



تابع الفصل الخامس :- التكامل رتصقاته

بحد الأعلى  
←

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- التكامل المحدود

بحد الأدنى  
←

$$F'(x) = f(x) \quad \text{حيث}$$

مثال :-

$$\int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + 5) dx$$

$$= \left( \frac{4x^4}{4} - 2 \frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= (x^4 - x^2 + 5x) \Big|_{-1}^1$$

الحده الاعلى

الحده الادنى

$$= (1^4 - 1^2 + 5(1)) - ((-1)^4 - (-1)^2 + 5(-1))$$

$$= (1 - 1 + 5) - (1 - 1 - 5)$$

$$= (5) + 5 = 10$$



- القواعد الخاصة بالتكامل غير المحدود نكتبها أيضاً على التكامل المحدود .

- تعرفنا على بعض من خواص التكامل المحدود :-

$$1- \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$2- \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{حدود تكامل متساوية}).$$

$$3- \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4- \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$5- \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



- تطبيقات على التكامل :-

أولاً :- كيفية إيجاد مساحة منحنى الدالة  $f(x)$  :

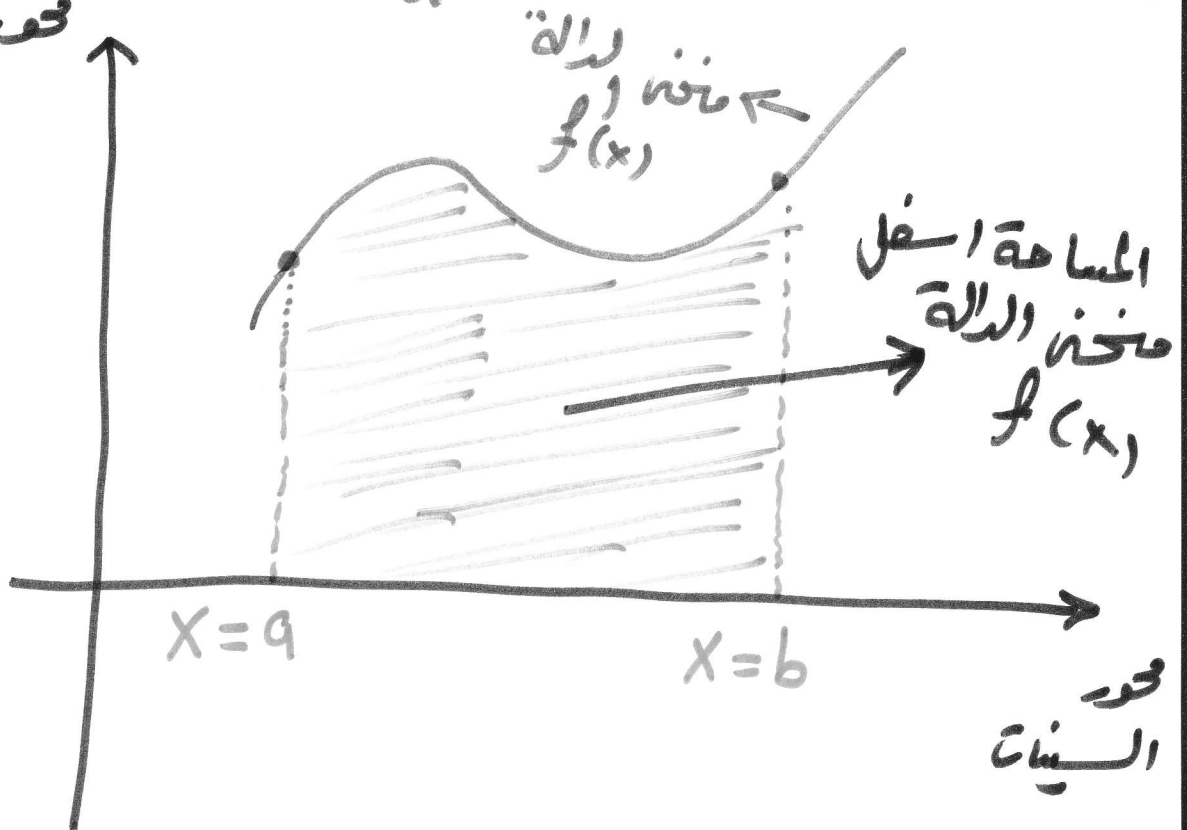
تعريف :- إذا كان لدينا دالة  $f(x)$  حيث كانت معرفة

على الفترة  $[a, b]$  ، فإن المساحة التي تقع أسفل منحنى تلك الدالة على الفترة  $[a, b]$  تعطى بالصيغة

التالية :-

$$\text{المساحة} \leftarrow \text{Area} = \int_a^b f(x) dx.$$

حدود التكامل





مثال ١ :- اوجد المساحة أسفل منحى الدالة  $f(x) = 5x^4$

بين النقطتين  $x=1$  و  $x=3$  .  
∴  $x=3$  و  $x=1$

الحل :-

$$\text{Area} = \int_1^3 (5x^4) dx = \frac{5x^5}{5} \Big|_1^3$$
$$= x^5 \Big|_1^3 = (3^5) - (1)^5$$
$$= 243 - 1$$
$$= 242 .$$

مثال ٢ :- اوجد المساحة أسفل منحى الدالة  $f(x) = 3x^2 + 2x - 10$

بين النقطتين  $x=0$  و  $x=2$  .  
∴  $x=2$  و  $x=0$

الحل :-

$$\text{Area} = \int_0^2 (3x^2 + 2x - 10) dx$$
$$= \left( \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 10x \right) \Big|_0^2$$
$$= x^3 + x^2 - 10x \Big|_0^2$$
$$= (2^3 + 2^2 - 10(2)) - (0^3 + 0^2 - 10(0)) = -8$$



تمارين :- اوجد المساحة تحت منحنى لدوال التالية :-

١)  $f(x) = x^2 - 7x + 11$  بين  $x=0$  و  $x=2$

٢)  $f(x) = x^3 - 6x + 8$  بين  $x=-1$  و  $x=1$

ثانياً :- تعيّنات انتصافية على مفهوم والتكامل :-

دالة التكلفة الحدية  $\leftarrow$  من خلال عملية التكامل  $\leftarrow$  دالة التكلفة الكلية

دالة الإيراد الحدي  $\leftarrow$  من خلال عملية التكامل  $\leftarrow$  دالة الإيراد الكلية

دالة الربح الحدي  $\leftarrow$  من خلال عملية التكامل  $\leftarrow$  دالة الربح الكلية

مثال :- (تفسير على إيجاد دالة التكلفة الكلية)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج إحدى البضائع

تُعطى بالعلاقة  $C'(x) = 18x^2 + 20x - 15$  (تكلفة)  $\leftarrow$  Cost

المطلوب :- إيجاد دالة التكلفة الكلية علماً بأن صيغة

التكاليف الثابتة = 200  $\leftarrow$  صيغة التكاليف بعد عملية التكامل



$$\begin{aligned}C(x) &= \int C'(x) dx \\&= \int (18x^2 + 20x - 15) dx \\&= 18 \frac{x^3}{3} + 20 \frac{x^2}{2} - 15x + C \\&= 6x^3 + 10x^2 - 15x + 200.\end{aligned}$$

مثال :- إذا كانت دالة الإيراد الحدي لإنتاج  $x$  وحدة الإنتاج  
علاقة بالعلامة Revenue ←  $R'(x) = 60x^3 + 9x^2 + 50$ .  
أوجد دالة الإيراد الكلي علماً بأن الإيراد = صفراً في حال  
عدم بيع أي وحدة ؟  
 $C = 0$ .

$$\begin{aligned}R(x) &= \int R'(x) dx = \int (60x^3 + 9x^2 + 50) dx \\&= 60 \frac{x^4}{4} + 9 \frac{x^3}{3} + 50x + C \\&= 15x^4 + 3x^3 + 50x\end{aligned}$$



مثال :- إذا كانت دالة الربح لمنتجات إحدى الشركات

تُعبر بالعلاقة

$$P'(x) = 12x^3 + 15x^2 + 24x$$

Profit  
الربح

إيجاد دالة الربح الكلي علماً بأنه الربح يارب  
صفر في حال عدم بيع أي وحدة ؟

الحل :-

$$P(x) = \int P'(x) dx = \int (12x^3 + 15x^2 + 24x) dx$$

$$= 12 \frac{x^4}{4} + 15 \frac{x^3}{3} + 24 \frac{x^2}{2} + C$$

$$= 3x^4 + 5x^3 + 12x^2$$

- مما يبين علم، البصيصات الاقتصادية :-

① اوجد دالة التكلفة الكلية إذا علم لدينا دالة التكلفة

الحدية من خلال العلاقة  $C'(x) = 36x^5 + 2x - 100$

علماً بأن التكاليف الثابتة = 500 ؟

② أوجد دالة الإيراد الكلي إذا كانت دالة الإيراد الكلي

تُعبر بالعلاقة

$$R'(x) = 32x^3 + 14x + 25$$

علماً بأن لايراد، الناتج عن عدم بيع أي وحدة = صفر ؟



٣) إذا كانت دالة الربع الكلي تعطى بالعلاقة التالية

$$P(x) = 21x^6 + 8x^3 + 14x$$

علماً بأن الربع والناتج من عدم بيع أي سلعة = صفر ؟

نظير المحاضرة المسجلة لـ ١٤٤٤ عشر

شاكراً لكم حسن الاستماع .