

مقرر الرياضيات للإدارة
المستوى الثاني

تابع الفصل الرابع

التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته



جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع
وكالة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٩هـ - ٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مشتقة الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية والدوال المثلثية:

أولاً: مشتقة الدالة الأسية

تعريف: إذا كانت $y = e^x$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^{f(x)}$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \times f'(x)$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال 1: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = e^{x^2 + 2x + 1}$$

المقدار نفسه

مشتقة الأس

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2 + 2x + 1} (2x + 2) = (2x + 2)e^{x^2 + 2x + 1}$$

الحل:



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال ٢: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = e^{-2x^{-2}}$$

المقدار نفسه

مشتقة الأس

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2x^{-2}} \left(-2 \times -2 \times x^{-2-1} \right) = (4x^{-3})e^{-2x^{-2}}$$

الحل:

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

نتيجة:

إذا كانت $y = a^x$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

وبشكل عام، إذا كانت $y = a^{f(x)}$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \times f'(x) \times \ln a$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$$

2. $y = 9^{2x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2} (4x) \ln 9$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (2): أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = 3^x \times x^2$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3^x \times 2x + x^2 \times 3^x \ln 3 = 3^x 2x + x^2 3^x \ln 3$$

2. $y = \frac{4^x}{5x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x \times 4^x \ln 4 - 4^x \times 5}{(5x)^2} = \frac{5 \times 4^x (x \ln 4 - 1)}{25x^2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

ثانياً: مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

تعريف: إذا كانت $y = \ln x$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

دالة اللوغاريتم الطبيعي
والتي أساسها e

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (1): إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$:

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

مثال (2): إذا كانت $y = \ln(-5x - 2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$:

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{-5x - 2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

نتيجة:

إذا كانت $y = \log_a x$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

الدالة اللوغاريتمية
والتي أساسها العدد a

وبشكل عام، إذا كانت $y = \log_a f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \times \frac{1}{\ln a}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (١): أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = \log_2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 2}$$

الحل:

2. $y = \log_2(1 + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2} \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln 2}$$

الحل:



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (٢): أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = x \log_2 x$ ← قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x \ln 2} + \log_2 x \times 1 = \frac{1}{\ln 2} + \log_2 x$$

2. $y = \frac{\log_5 x}{x}$ ← قاعدة مشتقة حاصل قسمة دالتين

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \times \frac{1}{x \ln 5} - \log_5 x \times 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 5} - \log_5 x}{x^2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

ثالثا: مشتقة الدوال المثلثية

تعريف ١: إذا كانت $y = \sin x$ ، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \sin u$ ، حيث $u = f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times \frac{du}{dx}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = \sin 4x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(4x) \times 4 = 4 \cos(4x)$$

2. $y = -\sin \frac{4}{5} x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos\left(\frac{4}{5} x\right) \times \frac{4}{5} = -\frac{4}{5} \cos \frac{4}{5} x$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تعريف 2: إذا كانت $y = \cos x$ ، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \cos u$ ، حيث $u = f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \times \frac{du}{dx}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (1): أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $y = \cos(-2x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(-2x) \times -2 = 2 \sin(-2x)$$

الحل:

2. $y = -\cos 3x$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \times -\sin(3x) \times 3 = 3 \sin 3x$$

الحل:



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال (٢): أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

يمكن كتابتها على الصورة

$$1. \quad y = \cos^2 x \quad \longleftrightarrow \quad y = (\cos x)^2$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \sin x$$

$$2. \quad y = \sin x \cos x \quad \leftarrow \quad \text{قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين}$$

الحل:

$$y' = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

أمثلة اضافية: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية

$$1) y = e^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \times \cos x = \cos x e^{\sin x}$$

$$2) y = (2x - 2)e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x - 2) \times -2e^{-2x} + e^{-2x} \times 2$$

$$= (-4x + 4)e^{-2x} + 2e^{-2x}$$

$$3) y = \ln(\cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

تمارين ومسائل:

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية

$$1) y = e^{x^2 - 2x}$$

$$2) y = (2x + 3)e^{-2x}$$

$$3) y = e^{\cos x}$$

$$4) y = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-3x})$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته



$$5) y = \log_4 3x$$

$$6) y = 7^{x^3}$$

$$7) y = \ln(\sin x)$$

$$8) y = x^2 e^{2x}$$



نهاية المحاضرة المسجلة العاشرة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح