتكن x تعطى بالعلاقة التالية

$$C(x) = 7x^2 - 50x$$

ودالة الايراد الكلي للسلعة ذاتها تعطى بالعلاقة التالية

$$R(x) = x^3 + 5x^2 - 100$$

أوجد:

١- التكلفة الحدية عند انتاج ٥٠ وحدة؟

٢- الإيراد الحدي عند بيع ٢٥ وحدة؟

٣- الربح الحدي عند بيع ١٠٠ وحدة؟

- **تمارين إضافية على الفصل الرابع:**

١- إذا كانت $f(x) = -5xcosx$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $5xsinx$ ب- $5xsinx - 5cosx$ ج- $5xsinx + 5cosx$ د- $-5xsinx + 5cosx$

٢- إذا كانت $f(x) = log(sinx)$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $\frac{cosx}{sinx}$ ب- $\frac{-cosx}{sinx}$ ج- $\frac{sinx}{cosx}$ د- $\frac{-sinx}{cox}$

٣- إذا كانت $f(x) = e^{2x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- e^{2x^3} ب- $6xe^{2x^3}$ ج- $6x^2e^{2x^3}$ د- $6e^{2x^3}$

٤- إذا كانت $f(x) = -5x^{-5}$ فإن $\frac{dy}{dx} = ?$

أ- $-25x^{-4}$ ب- $25x^{-4}$ ج- $-25x^{-6}$ د- $25x^{-6}$

٥- إذا كانت $f(x) = log_{10}(-10x)$ فإن $f'(x) = ?$

أ- $\frac{1}{xln(10)}$ ب- $\frac{-1}{xln(10)}$ ج- $\frac{10}{xln(10)}$ د- $\frac{-10}{xln(10)}$

٦- إذا كانت $f(x)=\frac{5}{x}$ فإن $f'(x)=?$

أ- $\frac{-5}{x^2}$ ب- $\frac{5}{x^2}$ ج- $\frac{-5}{x^{-2}}$ د- $\frac{5}{x^{-2}}$

٧- إذا كانت $f(x)=e^x$ فإن $f''=?$

أ- 0 ب- e^{x^2} ج- e^x د- 1

٨- إذا كانت $f(x)=(-5x)^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=?$

أ- $-10x^{-3}$ ب- $10x^{-1}$ ج- $-10x^{-1}$ د- $10(-5x)^{-3}$

٩- إذا كانت $f(x)=e^2$ فإن $f'(x)=?$

أ- 0 ب- e^2 ج- $2e^2$ د- 1

١٠- إذا كانت $f(x)=2x^4$ فإن $f'''(x)=?$

أ- $48x$ ب- $24x^2$ ج- 48 د- 0

١١- إذا كانت $f(x)=5^x$ فإن $f'=?$

أ- 5^x ب- $5^x lnx$ ج- $5^x ln5$ د- 0

١٢- إذا كانت $y=-5u\ ,\ u=x^2$ فإن $\frac{dy}{dx}=?$

أ- $5x$ ب- $-5x$ ج- $10x$ د- $-10x$

١٣- إذا كانت $Z=2x^3-3y^2$ فإن $\frac{\partial z}{\partial x}=?$

أ- $6x^2$ ب- $-6y^2$ ج- $6x^2-6y^2$ د- 0

١٤- إذا كانت $Z=2x^3-3y^2$ فإن $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

أ- $6x^2$ ب- $-6y$ ج- $6x^2-6y$ د- 0

١٥- إذا كانت $2y=5x-y^{-2}$ فإن $y'=?$

أ- $\frac{5}{2-2y^{-3}}$ ب- $\frac{5}{2+2y^{-3}}$ ج- $\frac{-5}{2-2y^{-3}}$ د- $\frac{5}{-2-2y^{-3}}$

١٦- إذا كانت $y=sin(5x^2)$ فإن $\frac{dy}{dx}=?$

أ- $10xcos(5x^2)$ ب- $-10xcos(5x^2)$ ج- $10xsin(5x^2)$ د- $-10xsin(5x^2)$

الفصل الخامس: التكامل وتطبيقاته

❑ **مفهوم التكامل:**

ينقسم التكامل إلى قسمين: التكامل غير المحدود والتكامل المحدود، حيث يركز التكامل غير المحدود على عملية إيجاد المعكوس الرياضي للتفاضل ولهذا السبب يسمى أيضا بالاشتقاق العكسي. ومن جهة أخرى، يركز التكامل المحدود على حساب اطوال المنحنيات والمساحات والحجوم وما إلى ذلك من الدوال التي لها تطبيقات في شتى العلوم المختلفة.

أولا: التكامل غير المحدود

وهو عملية عكسية للاشتقاق، وتسمى عملية إيجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل.

ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل.

❑ **وإذا كانت f دالة بدلالة المتغير x، فإن التكامل غير محدود التابع لها يعطى بالصورة التالية:**

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

نلاحظ دائما أنه يرافق عملية التكامل الرمز dx وهو يدل على أن العملية تجرى بالنسبة للمتغير x، كما يرافق الناتج عدد ثابت ويرمز له بالرمز c ويسمى بثابت التكامل.

❑ **ملخص يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل**

$$F(x) \xrightarrow{\text{عملية التفاضل}} F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)dx = F(x) \xleftarrow{\text{عملية التكامل}} f(x)$$

مثال يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل.

إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x^2$

فإن $f'(x) = 2x$ **(عملية التفاضل)**

أما $\int 2x dx = x^2 + c$ **(عملية التكامل)**

❑ **مثال يوضح العلاقة العكسية ما بين مفهوم التفاضل ومفهوم التكامل:**

إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = \frac{1}{5}x^5$، واردنا أن نجد المشتقة الأولى، فنحصل على:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 \xrightarrow{\text{عملية التفاضل}} f'(x) = \frac{1}{5}[5 \times x^{5-1}] = x^4$$

نلاحظ انه في عملية الاشتقاق تم تطبيق الخطوات التالي

1. **اخد الاس و ضربة كمعامل للمتغير**
2. **نطرح من الاس الاصلي العدد ١**

الرمز C

يمثل عدد ثابت حيث اننا لا نعرف فيما اذا كان اصل الدالة قبل عملية الاشتقاق يرافقها ثابت وفي مثل هذا المثال ، ام لا نلاحظ ان قيمة الثابت = صفر

$$\int f'(x)dx = \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5}$$

نلاحظ انه في عملية التكامل تم تطبيق الخطوات التالي :

1. **نضيف للأس العدد ١**
2. **نقسم الاس الجديد على المتغير x**

❑ **قواعد التكامل:**

١- تكامل الدالة الثابتة: إذا كانت $f(x) = a$، حيث a عدد ثابت فإن

$$\int f(x)dx = \int a dx = ax + c$$

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

$$1 - \int 10dx = 10x + c$$

$$2 - \int -\frac{1}{3}dx = -\frac{1}{3}x + c$$

$$3 - \int e^2 dx = e^2 x + c$$

$$4 - \int (\frac{1}{5})^3 dx = \frac{1}{125}x + c$$

٢- إذا كانت $f(x) = x^n$، فإن

$$\int f(x)dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث n عدد حقيقي بشرط $n \neq -1$

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

$$1- \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2- \int -x^5 dx = -\frac{x^6}{6} + c$$

$$3- \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$4- \int -x^{-2} dx = \frac{-x^{-1}}{-1} + c = x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$$

نلاحظ أن مشتقة الدالة

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

تساوي

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$$

3- إذا كانت $f(x) = e^x$، فإن

$$\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + c$$

٤ - إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$، فإن

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

بشرط $x \neq 0$.

5- إذا كانت $f(x) = sin(x)$، فإن

$$\int f(x)dx = \int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

6 - إذا كانت $f(x) = cos(x)$، فإن

$$\int f(x)dx = \int cos(x)dx = sin(x) + c$$

7- إذا كانت $g(x) = af(x)$، فإن

$$\int g(x)dx = \int af(x)dx = a\int f(x)\, dx$$

يتم اخراج الثابت خارج التكامل

8 - إذا كانت $f(x)$، $g(x)$، دالتين فإن

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\, dx$$

مثال: أوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

للتأكد من صحة الحل، يمكن اشتقاق الناتج ليعطينا الدالة قبل عملية التكامل

$$1-\quad \int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]+c = x^3+c$$

$$2-\quad \int -\frac{6}{5}x^5dx = -\frac{6}{5}\int x^5dx = -\frac{6}{5}\left[\frac{x^6}{6}\right]+c = -\frac{1}{5}x^6+c$$

$$3-\quad \int 5x^{-1}dx = 5\int \frac{1}{x}dx = 5ln|x|+c$$

$$4-\quad \int -x^{-2}dx = -\int x^{-2}dx = -1\times\frac{x^{-1}}{-1}+c = x^{-1}+c = \frac{1}{x}+c$$

$$5-\quad \int (3x^2-2x)dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx =$$

$$3\left[\frac{x^3}{3}\right]-2\left[\frac{x^2}{2}\right]+c = x^3-x^2+c$$

$$6-\quad \int 4sin(x)dx = 4\int sin(x)dx = 4[-cos(x)]+c = -4cos(x)+c$$

$$7-\quad \int 3(e^x-cos(x))dx = 3\int e^xdx - 3\int cos(x)dx = 3e^x-3sin(x)+c$$

$$8-\quad \int (x^2-5x-10)dx = \int x^2\,dx - 5\int x\,dx - 10\int dx = \frac{x^3}{3}-5\times\frac{x^2}{2}-10x+c$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-10x+c$$

$$9-\quad \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$10-\quad \int 4x^{\frac{-1}{4}}dx = 4\int x^{\frac{-1}{4}}dx = 4\left[\frac{x^{\frac{-1}{4}+1}}{\frac{-1}{4}+1}\right]+c = 4\left[\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right] = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}}+c$$

- **ملاحظة:** إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ داخل تكامل معين فإن التكامل لهذا النوع من المسائل يعطى حسب القوانين التالية:

$$1.\int [f(x)]^n.f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c\,,n\neq -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int 3(x^3+4)^4x^2dx = \frac{(x^3+4)^5}{5}+c$$

$$ii.\quad \int (x^2+1)^3\, 2x\, dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

$$iii.\quad \int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c = \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

- **ملاحظة: إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ داخل تكامل معين فإن التكامل يعطى حسب القوانين التالية:**

$$2.\ \int [f(x)]^n . f'(x)\, dx = \ln|f(x)| + c\ , n = -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int 4x^3(1+x^4)^{-1} dx = \ln|1+x^4| + c$$

$$ii.\quad \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int 2x(1+x^2)^{-1} dx = \ln|1+x^2| + c$$

- **مسائل وتمارين:**

$$1.\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right)dx$$

$$2.\int \left(-3x^{2/3}\right)dx$$

$$3.\int \frac{2x}{x^2+5}dx$$

$$4.\int \left(5\sin x - 5\cos x\right)dx$$

$$5.\int \left(-5x^2\right)(-10x)dx$$

$$6.\int \left(e^x - x^{-3}\right)dx$$

الفصل الخامس: التكامل و تطبيقاته

يقسم التكامل الى قسمين :

- **التكامل المحدود**
- **التكامل غير المحدود**

- **التكامل المحدود :هو عملية عكسية للاشتقاق** $\acute{F}(x) = 3X^2 \xrightarrow{\text{تفاضل}} F(x) = X^3$

$$\grave{F}(x) = 3X^2 \xrightarrow{\text{تكامل}} S\acute{F}(x)dx = \frac{3X^{2+1}}{2+1}$$

$$= \frac{3\times3}{3} = 3X^3 = F(x)$$

تمارين و تدريبات:

اوجد قيمة التكامل لما يلي :

$$1)F(x) = \frac{-3}{2} \to \int F(x)dx = \int \frac{-3}{2}dx = \frac{-3}{2}\int dx\ F(x) = \frac{-3}{2}X + C$$

و للتأكد من صحته نشتق: **الاجابة متساوية فالحل صحيح** **دالة ثابته**

$$\grave{F}(x) = \frac{-3}{2}$$

$$2) \int X^{-3}dx = \frac{X^{-3+1}}{-3+1} + 2 = \frac{X^{-2}}{-2} + 2$$

$$3) \int \frac{1}{2}X^4dx = \frac{1}{2}\int X^4dx = \frac{1}{2}\left(\frac{X^{4+1}}{4+1}\right) + 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{X^5}{5}\right) + 2 = \frac{X^5}{10} + 2$$

في حال الرغبة بالتأكد من حصة الحل نقم باشتقاق الاجابة الاخيرة $\grave{F}(x) = \frac{5\times4}{10} = \frac{X^4}{2} = \frac{1}{2}X^4$

$$4) \int (X^3 - 2X^2 - X^{-1} + 5)dx \to \int X^3dx - 2\int X^2dx - \int X^{-1}dx + 5\int dx = \frac{X^4}{4} - 2\left(\frac{X^3}{3}\right) - In|X| + 5X + C$$

القاعدة الخاصة بهذا الجزء هي

$$\int X^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = In|X| + C$$

قاعدة $\underline{\int e^x dx = e^x + C}$

$$5) \int e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

$$6) \int e^{\frac{1}{2}x}dx = \frac{e^{\frac{-1}{2}x}}{\frac{-1}{2}} + C = -2e^{\frac{-1}{2}} + C$$

$$7) \int e^{2x-4}dx = \frac{e^{2x-4}}{2} + C = F(x)$$

للتأكد من صحة الحل : نشتق الناتج $\grave{F}(x) = 2(e^{2x-4})\frac{-1}{2} = e^{2x-4}$

قاعدة :

$$(\int sinXdx = -cosX + C)$$

$$(\int cosXdx = sinX + c)$$

$$8) \int sin\ 5Xdx = \frac{cos5X}{5} + C$$

$$9) \int cos - 2Xdx = \frac{Sin(-2X)}{-2} + C$$

في حال وجود تكامل يحتوي على دالة و مشتقتها، فإن القاعدة تصبح كما يلي :

$$\int (F(x))^n . F(\acute{x})dx = \frac{(F(x))^{n+1}}{n+1} + c , n \neq -1$$

$$10) \int (X^3 + 1)^2 . 3X^2dx = \frac{(X^3+1)^3}{3} + C = F(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{3}(3(X^3 + 1)^2 . 3X^2$$

$$11) \int (6X^2 - 5)^5 . 12Xdx = \frac{(6X^2-5)^6}{6} + c$$

$$12) \int (4X^5 - 6X)^4 . (20X^4 - 6)dx$$

هذا المقدار مشتق ما داخل القوس

$$= \frac{(4X^5-6X)^5}{5} + C$$

في حال كانت n= -1 :.

$$\int (F(x))^{-1} . F(\acute{x})dx = \int \frac{F(\acute{x})}{F(x)} dx = In|f(x)| + C$$

$$10) \int \frac{2x+1}{(X^2+x)^1} dx = \int (X^2 + x)^{-1}(2X + 1)dx = In|X^2 + X| + C$$

للتأكد > نشتق $\frac{2X+1}{X^2+X}$

$$11) \int (x^2 + 5)^{-1} . 2xd = \int \frac{2X}{X^2+5} dx = In|X^2 + 5| + C$$

<u>تابع قواعد التكامل غير المحدود:</u>

$$\int (aX + b)^n dx = \frac{(aX+b)^{n+1}}{a \times n+1} + c$$

الاس الجديد **معامل X**

<u>أمثلة :</u> اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :

$$1) \int (5X + 2)^3 dx = \frac{(5X+2)^{3+1}}{3+1 \times 5} + C = \frac{(5X+2)^4}{4 \times 5} + c = \frac{(5X+2)^4}{20} + C$$

$$2) \int (3X-12)^7 dx = \frac{(3X-12)^{7+1}}{8\times 3} + C = \frac{(3X-12)^8}{24} + C$$

حل المعادلات التفاضلية :

تعريف: اذا عرفنا $\frac{dy}{dx} = F(x)$ فإنه يمكن كتابة هذا المقدار على الصورة dy=F(x)dx ومن خلال اخذ تكامل الطرفين تتضح الصورة التالية :

$$\int dy = \int F(x)dx$$

$$Y = \int F(x)dx$$

بمعنى ان Y هي الدالة التي مشتقتها التفاضلية بالنسبة الى X هي F(x) وتسمى هذه المعادلة $F(x) = \frac{dy}{dx}$ بالمعادلة التفاضلية و عملية ايجاد قيمة y بعملية حل المعادلة التفاضلية .

طريقة حل مثل النوع من المعادلات :

نقوم بعملية فصل المتغيرين X,Y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروبا في دالة ذلك المتغير فقط كما في المثال التالي:

مثال: اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = XY^{-2}$$

الحل:

نحاول فصل المتغيرات كل على حده $\frac{dy}{dx} = \frac{X}{Y^2}$

بالضرب التبادلي $Y^2 dy = X dx$

بأخذ التكامل للطرفين: $\int Y^2 dy = \int X dx \rightarrow \frac{Y^3}{3} = \frac{X^2}{2} + C$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية : $\frac{dy}{dx} = 4X^3Y^3$

نحاول فصل المتغيرات $dy = 4X^3Y^3 dx$

$$\frac{dy}{Y^3} = 4X^3 dx \rightarrow Y^{-3} dy = 4X^3 dx$$

نكامل الطرفين :

$$\int Y^{-3} dy = \int 4X^3 dx \rightarrow \frac{Y^{-2}}{-2} = X^4 + C$$

مسائل و تمارين :

١- اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :

$$1)\ \int (-3X-2)^5 dx$$

$$2)\ \int (10-2X)^{-3} dx$$

٢- اوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = 5X^3Y$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{Y^2}{X}$$

الفصل الخامس: التكامل وتطبيقاته.

- **التكامل المحدود:**

إذا كانت g (x) دالة بحيث $g'(x) = f(x)$

فإن $\int_a^b f\ (x)\ dx = g(x) \int \int_a^b = g\ (b) - g\ (a)$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدود للدالة $f\ (x)$ على الفترة [a,b] ويسمى a بالحد الأدنى للتكامل وb بالحد الأعلى للتكامل.

مثال: أوجد $\int_1^3 x^3 dx$ ؟؟

الحل:

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\int_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^1}{4}$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{80}{4} = 20$$

مثال: أوجد ناتج التكامل التالي:

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - 5)dx = ??$$

الحل:

$$= \int_{-1}^1 2x^2 dx - \int_{-1}^1 5\ dx$$

$$= \frac{2x^3}{3}\int_{-1}^1 -5x\ \int_{-1}^1.$$

$$\left(\frac{2(1)^3}{3} - \frac{2(-1)^3}{3}\right) - (5(1) - 5(-1))$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) - (5 + 5) = \frac{4}{3} - 10$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{30}{3} = \frac{-26}{3}$$

مثال: أوجد ناتج التكامل التالي:

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = ??$$

الحل:

$$= \int_1^3 x^2 dx - \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\int_1^3 - f_n\,|x|\int_1^3 .$$

$$= \frac{26}{3} - f_n 3$$

$$= \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) - (f_n - f_n 1)$$

بعض من خواص التكامل المحدود:

$$1 - \int_a^b c\, f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

مثال:

$$\int_1^2 4x^3 dx = 4\int_1^2 x^3 dx = \quad 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$= 4\left[\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \cancel{4}\left[\frac{15}{\cancel{4}}\right] = 15$$

مثال:

$$\int_0^3 \frac{1}{2} x^4 dx = ??$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 x^4\, dx = \frac{1}{2} \quad \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{243}{5}\right] \quad = \frac{243}{10} = 24.3$$

إذا كان حدود التكامل متساوية

فإن الناتج = صفر

$$2 - \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

مثال:

$$1- \int_{5}^{5} 10x^3\,dx = 0.$$

$$2- \int_{-2}^{-2} f(x)\,dx = 0.$$

$$3- \int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

مثال: أوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة:

$$① \int_0^2 (\underbrace{3x^2}_{f(x)} + \underbrace{e^x}_{g(x)})\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_0^2 e^x\,dx$$

$$= x^3\Big|_0^2 + e^x\Big|_0^2$$

$$= (2^3 - 0^3) + (e^2 - e^0)$$

$$= 8 + e^2 - 1 = 7 + e^2$$

عدد ثابت يمكن ايجاده من خلال الآلة الحاسبة.

في عملية عكس حدود التكامل يجب ان نضيف اشارة السالب.

$$4- \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: إذا كان:

$\int_4^2 f(x)\,dx = -8$ فإن $\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{-1}{2}$

وكذلك إذا كان:

$$\int_{1}^{-1} g(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

فإن $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = \frac{-1}{2}$

$$5- \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

مثال: أوجد ناتج التكامل التالي:

$$① \int_2^1 x^2 dx + \int_4^2 x^2 dx = \int_2^2 x^2 dx = 0.$$

حل آخر

$$\int_2^4 x^2 dx - \int_2^4 x^2 dx = 0.$$

أمثلة: أوجد كل من التكاملات التالية:

$$1)\ \int_0^2 3\,dx = 3x \Big|_0^2 = 3(2) - 3(0) = 6.$$

$$2)\ \int_0^2 (x+6)\,dx = \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 6\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 6x\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) + \left(6(2) - 6(0)\right)$$

$$= 2 + 12 = 14.$$

كذلك يمكن ان تقوم بعملية التكامل مباشرة دون التوزيع ليصبح الحل بطريقة أخرى:

$$\int_0^2 (x+6)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 6(2)\right) - \left(\frac{0}{2} + 6(0)\right)$$

$$= 2 + 12 - 0$$

$$= 14.$$

③ $\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)\, dx.$

الناتج من تعويض الحد الاعلى

الناتج من تعويض الحد الادنى

$= \left[x^3 - 2x^2 - 5x \right]_{1}^{3} = [27 - 18 - 15] - [1 - 2 - 5]$

$= {}^{-}6 - (-6)$

$= -6 + 6 = 0.$

④ $\int_{-2}^{2} (5x + 4)\, dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x \right]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{5(2)^2}{2} + 4(2) \right) - \left(\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2) \right)$

$= \left(\frac{20}{2} + 8 \right) - \left(\frac{20}{2} - 8 \right)$

⑥ $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = ??$

الحل:-

$= -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$

$= -(-1) - (-1)$

$= 1 + 1 = 2.$

تمارين: أوجد التكاملات التالية:

$$1-\int_{0}^{2}(5x^3-3x+6)\,dx=??$$

$$2-\int_{-2}^{7}7\,dx=??$$

$$3-\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$4-\int_{2}^{2}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$5-\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$$

نهاية المحاضرة السادسة عشر

مع التمنيات للجميع بدوام التقدم والنجاح

حلول بعض من تمارين الفصل الرابع : التفاضل

١- اوجد مشتقة الدوال التالية

$$F(x) = aX^n$$
$$\grave{F}(x) = a.n.X^{n-1}$$

$!)y = 4X^2 - 3X^4$

$\grave{y} = 8Xx - 12X^3$

٩ $!!)y = \sqrt{3}(X^5 - X^{-3})$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}(5X^4 + 3X^{-4})$

- **قاعدة مشتقة حاصل قسمة دالتين :**

$!)y = \frac{1}{2X+3}$

$\acute{y} = \frac{0-1(2)}{(2X+3)^2} = \frac{-2}{(2X+3)^2}$

$!!)y = (X^2 + 2X + 3)(X^2 + 1)$

$\acute{y} = (2X + 2)(X^2 + 1) + (X^2 + 2X + 3)(2X)$

مشتقة الدالة الاولى الدالة الثانية الاولى مشتقة ثانية

$!!!)y = (4X^2 + 5X - 2)^8$

$\acute{Y} = 8(4X^2 + 5X - 2)^7(8X + 5)$

دالة ثابتة

F(x)=25*10

$\acute{F}(x) = 0$

- **قاعدة السلسلة**

تمرين:

$y = 5 \quad , \quad u = 3X + 7$

المطلوب: $= \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d4}.\frac{d4}{dx} = 5 \times 3 = 15$

تمرين على مفهوم المشتقات العليا:

$!)y = X^3 - 4X^2 + 5x - 6$

اوجد $\dddot{F}(x)$

$\dot{y} = 3X^2 - 8X + 5 \rightarrow \ddot{y} = 6X - 8 \rightarrow \dddot{y} = 6$

- **مشتقة الدوال الاسية ، اللوغاريتمية و المثلثية**

$$1)y = e^{x2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2X.e = 5X$$

$$2)y = 2$$

$$\dot{y} = 5.2.\text{In}2$$

$$F(x) = \text{In}(3X)$$

$$\dot{F}(x) = \frac{3}{3X} = \frac{1}{X}$$

$$F(x) = \log_5 X^2$$

$$\dot{F}(x) = \frac{2X}{X^2\,\text{In}5} = \frac{2}{X\,\text{In}5}$$

- **الدوال المثلثية**

تمرين :

$$1)F(x) = 5\,\text{sinX}$$

$$\dot{F}(x) = 5\,\text{coX}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dot{F}(x) = \sin x \\ \dot{F}(x) = \cos x \end{matrix}}$$

$$2)F(x) = \sin(5X)$$

$$\dot{F}(x) = 5\cos(5x)$$

$$\boxed{\begin{matrix} F(x) = \cos x \\ \dot{F}(x) = -\sin v \end{matrix}}$$

$$3)F(x) = 5\cos(2X)$$

$$\dot{F}(x) = 5 \times 2 \times -\sin(2x) = -10\sin(2x)$$

- **مفهوم مشتقة الدالة الضمنية**

$$2X + y^2 = 10X + 5$$

و عملية الاشتقاق تتم على النحو الاتي:

$$2 + 2y\frac{dy}{dx} = 10$$

- **الاشتقاق الجزئي**

$$z = 5X^2 - 2y + 10xy$$

z دالة مكتوبة بدلالة اكثر من متغير

$$\frac{az}{ax} = 10X - 0 + 1y = 10x + 10y$$

$$\frac{az}{ay} = 0 - 2 + 10x = -2 + 1$$

- **ميل ومعادلة مماس منحنى الدالة**

$F(x) = 3x - X^4$ عند **X=2**

لإيجاد الميل : نشتق و نعوض عند X=2

$$\dot{F}(x) = 3 - 4X^3 \rightarrow \dot{F}(2) = 3 - 4(2)^3 = 3 - 32 = -29$$

$$F(2) = 3(2) - 2^4 = 6 - 16 = -10 \rightarrow (21 - 10)$$

- **فترات التزايد ، التنقص و القيم الحرجة**

من خلال ما يسمى باختبار المشتقة الاولى

$$F(x) = X^3 - 6X^2 + 4$$

لإيجاد النقاط الحرجة نشتق و نساوي بالصفر

$$\dot{F}(x) = 3X^2 - 12X$$

$$3X^2 - 12X = 0$$

$$3X(X - 4) = 0$$

X=0

X=4

تزايد **تناقص** **تزايد**

$$\dot{F}(1) = 3(1)^2 - 12(1) = 3 - 12 = -9 < 0$$

$$F(x) = X^3 - 6X^2 + 4$$

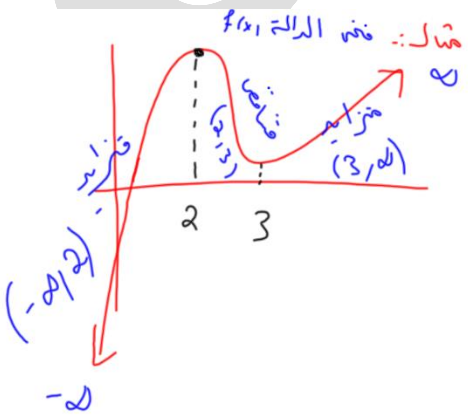
فترات التقعر للأعلى و الاسفل + نقاط الانعطاف من خلال المشتقة الثنية

$$\dot{F}(x) = 3X^2 - 12X$$

$$\ddot{F}(x) = 6X - 12$$

$$6X - 12 = 0 \rightarrow 6X = 12 \rightarrow X = 2$$

$$\ddot{F}(1) = 6 - 12 < 0 \quad , \quad \ddot{F}(3) = 1 - 12 > 0$$



تطبيقات اقتصادية على التفاضل

دالة التكلفة الكلية

نشتق و نعوض بقيمة معينة لنحصل على التكلفة الحدية

دالة الايراد الكلي

نشتق و نعوض معنية لنحصل على الايراد الحدي

دالة الربح الكلي

نشتق و نعوض بقيمة معينة لنحصل على الربح الحدي

تمرين : اذا كانت $C(x) = 7X^2 - 50X$ دالة التكلفة الكلية

التكلفة الحدية عند X=50

$\dot{C}(x) = 14X - 50$

$\dot{C}(x) = 14(50) - 50 = 700 - 50 = 650$ ريال

$R(x) = X^3 + 5X^2 - 100$

المطلوب: ايجاد الايراد الحدي عند X=25

الحل:

$\dot{R}(x) = 3X^2 + 10X$

$\dot{R}(x) = 3(25)^2 + 10(25) = 3(625) + 250 = 1875 + 250 = 2125$ ريال

$P(x) = R(x) - C(x)$

المطلوب: الايراد الحدي عند X=100

$(X^3 + 5X^2 - 100) - (7X^2 - 50X)$

$\dot{P}(x) = (3X^2 + 10X) - (14X - 50)$

$\dot{P}(100) = (3\left(100)^2 + 10(100)\right) - (14(100) - 50) = (30.000 + 1000) - (1400 - 50)$

$(31.000 - 1350) = 29.650$ ريال

- **الضرب الديكارتي**

$A = \{2,3\},\ \ B = \{5,7\}$

$A \times B = \{(2,5),(2,7),(3,2),(3,7)\}$

المحاضرة السابعة عشر: تابع الفصل الخامس: التكامل وتطبيقاته.

- التكامل المحدود:

$$\int_{\underset{\text{الحد الأدنى}}{a}}^{\overset{\text{الحد الأعلى}}{b}} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

حيث:

$$F'(x) = f(x).$$

مثال:

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x + 5)dx$$

$$= \left(\frac{4x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 5x\right) \int_{-1}^{1}.$$

$$= (x^4 - x^2 + 5x) \int_{\underset{\text{الحد الأدنى}}{-1}}^{\overset{\text{الحد الأعلى}}{1}}.$$

$$= (1^4 - 1^2 + 5(1)) - ((-1)^4 - (-1)^2 + 5(-1))$$

$$= (\cancel{1} - \cancel{1} + 5) - (+\cancel{1} - (\cancel{+1}) - 5).$$

$$= (5) + 5 = 10.$$

- القواعد الخاصة بالتكامل غير المحدود تطبق أيضاً على التكامل المحدود.
- تعرفنا على بعض من خواص التكامل المحدود:

1- $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

2- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (معدوم التكامل مساحة).

3- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

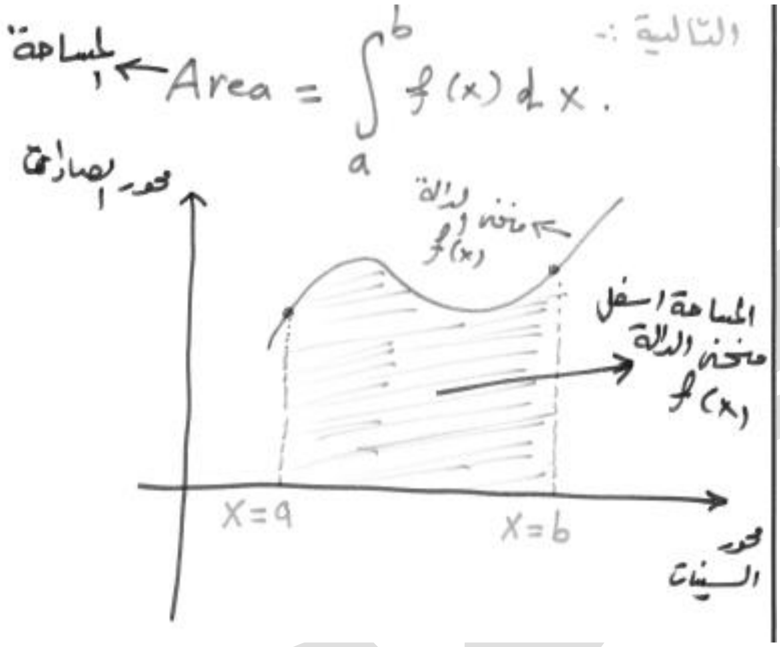
4- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

5- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

- تطبيقات على التكامل:

أولاً: كيفية ايجاد المساحة أسفل منحنى الدالة $f(x)$:

تعريف: إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ بحيث كانت معرفة على الفترة [a,b] تعطي بالصيغة التالية:



مثال: أوجد المساحة أسفل منحنى الدالة $f(x) = 5x^4$

بين النقطتين $x = 1$ و $x = 3$ ؟؟

الحل:

الحل :-

$$Area = \int_1^3 (5x^4)\,dx = \frac{5x^5}{5}\Big|_1^3$$

$$= x^5\Big|_1^3 = (3^5) - (1)^5$$

$$= 243 - 1$$

$$= 242 .$$

مثال: اوجد المساحة اسفل منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 + 2x - 10$

وبين المستقيمين $x = 0$ و $x = 2$ ؟؟

الحل :-

$$Area = \int_0^2 (3x^2+2x-10)\,dx$$
$$= \left(\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 10x\right)\Big|_0^2$$
$$= x^3 + x^2 - 10x \Big|_0^2$$
$$= (2^3+2^2-10(2)) - \cancel{(0^3+0^2-10(0))} = -8$$

تمارين: أوجد المساحة تحت منحنى الدالة التالية:

١- $f(x) = x^2 - 7x + 11$ وبين $x = 0$ و $x = 2$ ؟؟
٢- $f(x) = x^3 - 6x + 8$ وبين $x = -1$ و $x = 1$ ؟؟

ثانياً: تطبيقات اقتصادية على مفهوم التكامل:

دالة التكلفة الحدية ← من خلال عملية التكامل ← دالة التكلفة الكلية.

دالة الايراد الحدي ← من خلال عملية التكامل ← دالة الايراد الكلي.

دالة الربح الحدي ← من خلال عملية التكامل ← دالة الربح الكلي.

مثال: (تطبيق على ايجاد دالة التكلفة الكلية)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات.

تعطى بالعلاقة

$$C'(x) = 18x^2 + 20x - 15 \leftarrow \text{Cost (الحدية)}$$

المطلوب: ايجاد دالة التكلفة الكلية علماً بأن قيمة التكاليف الثابتة = 200 ← قيمة الثابت c بعد عملية التكامل.

$$C(x) = \int C'(x)\,dx$$
$$= \int (18x^2+20x-15)\,dx$$
$$= 18\frac{x^3}{3} + 20\frac{x^2}{2} - 15x + C.$$
$$= 6x^3 + 10x^2 - 15x + 200.$$

مثال: إذا كانت دالة الايراد الحدي لإنتاج إحدى الشركات تمثله بالعلاقة.

$$R'(x) = 60x^3 + 9x^2 + 50$$

Revenue ← الحائر

أوجد دالة الايراد الكلي علماً بأن الايراد = صفراً في حال عدم بيع أي وحدة؟

$C = 0.$

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int (60x^3 + 9x^2 + 50)\,dx$$

دالة الإيراد الكلي

$$= 60\frac{x^4}{4} + 9\frac{x^3}{3} + 50x + c$$

$$= 15x^4 + 3x^3 + 50x$$

$P'(x) = 12x^3 + 15x^2 + 24x$

Profit الربح

مثال: إذا كانت دالة الربح الحدي لإنتاج إحدى الشركات تعطى بالعلاقة

إيجاد دالة الربح الكلي علماً بأن الربح يساوي صفراً في حال عدم بيع أي وحدة؟؟

الحل:-

$$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int (12x^3 + 15x^2 + 24x)\,dx$$

$$= 12\frac{x^4}{4} + 15\frac{x^3}{3} + 24\frac{x^2}{2} + c$$

$c = 0$

$$= 3x^4 + 5x^3 + 12x^2$$

- تمارين على التطبيقات الاقتصادية:

١- أوجد دالة التكلفة الكلية إذا علم لدينا دالة التكلفة الحدية من خلال العلاقة $c'(x) = 36x^5 + 2x - 100$

علماً بأن التكاليف الثابتة = 500؟

٢- أوجد دالة الايراد الكلي إذا كانت دالة الايراد الحدي تعطى بالعلاقة $R'(x) = 32x^3 + 14x + 25$

علماً بأن الايراد الناتج عن عدم بيع أي وحدة = صفر؟

٣- إذا كانت دالة الربح الكلي تعطى بالعلاقة التالية $P'(x) = 21x^6 + 8x^3 + 14x$

علماً بأن الربح الناتج عن عدم بيع أي سلعة = صفر؟

نهاية المحاضرة المسجلة السابعة عشر

حلول التمارين و التدريبات التي تم طرحها حول

الفصل الخامس من مفهوم التكامل و تطبيقات

مفهوم التكامل

التكامل غير المحدود

قواعد خاصة التكامل غير المحدود و دائما نضيف الحرف Cالى ناتج التكامل

التكامل المحدود

هي نفسها تطبق على التكامل المحدود سوى اننا بعد ايجاد ناتج التكامل نقوم بتعويض حدي التكامل لنحصل على قيمة عددية

التمرين خاص بالمحاضرة المسجلة الرابعة عشر :

$$1)\int(5X^6-2X^4+3X^2-6)dx$$

$$=5\frac{X^7}{7}-2\frac{X^5}{5}+3\frac{X^3}{3}-6X+C=\frac{5}{7}X^7-\frac{2}{5}X^5+X^3-6X+C$$

$$2)\int\left(-3X^{\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$=-3\frac{X^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+c=-3\frac{\left(X^{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}+C=\frac{-3X^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=-3X^{\frac{5}{3}}.\frac{3}{5}+C=\frac{-9}{5}X^{\frac{5}{3}}+C$$

$$3)\int\frac{2X}{X^2+5}dx$$

$$=In\left|X^2+5\right|+C$$

$$4)\int(5Sin\ X-5\ Cos\ X\_dx$$

$$=\int 5\ Sin\ X\ dx-\int 5\ Cos\ X\ dx=5\int Sin\ X\ dx-5\int Cos\ X\ dx=5(-\cos X)-5(\sin X)+C$$

$$5)\int(-5X^2)\,(-10X)dx$$

$$=\frac{(-5X^2)^2}{2}+C$$

$$6)\int(e^x-e^{-3})\,dx$$

$$=\int e^x\,dx-\int e^{-3}\,dx=e^x-e^{-3}X+C$$

$$\int e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}+C$$

$$\int e^{-5x}\,dx=\frac{e^{-5x}}{-5}+C$$

- **التمارين الخاصة بالمحاضرة الخامسة عشر:**

١- اوجد قيمة كل من التكاملات التالية :

قاعدة:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a*n+1}$$

$1)\ \int (-3X-2)^5\,dx = \frac{(-3X-2)^6}{6*-3} + \}$

$= \frac{(-3X-2)^6}{-18} + C$

$2)\ \int (10-2x)^{-3}\,dx = \frac{(10-2x)^{-3+1}}{(-3+1)*-2}$

$\frac{(10-2x)^{-2}}{4} + C$

٢- اوجد حل كل من المعادلات التفضيلية التالية :

$1)\ \frac{dy}{dx} = 5X^3y$

$\frac{dy}{y} = (5X^3)dx \rightarrow \frac{1}{y}dy = 5X^3dx \rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 5X^3\,dy \rightarrow In|y| = \frac{5}{4}X^4 + C$

$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

$Xdy = Y^2dx$

$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{Y^2}dy = \frac{1}{x}dx$

بأخذ التكامل للطرفين

$\int \frac{1}{Y^2}dx = \int \frac{1}{x}dx \rightarrow \int Y^{-2}\,dx = In|X| + C$

$\frac{Y^{-1}}{-1} = In|X| + C \rightarrow \frac{1}{Y} = -In|X| + C$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} \rightarrow Y^2dy = Xdx \rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{X^2}{2} + C$

التمارين الخاصة بالمحاضرة المسجلة السادسة عشر

- **اوجد قيمة التكاملات التالية :**

$1)\ \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)\,dx$

$= \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 6x \Big|_0^2$

$= \frac{5}{4}(2)^4 - \frac{3}{2}(2)^2 + 6(2) - (0)$

$= \frac{5}{4}(16) - \frac{3}{2}(4) + 12$

$= 20 - 6 + 12 = 26$

ii) $\int_{-2}^{7} 7\,dx = 7x \Big|_{-2}^{7} = 7(7) - 7(-2)$

$= 49 - (-14)$

$= 49 + 14$

$= 63$.

!!!) $\int_{-4}^{-4} \sqrt{16 - X^2}\,dx = 0$

حدود التكامل متساوية

$\boldsymbol{iv)\ \int_{2}^{2} X^{-\frac{1}{2}}\,dx = 0}$

لكن

$\int_{-2}^{2} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_{-2}^{2}$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{-2}^{2} = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{-2}^{2}$

$= 2\sqrt{x} \Big|_{-2}^{2}$

$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{-2}$

= قيمة غير حقيقية

$= \infty$

$\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{0}^{\pi}$

$= \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

<u>**التمرين الخاص بالمحاضرة السابعة عشر**</u>

1)

$C'(x) = 36x^5 + 2x - 100$ ← دالة التكلفة الحدية .

التكاليف الثابتة = 500 .

المطلوب إيجاد $C(x)$ ؟؟

دالة التكلفة الكلية .

الحل :-

$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (36x^5 + 2x - 100)\,dx$

$= \frac{36x^6}{6} + \frac{2x^2}{2} - 100x + c$

$= 6x^6 + x^2 - 100x + 500.$

٢

$$R'(x) = 32x^3 + 14x + 25$$

الإيراد عند $x = 0$ يساوي صفر
عدم بيع اي وحدة

المطلوب : $R(x)$ ؟؟

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int (32x^3 + 14x + 25)\,dx$$

$$= 32\frac{x^4}{4} + 14\frac{x^2}{4} + 25x + c$$

$$= 8x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 25x$$

٣

$$P'(x) = 21x^6 + 8x^3 + 14x$$

الربح = صفر عند $x = 0$:.

المطلوب : $P(x)$ ؟؟

$$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int (21x^6 + 8x^3 + 14x)\,dx$$

$$= 21\frac{x^7}{7} + 8\frac{x^4}{4} + 14\frac{x^2}{2} + C$$

$$= 3x^7 + 2x^4 + 7x^2$$

الواجب الأول لمقرر رياضيات الإدارة -١٤٣٨

المستوى الثاني / إدارة أعمال

ماهر - AHZHANM جامعة الدمام / التعليم عن بعد-

السؤال 1

إذا كان

$(3x-5,\ 2y)=(x+1,\ -8)$

فإن قيمة المتغيرين

x, y

تساوي

- ◉ $x=3,\ y=-4$
- ○ $x=3,\ y=4$
- ○ $x=-3,\ y=-4$
- ○ $x=-3,\ y=4$

السؤال 2

الدالة

$f(x)=x^2-3x^3+x-5$

تعتبر

- ○ دالة تكعيبية
- ○ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة
- ○ دالة حقيقية (معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية)
- ◉ جميع ما ذكر صحيح

السؤال 3

أذا كان

$$f(x) = \frac{-3x-9}{6}$$

فإن معكوس الدالة

$f^{-1}(x) =$

- $f^{-1}(x) = 2y+3$
- $f^{-1}(x) = -2y+3$
- $f^{-1}(x) = 2y-3$
- $f^{-1}(x) = -2y-3$

السؤال 4

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة

$(-1,-1)$

وميله

$m = -1$

هي

- $y = -x$
- $y = -x-2$
- $y = -x+2$
- $y = x$

السؤال 5

إذا كان

$f(x) = 3x^2,\ g(x) = -2x$

فإن

$fog(x) =$

- $12x^2$
- $6x^2$
- $-6x^2$
- $-12x^2$

السؤال 6

إذا كان المجموعة a

$A = \{5,\ R\}$

فإن قيمة

$A \times A =$

- $A = \{(5,5),(R,R)\}$
- $A = \{(5,5),\ (R,R),(R,5)\}$
- $A = \{(5,5),\ (5,R),\ (R,R)\}$
- $A = \{(5,5),\ (5,R),\ (R,R),(R,5)\}$

الواجب الثاني لمقرر رياضيات الإدارة -١٤٣٨

المستوى الثاني / إدارة أعمال

- جامعة الدمام / التعليم عن بعد-

AHZHANM + مبدعين المستوى الثاني

السؤال ١

إن نهاية المقدار التالي

إن نهاية المقدار التالي

$$\lim_{x \to 2} [x^2 - 5x + 3]^3$$

تساوي

- 27
- 9
- 27- ✔
- 9-

السؤال ٢

تحقق الدالة

تحقق الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}, & x < 2 \\ -3 \quad , & x \geq 2 \end{cases}$$

الشروط التالية

- معرفة عند النقطة $x = 2$ ✔
- $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة
- $f(x)$ دالة متصلة عند $x = 2$
- لا شيء مما ذكر

السؤال ٣

اقترض شخص مبلغ ٢٥٠٠٠ ريال من احد البنوك بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية مقدارها ٤% لمدة ثلاث سنوات، فإن مقدار الربح الذي سيدفعه هذا الشخص

في نهاية المدة يساوي تقريبا

3154 Riyal

31000 Riyal

6000 Riyal

28154 Riyal

السؤال ٤

إذا اودع شخص مبلغ ٢٥٠٠ ريال في احد البنوك بفائدة سنوية بسيطة مقدارها ٥% لمدة ١٨ شهر، فإن جملة المبلغ تساوي

187.5 Riyal
2250 Riyal
2687.5 Riyal
4750 Riyal

السؤال ٥

إن نهاية الدالة

إن نهاية الدالة

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 2x + 10}{3 - 2x - x^2 - x^3}$$

تساوي

- 0
- −5
- 5
- ∞

السؤال ٦

إذا كانت لدينا الدالة

إذا كانت لدينا الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x > -1 \\ -5 - x^3, & x < -1 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

- 4
- −1
- غير موجودة
- −4

لا تنسونا من صالح دعائكم

استغفر الله ..

@e7sas_ud

المستوى الثاني / إدارة أعمال

- جامعة الدمام / التعليم عن بعد-

الواجب الثالث لمقرر رياضيات الإدارة -١٤٣٨

hawra abdulhadi

قيمة التكامل

$\int e^{-3x} =$

- $-3e^{-3} + c$
- $\dfrac{e^{-3x}}{3} + c$
- $\dfrac{e^{3x}}{3} + c$
- $\boxed{\dfrac{e^{-3x}}{-3} + c}$

تكامل المقدار التالي

$\int_{-2}^{3} -3\,dx =$

- $\boxed{-15}$
- 0
- -3
- -2

إذا كان

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -5$$

فإن

$$\int_3^2 f(x)\mathrm{d}x =$$

- $\boxed{5}$
- -5
- 0
- لا يمكن إيجاده

قيمة التكامل

$$\int -\sin 2x dx =$$

- $\boxed{\frac{\cos 2x}{2} + c}$
- $\cos -2x + c$
- $-2\cos x + c$
- $\frac{-\cos 2x}{2} + c$

قيمة التكامل

$$\int -2x dx =$$

- $-\frac{x^2}{2} + c$
- $x^2 + c$
- $\frac{x^2}{2} + c$
- $\boxed{-x^2 + c}$

إن قيمة التكامل

$$\int 2(2x-1)dx =$$

- $\boxed{2x^2 - 2x + c}$ ◉
- $-2x^2 + 2x + c$ ○
- $x^4 - 2x + c$ ○
- $2x^2 - 2 + c$ ○

قيمة التكامل

$$\int_{-1}^{-1} 5\,dx =$$

- 5 ○
- -1 ○
- $\boxed{0}$ ◉
- -5 ○

إن قيمة التكامل

$$\int_0^3 -x^2 =$$

- 9 ○
- 3 ○
- -3 ○
- $\boxed{-9}$ ◉

لا تنسونا من صالح دعائكم

استغفر الله ..

الإختبار الفصلي لمقرر رياضيات الإدارة -١٤٣٨

المستوى الثاني / إدارة أعمال

- جامعة الدمام / التعليم عن بعد-

مبدعين وأعضاء المستوى الثاني

بمنتديات كوفي كوب

السؤال ١

إذا كان لدينا العلاقة

$R = \{(1,5),(2,5),(3,3),(4,1)\}$

فإن مدى العلاقة يساوي

- $Range = \{1,3\}$
- $\boxed{Range = \{1,3,5\}}$
- $Range = \{1,2,3,4\}$
- $Range = \{3,5\}$

الاجابه : = {١،٣،٥}

السؤال ٢

QUESTION 2

الزوج المرتب

$(-3,3)$

يقع في الربع

- الرابع من المستوى البياني
- الاول من المستوى البياني
- الثاني من المستوى البياني
- الثالث من المستوى البياني

الاجابه : الثاني من المستوى البياني

السؤال ٣

إذا كانت

$f(x) = 2^x$

فأن

$f'(x) =$

- 0
- 2^x
- $\boxed{2^x \ln 2}$
- $\ln 2$

الاجابه : ٢ln2*

السؤال ٤

QUESTION 4

إن قيمة النهاية للمقدار

$$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-5}$$

تساوي

- $\boxed{0}$
- $\frac{1}{10}$
- $\frac{1}{5}$
- ∞

(طريقة الحل عوضنا عن x بـ ٥) الاجابه : = ٠

السؤال ٥

QUESTION 5

مقدار الربح البسيط لمبلغ 1000 ريال تم ايداعه في احد البنوك بفائدة بسيطة سنوية مقدارها 3% لمدة 3 سنوات يساوي

- $\boxed{\text{90 Riyal}}$
- 92.7 Riyal
- 1090 Riyal
- 1092.7 Riyal

الاجابه : ٩٠ riyal

طريقة الحل : ١٠٠٠*٠,٠٣*٣=٩٠

السؤال ٦

مقدار الربح المركب لمبلغ مقداره 1000 ريال تم إيداعه في احد البنوك بمعدل فائدة مركبة سنوية 3% لمدة ثلاث سنوات يساوي تقريبا

- 1090 Riyal
- 90 Riyal
- 92.7 Riyal
- $\boxed{\text{1092.7 Riyal}}$

الاجابه : ١٠٩٢,٧

طريقة الحل :

$$1000*(1+0,03/1)^{3} = 1092,7$$

السؤال ٧

إن نهاية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x \geq -2 \\ -x^3, & x < -2 \end{cases}$$

عندما

$x \to 2$

تساوي

- -8
- $\boxed{8}$
- -2
- غير موجودة

الاجابه : = ٨

السؤال ٨

QUESTION 8

إن متوسط التغير للدالة

$f(x) = x^2 - 1$

عندما تتغير **x** من **2** الى **3** تساوي

- 3
- −3
- −5
- $\boxed{5}$

الاجابه : = ٥

السؤال ٩

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^3}{2x^2 - x^3} =$$

- -1
- ∞
- 0
- $\boxed{1}$

السؤال ١٠

QUESTION 10

إذا كانت
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
فإن مجال العلاقة = مداها

True
False

الاجابه : صواب

السؤال ١١

كل علاقة تمثل دالة و العكس غير صحيح

صح

خطأ

السؤال ١٢

ميل الخط المستقيم الذي معادلته -x -2y ٦=٤ هي

-3

3

-2

2

السؤال ١٣

إذا كان لدينا مستقيمان متعامدان بحيث كان ميل الأول يساوي ١/٢ فإن الميل الثاني يساوي

1/2

2

-1/2

-2

السؤال ١٤

إذا كانت

$f(x) = (\sin x)^2$

فأن

$f'(x) =$

- $-2\sin x\cos x$
- $2\sin x\cos x$
- $\boxed{2\cos x}$
- $2\sin x$

الاجابه : x2cos

السؤال ١٥

[COLOR="Black"]إذا كان لدينا المجموعه (a=(2,4,6,8
فإن عدد المجموعات الجزيئة التي يمكن تكوينها من المجموعة a يساوي

6

4

8

16

السؤال ١٦

إذا كانت لدينا الدالتين

$g(x) = 5x, f(x) = 3x^2$

فإن قيمة

$(fog)(x) =$

- $25x^2$
- $15x^3$
- $15x^2$
- $75x^2$

السؤال ١٧

إذا كانت f(x)= ln x فإن مشتقة f(-1)=1

صح

خطأ

السؤال ١٨

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} =$$

- $\frac{9}{2}$
- 3
- غير موجودة
- 2

الاجابه : = ٣

السؤال ١٩

إذا كانت

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

فإن قيمة

$f(-1)$

تساوي

- 2
- 1
- $\boxed{-2}$
- −1

الاجابه = ـ ٢

السؤال ٢٠

إذا كانت

$u = x^2$ و $y = 2u$

فإن

$\frac{dy}{dx} =$

- $\boxed{4x^2}$
- $8x$
- $4x$
- $6x$

الاجابه : 4x2

السؤال ٢١

إذا كانت

$f(x) = \ln(x)$

فإن

$f'(-1) = 1$

- True
- $\boxed{\text{False}}$

الاجابه : خطأ

السؤال ٢٢

إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان, بحيث كان ميل الأول يساوي
-2
فإن ميل المستقيم الثاني يساوي

- $\boxed{-2}$
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- 2

الاجابه : = - ٢

السؤال ٢٣

إذا كانت
$f(x)=\frac{-1}{x}$
فإن
$f'(x)=$

- $\frac{-1}{x^3}$
- $\boxed{\frac{-1}{x}}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{-1}{x^2}$

، الاختيار الثاني x/-1 = : الاجابه

السؤال ٢٤

إذا كانت

$f(x) = \ln(-5x)$

فان

$f'(x) =$

- $\boxed{\frac{1}{x}}$
- $\frac{-1}{x}$
- $\frac{-5}{x}$
- $-5\ln(-5x)$

، الاختيار الاول x/1 = : الاجابه

السؤال ٢٥

إذا كانت

$f(x) = 5x^2$

فان

$f'''(x) =$

- $\boxed{0}$
- $5x$
- $10x$
- 10

الاجابه : = ٠

السؤال ٢٦

إن نهاية المقدار

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^4}{x^2(x+1)}$$

تساوي

- 0
- -1
- 1
- غير موجودة

الاجابه : = ٠

السؤال ٢٧

أودع شخص مبلغ 5000 ريال في احد البنوك بمعدل فائدة نصف سنوية مقدارها 10% لمدة سنة واحدة, فإن مقدار الربح المركب في نهاية المدة هي

- SR 5512.5
- SR 512.5
- SR 6000
- SR 1000

وإحتمال الخيار الثاني

الاجابه : ٥٥١٢,٥ ريال

السؤال ٢٨

إذا كانت دالة العرض هي

$y = 2x - 6$

ودالة الطلب هي

$y = 10 - 2x$

فإن نقطة التوازن تساوي

- (4,8)
- (8,4)
- (4,2)
- (2,4)

الاجابه : (٢,٤)

السؤال ٢٩

إذا كانت
$f(x) = 9 - 3x$

فإن معكوس الدالة يساوي

- $\boxed{f^{-1}(x) = -3 + \frac{1}{3}y}$
- $f^{-1}(x) = 3 - \frac{1}{3}y$
- $f^{-1}(x) = -3 - \frac{1}{3}y$
- $f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{3}y$

(الاجابه : = الاختيار الاول (- ٣ + ١/٣

السؤال ٣٠

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , x = 1 \\ \frac{2}{-x} & , x \neq 1 \end{cases}$$

تحقق الشروط التالية

- الدالة معرفة عند $x = 1$
- نهاية الدالة موجودة عند $x = 1$
- الدالة متصلة عند $x = 1$
- $\boxed{\text{جميع ما ذكر صحيح}}$

الاجابه : جميع ماذكر

السؤال ٣١

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(-2x)}{-2x} =$$

- -1
- 0
- $\boxed{-2}$
- 1

الاجابه : - ٢

السؤال ٣٢

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{5} = 0$$

- ◉ صواب
- ○ خطأ

الاجابه : صواب

السؤال ٣٣

إن نهاية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x \geq 0 \\ 5, & x < 0 \end{cases}$$

عندما

$x \to 0$

تساوي

- ○ غير موجودة
- ○ -5
- ○ 5
- ◉ 0

الاجابه : غير موجوده

السؤال ٣٤

QUESTION 8 — 1 points — Save Answer

إن قيمة النهاية للمقدار

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x + 1)$$

تساوي

- ○ -1
- ○ -5
- ◉ 5
- ○ 1

السؤال ٣٥

QUESTION 5 — 1 points — Saved

الدالة

$$f(x) = 3 - 5x$$

تمثل

- ○ دالة خطية
- ○ كثيرة حدود من الدرجة الأولى
- ○ دالة متناقصة
- ◉ جميع ما ذكر صحيح

السؤال ٣٦

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{-5x} =$$

- 0
- $\frac{2}{5}$
- $\boxed{-\frac{2}{5}}$
- ∞

السؤال ٣٧

إذا كانت

$A = \{-1,1\}$

فإن مجموعة المجوعات الجزئية للمجموعة A هي

- $P(A) = \{\varnothing, \{-1,1\}, \{-1,-1\}, \{1,1\}\}$
- $P(A) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1,-1\}, \{1,1\}\}$
- $\boxed{P(A) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}\}}$
- $P(A) = \{\{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}\}$

السؤال ٣٨

إذا كانت

$f(x) = \log_5 x^2$

فإن

$f'(x) =$

- $\boxed{\frac{2}{x\ln 5}}$
- $\frac{x^2}{\ln 5}$
- $\frac{2x}{\ln 5}$
- $\frac{2}{x^2 \ln 5}$

السؤال ٣٩

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(4,4), (-1,-1)$

هي

- $y = -x - 1$
- y equals x minus 1
- $\boxed{y = x}$
- $y = -x$

السؤال ٤٠

إذا كانت

$f(x) = e^{x^2}$

فإن

$f'(x) =$

- $2xe^{x}$
- e^{x^2}
- $2e^{x^2}$
- $\boxed{2xe^{x^2}}$

السؤال ٤١

أودع شخص مبلغ ٥٠٠٠ ريال في احد البنوك بمعدل فائدة نصف سنوي مقدارها ٥% ولمدة خمس سنوات، فإن مقدار الربح البسيط الذي سيحصل عليه بعد نهاية المدة هو

7500 sr

6250 sr

2500 sr

1250 sr

السؤال ٤٢

QUESTION 6

تعتبر الدالة

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

- دالة متناقصة
- كثيرة حدود من الدرجة الأولى
- دالة ثابتة
- دالة متزايدة

الاجابه : ثابته

السؤال ٤٣

إذا كانت

$$f(x) = x^{-3}$$

فأن

$$f'(x) =$$

- $3x^{-4}$
- $-3x^{4}$
- $-3x^{-4}$
- $-3x^{-2}$

السؤال ٤٤

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , x = 0 \\ \frac{1}{x} & , x \neq 0 \end{cases}$$

تحقق الشروط التالية

- الدالة معرفة عند النقطة $x = 0$
- نهاية الدالة موجودة عند $x \to 0$ وتساوي **0**
- الدالة $f(x)$ دالة متصلة عند $x = 0$
- جميع مما ذكر صحيح

السؤال ٤٥

إذا كانت

$f(x) = x^2$

فأن

$f'(-1) = 2$

- صواب
- خطأ

السؤال ٤٦

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 2x}{x} =$$

- 2
- −2
- −1
- 1

السؤال ٤٧

إذا كانت

$y = 2u$ و $u = x^2$

فإن

$$\frac{dy}{dx} =$$

- $6x$
- $8x$
- $4x^2$
- $4x$

السؤال ٤٨
مشتقة الدالة الثابتة دائما = صفر

صح
خطأ

السؤال ٤٩

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة
$(-1,1)$

وميله
-1

يساوي

$\boxed{y=-x}$

$y=-x-1$

$y=x$

$y=-x+1$

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطه

(1,1-)

وميله
1-

يساوي

y=1

y=-x-1

y=-x
للتأكد
y=-x+1

السؤال ٥٠

إذا كانت

$A = \{1,2\},\ B = \{3,5\}$

فأي من العلاقات التالية تشكل دالة

- $R = \{(1,3)\}$
- $R = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5)\}$
- $\boxed{R = \{(1,3),(2,5)\}}$
- $R = \{(1,3),(1,5),(2,5)\}$

السؤال ٥١

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - x^3}{3 - x^4} =$$

- $\boxed{0}$
- 1
- -1
- ∞

السؤال ٥٢

إذا كان

$(25,\ 2y) = (2x + 1,\ -12)$

فإن قيمة

x, y

تساوي

- $x = -12, y = 6$
- $\boxed{x = 12, y = -6}$
- $x = 12, y = 6$
- $x = -12, y = -6$

السؤال ٥٣

إذا كانت

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10$

فإن

$f'(x) =$

- $6x^2 - 10x + 10$
- $6x^2 + 10x$
- $-6x^2 - 10x$
- $\boxed{6x^2 - 10x}$

السؤال ٥٤

إذا كانت

$f(x) = 5\cos x$

فإن

$f'(x) =$

- $-5\sin x$
- 5
- $-\sin x$
- $5\sin x$

السؤال ٥٥

إذا كانت

$$f(x) = \sqrt{25x^2}$$

فإن

$$f'(x) =$$

- $25x^{-\frac{1}{2}}$
- $(5x)^{\frac{1}{2}}$
- $\boxed{5}$
- $5x$

السؤال ٥٦

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^4 - 1} =$$

- $\boxed{\infty}$
- 1
- 0
- -1

السؤال ٥٧

إذا كانت

$f(x) = -10^2$

فإن

$f'(x) =$

- 0
- $\boxed{-20}$
- -20^2
- 20^{-3}

السؤال ٥٨

إذا كانت

$f(x) = -5x^2.\ln(x)$

فإن

$f'(x) =$

- $5x + 10\ln x$
- $-5x + 10\ln x$
- $5x - 10x\ln x$
- $-5x - 10x\ln x$

السؤال ٥٩

إن نهاية المقدار

$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{2x^2 + 5x - 6}$

تساوي

- -3
- 0
- $\boxed{3}$
- ± 3

السؤال ٦٠

إذا كانت

$g(x) = x + 1, f(x) = x - 1$

فإن

$(f \times g)(x) =$

- $x^2 + 2x - 1$
- $(x^2 - 1)$
- $(x^2 + 1)$
- $2x^2 - 2x + 1$

ارشادات بخصوص الاختبار النهائي

فيما يلي بعض الارشادات بخصوص الاختبار النهائي

1- يسمح باستخدام الآلة الحاسبة العلمية موديل fx-991ES او أي موديل آخر اقل

2- الاختبار النهائي يتكون من ٥٠ سؤال اختيار من متعدد

3- سيتم ارفاق القوانين التالية مع ورقة الاختبار النهائي:

أ) قوانين الاشتقاق التي ورد ذكرها في المحاضرات المسجلة الثامنة والتاسعة (من قاعدة رقم ١ لغاية رقم ٩)

وبالاضافة الى قواعد الاشتقاق الخاصة بالدوال الاسية واللوغريتمية والمثلثية التي وردت في المحاضرة المسجلة العاشرة

ب) قواعد التكامل التي وردت في المحاضرات المسجلة الرابعة عشر والخامسة عشر

الله يوفقكم ويسعدكم ويكتب لكم النجاح جميعاً إن شاء الله

إحساس

لا تنسونا من صالح دعائكم

استغفر الله ..

@e7sas_ud