

الفصل الثاني

النهايات والاتصال :

مفهوم النهاية : مثال : لنأخذ الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$ وابحث عن قيمة الدالة وسلوكها

 بالقرب من العدد $x=1$

- إذا عوضنا عن $x=1$ في هذه الدالة نجد أن : $f(1) = \frac{1-1}{1-1} = ?$

وهذه ليس لها معنى .

وإذا كانت $x \neq 1$ فإن $f(x) = 1$ وتكون قيمة الدالة عند 1

 أي : غير معرفة .

وسندرس في هذا الجدول سلوك الدالة عند القرب من العدد $x=1$ علما أن

 $x=1$ لا ينتمي لمجال الدالة f .

$F(x)$	$x > 1$	$F(x)$	$x < 1$
1	1.05	1	0.5
1	1.01	1	0.9
1	1.001	1	0.99
1	1.0001	1	0.999

لهذا إذا اقتربت x من 1 بقيم أقل من 1 فإن $f(x)$ تقترب من 1 والواقع

 في هذا المثال أنها تساوي 1 دائما .

ونقول إن نهاية $f(x)$ من اليسار تساوي 1 عندما x تقترب من 1 من

 اليسار ونكتب :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

كما يتضح أيضا من الجدول أن :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

وفي هذا المثال نلاحظ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

ومن المعلوم أنه إذا كانت :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

فإننا نقول أن : $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ غير موجودة

• تعريف النهاية اليسرى :

إذا اقتربت الدالة من m عندما يزداد قرب x من a من الجهة اليمنى
 فإننا نقول أن نهاية الدالة اليمنى عند a هي m $x > a, x \neq a$

ونكتب :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$$

تمرين : أوجد نهاية الدالة (ابحث سلوك الدالة عند $x=3$ من اليمين واليسار)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

نظرية :

تكون النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة وتساوي L ونكتب :

إذا وإذا فقط كانت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

مثال : إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 1, & x > -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$ فهل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ موجودة ؟

الحل :

مثال : تكون النهاية موجودة إذا تحققت النظرية وهي : إذا كانت النهاية اليسرى تساوي النهاية اليمنى :

نكون الجدول التالي الذي يمثل سلوك الدالة عندما :

$$x \rightarrow -1^- \quad \text{و} \quad x \rightarrow -1^+$$

$F(x)$	$x > -1$	$F(x)$	$x < -1$
1	-0.99	-1	-1.01
1	-0.999	-1	-1.001
1	-0.9999	-1	-1.0001

نلاحظ من الجدول أن :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \quad \text{وأيضا}$$

وبما أن النهاية اليسرى لا تساوي النهاية اليمنى فإن نهاية الدالة عند -1 غير موجودة

جبر النهايات

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (١) \quad \text{حيث } c \text{ عدد ثابت ، } a \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (٢)$$

مثال : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5 \quad (a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -3 \quad (b)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x \quad (c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x \quad (d)$$

نظرية : بفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتان

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (٤) \quad \text{حيث } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

مثال : أوجد نهاية الدوال التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4) \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 2} \quad (٢)$$

نظرية : لأي كثيرة حدود ولكل $a \in R$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نظرية : إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، n عدد صحيح موجب فإن :

$$L > 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

مثال : احسب نهاية الدالة :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

مثال : احسب

الحل :

تمرين : احسب :

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)^4 \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 - 2x + 1)^3 \quad (٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x^2 + 3x + 1} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} \quad (٥)$$

نظرية : إذا كان b عددا ثابتا وكانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ موجودة فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = b^L$$

مثال : احسب $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

الحل : بتطبيق النظرية السابقة نجد :

نظرية إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ موجودة وموجبة فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_c f(x) = \log_c (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \log_c L$$

مثال : أوجد $\lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5)$

الحل :

تمرين : أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 3} (e^{2x} - e^{x^2} + \log(x^2 + 5)) \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (e^{\sqrt{x}} \log(2x^3 - 1)) \quad (٢)$$

ملاحظة مهمة :

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5, & x \leq 1 \\ 7x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات هي :

(١) تقع ضمن مجال القاعدة الأولى

(٢) تقع ضمن مجال القاعدة الثانية

(٣) تقع على الحد الفاصل بين المجالين

من خلال الدالة السابقة أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (٣)$$

نظرية (ساندويتش)

إذا كانت : $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ، وكان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$:

مثال أوجد نهاية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x})$$

الحل :

نظرية : $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ، حيث e العدد النايبييري

مثال : أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x$

الحل :

مثال : أوجد $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x}$

الحل :

مثال : أوجد $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

الحل

نظرية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال : أوجد نهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

تمرين أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$$

الحل :

مثال : أوجد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x}{x}$$

الحل :

* مثال إذا كانت

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

فأوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

الحل : نكون الجدول التالي الذي يبين سلوك الدالة عندما

$$x \rightarrow 0^+ \quad \text{و} \quad x \rightarrow 0^-$$

F(x)	X<0	F(x)	x>0
1	-1	1	1
100	-0.1	100	0.1
1000	-0.01	1000	0.01
1000000	-0.001	1000000	0.001

ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد بدون حد عندما تقترب x من الصفر ونقول أن $f(x)$ تؤول إلى ما لا نهاية ونرمز لها بالرمز ∞ عندما تقترب x من الصفر أي أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

• نهاية المقادير غير المحدودة عند نقطة :

نلاحظ أنه بإمكاننا الحصول على النهاية عن طريق تعويض ما توؤل إليه x . وفي

كثي من الأحيان نحصل بالتعويض المباشر على القيمة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وفي هذه

الحالة نوجد لأساليب للتخلص من المشكلة وتوضحها هذه الأمثلة :

(١) أسلوب التحليل

مثال: أوجد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

الحل : نقوم بعملية التحليل لأن هذا المقدار لو عوضنا عن قيمة $x=1$ لأصبح لدينا حالة عدم

تعيين $\frac{0}{0}$

(٢) أسلوب الضرب في المرافق

مثال : أجد : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

الحل : حالة عدم تعيين

• النهاية عندما $x \rightarrow \infty$

مثال : أوجد:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 - 4}$

نظرية :

(١) $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ حيث c عدد حقيقي

(٢) إذا كان y عدد نسبي موجب وكان c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

مثال : أوجد:

(١) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^{10}}$

(٢) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{7}$

(٣) $\lim_{x \rightarrow \infty} -5$

(٤) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{x^{\frac{2}{5}}}$

ملاحظة مهمة : إذا كان لدينا كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ ، وكان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

فإننا نقسم كل من البسط والمقام على x بأكبر قوة مع ملاحظة :

(١) إذا كانت قوة البسط أكبر من قوة المقام فالنهاية تساوي ∞

(٢) إذا كانت قوة المقام أكبر من قوة البسط فإنها تساوي الصفر

(٣) أما إذا كانت تساوت قوة البسط مع قوة المقام فإن النهاية تساوي قسمة المعاملين للمتغير بأكبر قوة .

مثال : أحسب

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{5x^6 - 2x^2 + 5} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 3}{2x^4 - 5x^2 + 3x} \quad (٣)$$

تطبيقات على النهايات

(١) الدخل :

مثال : إذا كان الدخل بالريال لأحد مزارعي النخيل هو

حيث x تمثل عدد العمال الذين يعملون بالمزرعة ،
المطلوب

(أ) أوجد الدخل عندما تكون $x=30$

(ب) أوجد الدخل عندما تكون $x=300$

(ج) أوجد أكبر دخل يتوقعه المزارع

الحل :

(٢) الفائدة المستمرة :

افرض أن مبلغا من المال m قد وضع في بنك بسعر $p = 100x$ و أن الربح يضاف
 n مرة خلال العام الواحد ، لهذا فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام هي :

$$s = m \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

وإذا سمحنا لعدد المرات n أن يؤول إلى ما لانهاية ، أي أن الفائدة مستمرة فإن
جملة هذا المبلغ في نهاية العام :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s = m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) = me^x$$

ويمثل هذا المقدار me^x قيمة المبلغ m بعد سنة من الآن . وكتعميم لذلك يكون
لتصبح قيمة s بعد h من السنوات يعطى بالعلاقة :

$$m = se^{-nh}$$

مثال :

وضع 10 ريال بربح مستمر 5% فبعد كم سنة تصبح جملة هذا المبلغ 20 ريال ؟

الحل :

الاتصال

تعريف : نقول إن الدالة $f(x)$ متصلة عند نقطة c إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

$$(١) \quad f(c) \text{ معرفة}$$

$$(٢) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ موجودة}$$

$$(٣) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

وإذا لم يتحقق أي من الشروط السابقة فإن الدالة $f(x)$ غير متصلة عند c

تعريف : تكون الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة I إذا كانت متصلة عند جميع النقاط الواقعة في هذه الفترة .

مثال أثبت أن الدالة $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ غير متصلة عند $x=1$

الحل :

مثال : أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ غير متصلة عندما $x=-1$

الحل :

مثال : أثبت أن الدالة التالية متصلة عند $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

الحل :

مثال اثبت أن الدالة $f(x) = x$ متصلة عند $x=2$

الحل :

تمارين :

ابحث اتصال الدوال التالية :

عند $x=3$ (١)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$$

عند $x=2$ (٢)

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

عند $x=1$ (٣)

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$