مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

الفصل الثالث

النهايات

جامعة الإمام عبدالرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٩هـ-٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الثالث: النهايات (مفهوم النهاية)

❑ مفهوم النهاية:

تعرف نهاية الدالة $f(x)$ بأنها عملية إيجاد قيمة تلك الدالة عندما تقترب قيمة المتغير x من قيمة معينة ولتكن a ، وعادة ما تكتب على الصورة التالية:

النهاية

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

x تقترب من a

وتقرأ بانها نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a.

مثال: إذا كانت $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 1$ فأوجد $\lim_{x \to -1} f(x)$

الحل:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 + 2x - 1 = -1^3 + 2(-1^2) - 5(-1) - 1 = 6$$

الفصل الثالث: النهايات (مفهوم النهاية)

مثال: إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 1$، فأوجد

١- $\lim_{x \to 2} f(x)$ ؟

٢- $\lim_{x \to -2} f(x)$ ؟

الحل:

$$1 - \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 + 2x - 1 = 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 7$$

$$2 - \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to -2} x^2 + 2x - 1 = -2^2 + 2 \times -2 - 1 = -1$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

❑ جبر النهايات:

١- إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد حقيقي، فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a.

مثال: إذا كانت $f(x) = -2$، فأوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$؟

الحل:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 2} -2 = -2$$

نلاحظ أن الدالة ثابتة، وبالتالي ناتج التعويض دائما يساوي قيمة الثابت والذي يساوي -2

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$، فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = ma + c$$

لكل عدد حقيقي a.

مثال: إذا كانت $f(x) = 1 - 2x$، فأوجد $\lim_{x \to -3} f(x)$ ؟

الحل:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to -3} 1 - 2(-3) = 7$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

٣- إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = m$، فإن $\lim_{x\to a} f(x) = n$، وكانت c عدد حقيقي فإن:

$$i.\quad \lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = m \pm n$$

$$ii.\quad \lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = c \times m$$

$$iii.\quad \lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = m \times n$$

$$iv.\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{m}{n}, \qquad n \neq 0$$

الفصل الثالث: النهايات (مفهوم النهاية)

مثال: إذا كان $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ ، $\lim_{x\to 2} h(x) = 10$ ، فأوجد

$i.\quad \lim_{x\to 2} 8[f(x) - g(x)]$

$ii.\quad \lim_{x\to 2} [h(x) \times g(x)]$

$iii.\quad \lim_{x\to 2} \frac{h(x)}{f(x)}$

$v.\lim_{x\to 2}[f(x) - g(x) \times h(x)]$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

الحل:

$$i.\quad \lim_{x\to 2} 8[f(x)-g(x)] = 8(5-(-8)) = 8(13) = 104$$

$$ii.\quad \lim_{x\to 2}[h(x)\times g(x)] = 10\times -8 = -80$$

$$iii.\quad \lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{10}{2} = 5$$

$$v.\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\times h(x)\right] = 5-(-8)\times 10 = 85$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

٤- إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وكان n عدد صحيح موجب فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

❑ مثال:

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 64$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين)

❑ أمثلة: أوجد نهاية كل من الدوال التالية

1. $$\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)=3\times 2^3+5\times 2^2-7$$
$$=3\times 8+5\times 4-7$$
$$=24+20-7=37$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}=\frac{3\times 3^2+7}{3-5}=\frac{3\times 9+7}{-2}=\frac{27+7}{-2}=\frac{34}{-2}=-17$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{5x+3}=\frac{2\times 2-1}{5\times 2+3}=\frac{4-1}{10+3}=\frac{3}{13}$$

4. $$\lim_{x\to 2} e^{x}=e^{2}$$

الدالة الأسية: هي الدالة التي تكتب على الصورة $f(x)=e^{x}$ حيث $e\approx 2.718$.
ويعتبر e أساس اللوغاريتم الطبيعي $(\ln x)$.
وقد تعلمنا سابقا أن هنالك علاقة ما بين الأسس واللوغاريتمات حسب الصيغة التالية:

$$e^{x}=a \quad \text{تكافئ} \quad x=\ln x$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

5. $$\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$$

6. $$\lim_{x\to 2}\left(\log(3x^2+5)\right) = \log(3\times 2^2+5)$$
$$= \log(3\times 4+5)$$
$$= \log(12+5) = \log 17$$

الدالة اللوغاريتمية: هي الدالة التي تكتب على الصورة $f(x) = log_a\, x$. ويسمى باللوغاريتم العشري إذا كان اساس اللوغاريتم عشرة ويكتب على الصورة $f(x) = log\, x$ ، أما اللوغاريتم الطبيعي فهو اللوغاريتم الذي اساسه العدد e ويكتب على الصورة $f(x) = ln\, x$.

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهاية)

7. $$\lim_{x\to 3}\left(\ln(2x-5)\right)=\ln(2\times 3-5)=\ln(6-5)=\ln 1=0$$

8. $$\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3=(3\times 1^3+4\times 1-2)^3=(3+4-2)^3=5^3=125$$

9. $$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}=\sqrt[3]{2^2+5}=\sqrt[3]{4+5}=\sqrt[3]{9}$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

٥- إذا كانت الدالة معرفة وفق اكثر من قاعدة حسب الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 & , x<1 \\ b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 & , x>1 \end{cases}$$

وأردنا ايجاد قيمة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، ففي هذه الحالة قد تنشأ لدينا ثلاث حالات:

أ) قد تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

ب) قد تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

ج) قد تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

❑ مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد قيمة كل مما يلي:

$$i)\ \lim_{x\to 3} f(x)\ ,\ ii)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)\ ,\ iii)\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

الحل:

i. نلاحظ أن العدد ٣ يقع ضمن مجال القاعدة الثانية لان $3 > 1$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 7x - 2 = 7\times 3 - 2 = 21 - 2 = 19$$

ii. نلاحظ أن العدد $\frac{1}{2}$ يقع ضمن مجال القاعدة الثانية لان $\frac{1}{2} < 1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} 3x^2 + 5 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

iii. العدد ١ يقع على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين (أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار (أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

اشارة + تعني الاقتراب من الطرف الأيمن للعدد ١

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 7x-2 = 7\times 1-2 = 7-2 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x^2+5 = 3\times 1^2+5 = 3+5 = 8$$

اشارة - تعني الاقتراب من الطرف الأيمن للعدد ١

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) \to$$ غير موجودة

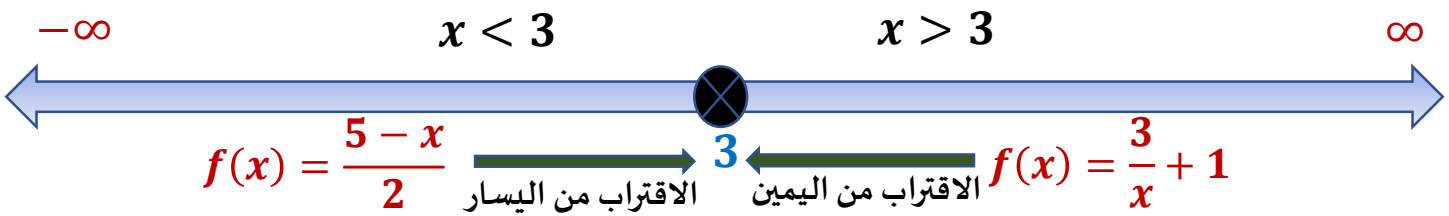
الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

❑ مثال: إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} + 1 & , x > 3 \\ \dfrac{7 - x}{2} & , x < 3 \end{cases}$$

فأوجد قيمة $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ؟

الحل:



نلاحظ أن $\lim\limits_{x \to 3+} \frac{3}{x} + 1 = \lim\limits_{x \to 3-} \frac{7-x}{2} = 2$

فنقول بأن النهاية موجودة (لان النهاية من اليمين = النهاية من اليسار).

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

- تمرين: أوجد قيمة نهاية كل من الدوال التالية:

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

3. $\lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{x + 4}$

4. $\lim_{x \to 0} e^x$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

5. $\lim_{x \to 6} \sqrt[4]{x^2 - 3x - 8}$

6. $\lim_{x \to 3} \left(\log(2x + 4)\right)$

7. $\lim_{x \to 2} \left(\ln(x^2 + 1)\right)$

8. $\lim_{x \to -1} (2x^2 + 5x + 1)^2$

9. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$

الفصل الثالث: النهايات (قوانين النهايات)

$$10.\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} - x^2 & , x > -1 \\ \dfrac{7 + x^2}{2} & , x < -1 \end{cases}$$

$$11.\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{2x} & , x > 1 \\ \dfrac{x^3 - x^2}{3} & , x < 1 \end{cases}$$

انتهت المحاضرة المسجلة الخامسة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح