مبادئ الإحصاء التربوي

الفصل الدراسي الأول

العام الدراسي ١٤٣١ – ١٤٣٢هـ

د. سعيد سيف الدين

نظام التعليم المطور للانتساب

كلية التربية

المحاضرة العاشرة

الباب الرابع
مقاييس التشتت

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

تعريف التشتت

مقاييس التشتت

- المدى
- الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات)
- الانحراف المعياري

تعريف التشتت

الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للانتشار حول قيمة متوسطة (أحد مقاييس النزعة المركزية) تُسمى تشتت أو تغير البيانات

فمثلاً إذا كان لدينا ٣ مجموعات من الطلاب ، كل مجموعة مكونة من خمسة طلاب ، وكانت لها الدرجات التالية (من ١٠ درجات) في أحد المقررات

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة
5 , 5 , 5 , 5 , 5	3 , 4 , 5 , 6 , 7	1 , 2 , 5 , 8 , 9
وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5

المجموعات الثلاثة لها وسط حسابي 5 ، لكن في المجموعة الأولى : جميع القيم متساوية وتساوي الوسط 5 ، في حين تنتشر البيانات في المجموعة الثانية حول هذا الوسط بقدرٍ ما ، وفي المجموعة الثالثة تنتشر البيانات حول الوسط بقدرٍ آخر .

أي أن الوسط الحسابي وحده [وهو ممثل لمقياس نزعة مركزية ، أي قيمة نموذجية ممثلة للبيانات] ليس كافياً وحده لوصف البيانات ، ولكن لابد من وجود نوع آخر من المقاييس لرصد مدى تشتت البيانات عن تلك القيمة المتوسطة الممثلة للبيانات .

هذا النوع من المقاييس هو ما نسميه بـــ **مقاييس التشتت** .

وهناك العديد من المقاييس التي يمكن استخدامها لقياس هذا التشتت ولكن أكثرها شيوعاً :

المدى – الانحراف المتوسط – الانحراف المعياري – الانحراف الربيعي

ولنتعرف على كلٍ منها الآن

أولاً : المدى R :

مدى مجموعة من البيانات الكمية هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأقل قيمة فيها

فمثلاً لمجموعة القيم : 15 3 7 6 12 18 5 3 13 15 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$

ولمجموعة القيم : 16 3 14 15 17 18 17 13 14 16 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$

أي أن المدى واحد للمجموعتين في حين يبدو للعين المجردة أن هناك تشتت للبيانات أكبر في المجموعة الأولى عنه في المجموعة الثانية ، مما يعني أن المدى هنا لا يظهر هذا الفارق . لذا يُعد المدى **مقياساً للتشتت** لكنه **غير جيد** في كثير من الأحيان .

وبالرغم من بساطة تحديده إلا أن بعض العيوب [مثل تأثره بالقيم المتطرفة كما اتضح من المثال السابق عند حسابه للمجموعة الثانية حيث تأثر بالقيمة المتطرفة 3] ، فإذا استبعدنا تلك القيمة يكون المدى مساوياً لــ : $R = 18 - 13 = 5$.

أيضاً من بين عيوبه أنه لا يمكن تحديده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

الفئة	العمر x
الأولى	$2 \le x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

$R = 18 - 2 = 16$

الحد الأدنى للفئة الأولى ، الحد الأعلى للفئة الأخيرة

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

مفتوح من أسفل

الفئة	العمر x
الأولى	$6 \le x < 12$
الثانية	$12 \le x < 15$
الثالثة	$15 \le x < 18$
الرابعة	$x \ge 18$

مفتوح من أعلى

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$x \ge 15$

مفتوح من الطرفين

لا يمكن تحديد مدى البيانات

ثانياً : الانحراف المتوسط [أو متوسط الانحرافات] M.D

يُعرف **الانحراف المتوسط** (أو **متوسط الانحرافات**) [وسنرمز له بالرمز **M.D**] على أنه متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن قيمة متوسطة للبيانات [عادةً تكون الوسط الحسابي أو الوسيط] .

فإذا اعتبرنا أن القيمة المتوسطة للبيانات هي الوسط الحسابي ، فإن الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات عددها n يُعطى بـــ

$$d = x - \bar{x}$$

الانحراف عن الوسط

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad \text{أو} \quad M.D = \frac{\sum |d|}{n}$$

عدد القيم

ملحوظة هامة : القيمة المطلقة لأي عدد y هي القيمة العددية له دون إشارة ، ونرمز له بنفس الرمز y لكن بين خطين رأسيين | | ، أي نكتب القيمة المطلقة لـــ y على الصورة $|y|$. فمثلاً :

$$|3| = 3 \quad , \quad |-3| = 3 \quad , \quad |2.5| = 2.5 \quad , \quad |-3.25| = 3.25$$

وهكذا .

حيث $d = x - \bar{x}$ هي انحراف القيمة x عن الوسط الحسابي ، $|d|$ هي القيمة المطلقة للانحراف d .

إذن لحساب الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) **M.D** لمجموعة من القيم يلزم حساب **الوسط الحسابي** أولاً ، ثم نحسب **انحرافات** كل قيمة من هذه القيم عن الوسط الحسابي ، ثم **القيم المطلقة** لهذه الانحرافات ، ثم **متوسط** هذه القيم المطلقة كما هو مبين :

احسب الوسط الحسابي $\xrightarrow{\text{ثم}}$ احسب الانحرافات عن الوسط $\xrightarrow{\text{ثم}}$ احسب القيم المطلقة للانحرافات $\xrightarrow{\text{ثم}}$ احسب متوسط القيم المطلقة

فمثلاً : لمجموعتي القيم التي تعاملنا معها في الشريحة (٥) من هذه المحاضرة [عندما تعرفنا على "المدى"] :

مجموعة القيم الأولى :

وسطها الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{15+13+3+5+18+12+6+7+3+15}{10} = 9.7$$

مجموعة القيم الأولى	15	3	7	6	12	18	5	3	13	15
	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7
الانحرافات عن الوسط	5.3	-6.7	-2.7	-3.7	2.3	8.3	-4.7	-6.7	3.3	5.3
القيم المطلقة للانحرافات	5.3	6.7	2.7	3.7	2.3	8.3	4.7	6.7	3.3	5.3

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات :

$$M.D = \frac{5.3+3.3+6.7+4.7+8.3+2.3+3.7+2.7+6.7+5.3}{10} = \underline{\underline{4.9}}$$

ولمجموعة القيم الثانية :

وسطها الحسابي :

$$\frac{16+14+13+17+18+17+15+14+3+16}{10} = 14.3$$

مجموعة القيم الثانية	16	3	14	15	17	18	17	13	14	16
	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3
الانحرافات عن الوسط	1.7	-11.3	-0.3	0.7	2.7	3.7	2.7	-1.3	-0.3	1.7
القيم المطلقة للانحرافات	1.7	11.3	0.3	0.7	2.7	3.7	2.7	1.3	0.3	1.7

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات :

$$M.D = \frac{1.7+0.3+1.3+2.7+3.7+2.7+0.7+0.3+11.3+1.7}{10} = \underline{\underline{2.64}}$$

أي أن الانحراف المتوسط للمجموعة الثانية من القيم أقل من الانحراف المتوسط للمجموعة الأولى من القيم مما يعني أن المجموعة الثانية أقل تشتتاً من المجموعة الأولى وهذا ما لم يمكن ملاحظته عند استخدام المدى كمقياس للتشتت

ويمكن أن يتم حل السؤال السابق وذلك بتنظيم خطواتنا من خلال جداول كالتالي :

المجموعة الأولى [n = 10]

x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$
15	9.7	15 – 9.7 = 5.3	5.3
13	9.7	13 – 9.7 = 3.3	3.3
3	9.7	3 – 9.7 = -6.7	6.7
5	9.7	5 – 9.7 = -4.7	4.7
18	9.7	18 – 9.7 = 8.3	8.3
12	9.7	12 – 9.7 = 2.3	2.3
6	9.7	6 – 9.7 = -3.7	3.7
7	9.7	7 – 9.7 = -2.7	2.7
3	9.7	3 – 9.7 = -6.7	6.7
15	9.7	15 – 9.7 = 5.3	5.3
97	97	0	49
$\sum x$ =	$n\bar{x}$	$\sum d$	$\sum \|d\|$

مجموع الأعمدة

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{97}{10} = 9.7$$

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{49}{10} = 4.9$$

المجموعة الثانية [n = 10]

x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$
16	14.3	16 – 14.3 = 1.7	1.7
14	14.3	14 – 14.3 = -0.3	0.3
13	14.3	13 – 14.3 = -1.3	1.3
17	14.3	17 – 14.3 = 2.7	2.7
18	14.3	18 – 14.3 = 3.7	3.7
17	14.3	17 – 14.3 = 2.7	2.7
15	14.3	15 – 14.3 = 0.7	0.7
14	14.3	14 – 14.3 = -0.3	0.3
3	14.3	3 – 14.3 = -11.3	11.3
16	14.3	16 – 14.3 = 1.7	1.7
143	143	0	26.4
$\sum x$ =	$n\bar{x}$	$\sum d$	$\sum \|d\|$

مجموع الأعمدة

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{143}{10} = 14.3$$

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{26.4}{10} = 2.64$$

ويمكن الاستغناء

عن هذا العمود

• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد الانحراف المتوسط $M.D$ من العلاقة :

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f}$$

أي نضرب القيمة المطلقة لانحراف كل قيمة [عن الوسط] في تكرارها ، ثم نقسم الناتج على مجموع التكرارات

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المتوسط للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f
4	20
5	40
6	30
7	10

هذا هو السؤال

وإليك الجواب

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

من هنا بداية الحل

خاص بحساب الوسط الحسابي

$d = x - \bar{x}$	$\lvert d\rvert$	$f \times \lvert d\rvert$
4 – 5.3 = -1.3	1.3	20 × 1.3 = 26
5 – 5.3 = -0.3	0.3	40 × 0.3 = 12
6 – 5.3 = 0.7	0.7	30 × 0.7 = 21
7 – 5.3 = 1.7	1.7	10 × 1.7 = 17
		$\sum f\lvert d\rvert = 76$

$$M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

انتبه :

مجموع الانحرافات هنا [والذي يجب أن يساوي صفراً] هو $\sum fd$ وليس $\sum d$ [حقق ذلك بنفسك]

وهذا الجزء يُضاف إذا كان مطلوباً حساب الانحراف المتوسط

وبالتالي يكون الحل [بصورة ملخصة] كالتالي :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$	$f \times \|d\|$
4	20	80	4 – 5.3 = -1.3	1.3	20 × 1.3 = 26
5	40	200	5 – 5.3 = -0.3	0.3	40 × 0.3 = 12
6	30	180	6 – 5.3 = 0.7	0.7	30 × 0.7 = 21
7	10	70	7 – 5.3 = 1.7	1.7	10 × 1.7 = 17
	100	530			76
	$\sum f = 100$	$\sum fx = 530$			$\sum f\|d\|$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

$$M.D = \frac{\sum f\,|d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

• **وفي حالة البيانات الكمية المتصلة :** تُستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المتوسط $M.D$ ، أي يكون

$$\boxed{M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f}}$$ حيث $$\boxed{d = x_0 - \bar{x}}$$ ، x_0 تمثل مراكز الفئات

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثالين التوضيحيين (٢–٤) ، (٢–٦) بالباب الثاني [المحاضرة ٤/شريحة ٤ ، المحاضرة ٥/شريحة ١٦] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي لهما [المحاضرة ٧/شريحة ١٣] ، نقوم بعمل أعمدة إضافية للجداول تمكننا من حساب الانحراف المتوسط للبيانات كالتالي :

مثال (٢–٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\|d\|$	$f \times \|d\|$
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40	10 – 31.7 = -21.7	21.7	86.8
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400	25 – 31.7 = -6.7	6.7	107.2
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390	32.5 – 31.7 = 0.8	0.8	9.6
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375	37.5 – 31.7 = 5.8	5.8	58
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270	45 – 31.7 = 13.3	13.3	79.8
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110	55 – 31.7 = 23.3	23.3	46.6
		50		1585			388
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\|d\|$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = \underline{\underline{31.7}}$$

$$M.D = \frac{\sum f\,|d|}{\sum f} = \frac{388}{50} = 7.76$$

<u>وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢–٦)</u>

مثال (٢–٦) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\|d\|$	$f \times \|d\|$
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330	55 – 83.75 = -28.25	28.25	169.5
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585	65 – 83.75 = -18.75	18.75	168.75
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125	75 – 83.75 = -8.75	8.75	131.25
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020	85 – 83.75 = 1.25	1.25	15
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855	95 – 83.75 = 11.25	11.25	101.25
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660	110 – 83.75 = 26.25	26.25	157.5
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450	150 – 83.75 = 66.25	66.25	198.75
		60		5025			942
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\|d\|$

مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = \underline{\underline{83.75}}$$

$$M.D = \frac{\sum f\,|d|}{\sum f} = \frac{942}{60} = 15.7$$

ثالثاً : الانحراف المعياري s

يُعرف متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي على أنه تباين مجموعة البيانات [ويُرمز له بالرمز s^2] ، ويُعرف الجذر التربيعي للتباين على أنه الانحراف المعياري للبيانات [ويُرمز له بالرمز s] ، أي أن :

التباين $= \dfrac{\sum d^2}{n} = s^2$ ومنه يكون ← الانحراف المعياري $= \sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{s^2} = s$

فمثلاً في المثال المذكور في الشريحة ٥ [والذي سبق حساب كلٍ من المدى والانحراف المتوسط للبيانات المعطاة] يكون "

المجموعة الأولى [$n = 10$]

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
15	15 – 9.7 = 5.3	28.09
13	13 – 9.7 = 3.3	10.89
3	3 – 9.7 = -6.7	44.89
5	5 – 9.7 = -4.7	22.09
18	18 – 9.7 = 8.3	68.89
12	12 – 9.7 = 2.3	5.29
6	6 – 9.7 = -3.7	13.69
7	7 – 9.7 = -2.7	7.29
3	3 – 9.7 = -6.7	44.89
15	15 – 9.7 = 5.3	28.09
$\sum x$ = 97		$\sum d^2$ = 274.1

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 9.7$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{274.1}{10} = 27.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{27.41} \cong \underline{\underline{5.24}}$$

المجموعة الثانية [$n = 10$]

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
16	16 – 14.3 = 1.7	2.89
14	14 – 14.3 = -0.3	0.09
13	13 – 14.3 = -1.3	1.69
17	17 – 14.3 = 2.7	7.29
18	18 – 14.3 = 3.7	13.69
17	17 – 14.3 = 2.7	7.29
15	15 – 14.3 = 0.7	0.49
14	14 – 14.3 = -0.3	0.09
3	3 – 14.3 = -11.3	127.69
16	16 – 14.3 = 1.7	2.89
$\sum x$ = 143		$\sum d^2$ = 164.1

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 14.3$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{164.1}{10} = 16.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16.41} \cong \underline{\underline{4.05}}$$

• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد التباين s^2 والانحراف المعياري s من :

التباين $= s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f}$

ومنه يكون

الانحراف المعياري $= s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المعياري للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f
4	20
5	40
6	30
7	10

هذا هو السؤال

وإليك الجواب

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
4	20	80	4 – 5.3 = -1.3	1.69	20 × 1.69 = 33.8
5	40	200	5 – 5.3 = -0.3	0.09	40 × 0.09 = 3.6
6	30	180	6 – 5.3 = 0.7	0.49	30 × 0.49 = 14.7
7	10	70	7 – 5.3 = 1.7	2.89	10 × 2.89 = 28.9
	100	530			81

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$ $\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{81}{100} = 0.81$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.81} = \underline{\underline{0.9}}$$

• **وفي حالة البيانات الكمية المتصلة :** تُستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المعياري s ، أي يكون :

التباين $= s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f}$ ومنه يكون ← الانحراف المعياري $= s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$ حيث $d = x_0 - \bar{x}$

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢-٤) بالباب الثاني [المحاضرة ٤/شريحة ٤] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي والانحراف المتوسط لبياناته ، يمكن حساب الانحراف المعياري لهذه البيانات كالتالي :

مثال (٢-٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40	10 – 31.7 = -21.7	470.89	4 × 470.89 = 1883.56
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400	25 – 31.7 = -6.7	44.89	16 × 44.89 = 718.24
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390	32.5 – 31.7 = 0.8	0.64	12 × 0.64 = 7.68
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375	37.5 – 31.7 = 5.8	33.64	10 × 33.64 = 336.4
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270	45 – 31.7 = 13.3	176.89	6 × 176.89 = 1061.34
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110	55 – 31.7 = 23.3	542.89	2 × 542.89 = 1085.78
		50		1585			5093
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$\therefore \quad \bar{x} = \dfrac{\sum f x_0}{\sum f} = \dfrac{1585}{50} = \underline{\underline{31.7}}$

$s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{5093}{50} = 101.86$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{101.86} \cong \underline{\underline{10.09}}$

وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢-٦) [المحاضرة ٥/شريحة ١٦]

مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

مثال (٢-٦)

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330	55 – 83.75 = -28.25	798.06	4788.36
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585	65 – 83.75 = -18.75	351.56	3164.04
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125	75 – 83.75 = -8.75	76.56	1148.4
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020	85 – 83.75 = 1.25	1.56	18.72
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855	95 – 83.75 = 11.25	126.56	1139.04
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660	110 – 83.75 = 26.25	689.06	4134.36
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450	150 – 83.75 = 66.25	4389.06	13167.18
		60		5025			27560.1
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = \underline{\underline{83.75}}$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{27560.1}{60} \cong 459.34$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{459.34} \cong \underline{\underline{21.43}}$$

من السابق يتضح أن كلاً من الانحراف المتوسط والانحراف المعياري يعتمدا تماماً في حساباهما على الوسط الحسابي ، وبالتالي فلهما نفس مزايا وعيوب الوسط الحسابي . أي :

المزايا : من السهل حسابهما – يأخذا في الاعتبار جميع البيانات – لا يحتاجا لترتيب معين للبيانات

العيوب : يتأثرا بشدة بالقيم المتطرفة – لا يمكن إيجادهما بالرسم (بيانياً) – لا يمكن حسابهما للتوزيعات التكرارية المفتوحة

ويمكن تلخيص كل ما يخص الوسط الحسابي والانحراف المتوسط والانحراف المعياري في الآتي :

• للقيم المفردة :

الوسط الحسابي = $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

الانحراف المتوسط = $M.D = \frac{\sum |d|}{n}$

التباين= $s^2 = \frac{\sum d^2}{n}$ $\longrightarrow$ الانحراف المعياري = $s = \sqrt{s^2}$

قيم عددها n	الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات
x	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2
...	...	...	...
...	...	...	...
$\sum x$		$\sum \lvert d \rvert$	$\sum d^2$

• ولتوزيع تكراري :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$M.D = \frac{\sum f\,|d|}{\sum f}$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} \longrightarrow s = \sqrt{s^2}$$

القيم	التكرار		الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2	$f\lvert d \rvert$	fd^2
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$	$\sum fx$				$\sum f\lvert d \rvert$	$\sum fd^2$

• وللبيانات المتصلة :

الفئات	التكرار			الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	مراكز الفئات	$f x_0$	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2	$f\lvert d \rvert$	fd^2
...	...	x_0	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$	...	$\sum fx$				$\sum f\lvert d \rvert$	$\sum fd^2$

مثل التوزيع التكراري السابق فيما عدا أن كل فئة تُمثل بمركزها

خاصتان هامتان للانحراف المتوسط والانحراف المعياري :

الخاصية الأولى : إضافة عدد ثابت c لكل قيمة من قيم البيانات لا يؤثر على قيمة الانحرافين المتوسط والمعياري .

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم

الخاصية الثانية : ضرب كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت c يجعل :

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم × القيمة المطلقة للثابت c

فمثلاً في سؤال "سلي نفسك" [المحاضرة ٧/شريحة ٩ – سؤال أم وليد وأبو وليد] ، كانت البيانات عن درجات الطلاب كالتالي :

الدرجات الأصلية

x	d	$\|d\|$	d^2
9	1	1	1
2	-6	6	36
7	-1	1	1
12	4	4	16
10	2	2	4
40		14	58

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{40}{5} = 8$$
$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{14}{5} = 2.8$$
$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{58}{5} = 11.6$$
$$s = \sqrt{11.6} \cong 3.4$$

بعد إضافة 5 لكل درجة

x	d	$\|d\|$	d^2
14	1	1	1
7	-6	6	36
12	-1	1	1
17	4	4	16
15	2	2	4
65		14	58

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{65}{5} = 13$$
$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{14}{5} = 2.8$$
$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{58}{5} = 11.6$$
$$s = \sqrt{11.6} \cong 3.4$$

بعد ضرب كل درجة في 1.5

x	d	$\|d\|$	d^2
13.5	1.5	1.5	2.25
3	-9	9	81
10.5	-1.5	1.5	2.25
18	6	6	36
15	3	3	9
60		21	130.5

التكملة هنا

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{5} = 12$$
$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{130.5}{5} = 26.1 \longrightarrow$$

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{21}{5} = 4.2 \longleftarrow (2.8 \times 1.5)$$
$$s = \sqrt{26.1} \cong 5.1 \longleftarrow (3.4 \times 1.5)$$

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله [حل الأسئلة التالية يُعد بمثابة ملخص لكل ما تقدم ، وللمساعدة أكمل الجداول المعطاة كنوع من تنظيم حلك]

(١) أوجد المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم :

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل :

- المدى R = أكبر قيمة − أقل قيمة = ... − ...... = ...
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum |d|}{n} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- التباين $s^2 = \dfrac{\sum d^2}{n} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{..........} = ...$

x	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$	d^2
5			
3			
8			
4			
7			
6			
12			
4			
3			
8			
$\sum x$		$\sum \|d\|$	$\sum d^2$

الإجابة :

$R = 9 \quad , \quad \bar{x} = 6 \quad , \quad M.D = 2.2 \quad , \quad s^2 = 7.2 \quad , \quad s \cong 2.68$

(٢) أوجدى المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	8	2	4	6
التكرار f	20	30	35	15

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
8	20						
2	30						
4	35						
6	15						
	$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f\lvert d\rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = ... – ...... = ...
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\lvert d\rvert}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{..........} = ...$

الإجابة: $s \cong 2.18$, $s^2 = 4.75$, $M.D = 1.85$, $\bar{x} = 4.5$, $R = 6$

(٣) أوجدي R، $\bar{x}$ ، $M.D$ ، s^2 ، s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	$5 \le x < 15$	$15 \le x < 25$	$25 \le x < 45$	$45 \le x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

الحل :

الجدول التكراري								
المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
$5 \le x < 15$	20							
$15 \le x < 25$	30							
$25 \le x < 45$	40							
$45 \le x < 55$	10							
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d \rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = ... – ...... = ...

- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx_0}{\sum f} = \dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\lvert d \rvert}{\sum f} = \dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

الإجابة : $R = 50$, $\bar{x} = 27$, $M.D = 11$, $s^2 = 151$, $s \cong 12.29$

تمت

بحمد الله