السلام عليكم ورحمة الله وبركاته
طابت أوقاتكم جميعاً

محتوى مبادئ الإحصاء للدكتور سعيد سيف الدين كامل ..

أتمنى تتابعون الدكتور
وتتأكدون ان حصل أي تغير في المحتوى ..

دعواتكم هنـآن ..

مبادئ الإحصاء التربوي

الفصل الدراسي الأول

العام الدراسي ١٤٣١ ـ ١٤٣٢هـ

د. سعيد سيف الدين

نظام التعليم المطور للانتساب

كلية التربية

المحاضرة الأولى

الباب الأول
مفاهيم أساسية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

(١) مقدمة

(٢) مفهوم علم الإحصاء

(٣) المجتمع والعينة

(٤) البيانات

(٥) خطوات العملية الإحصائية

(٦) تمرينات محلولة

(٧) تدريبات للطالب

واجب متروك للطالب ومعطى له الإجابات النهائية

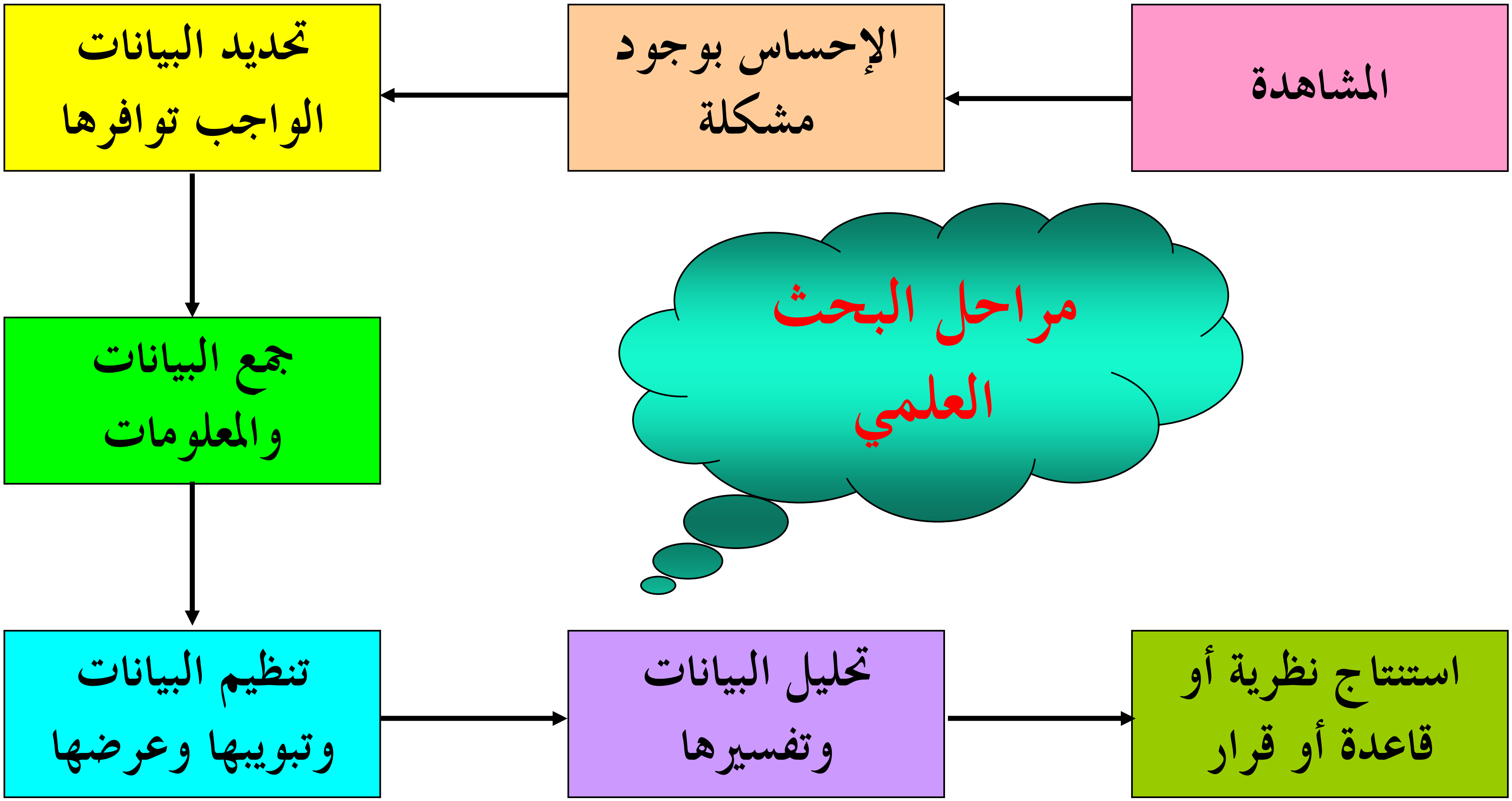
(١) مقدمة

الغرض من العلم (بوجه عام) هو البحث عن الحقيقة ، والبحث العلمي هو الوسيلة للوصول إلى حقائق الأشياء والظواهر ومعرفة كل العلاقات التي تربط بينها وبعضها البعض ، سواء كانت هذه الظواهر اجتماعية أو اقتصادية أو طبيعية أو غير ذلك ، لذا يستخدم البحث العلمي العلم بقصد دراسة ظاهره معينة لاكتشاف حقائقها ومعرفة القواعد العامة التي تحكمها .

والإحساس بوجود مشكلة (أو ظاهرة) ما يمثل شرطاً أساسياً للقيام ببحث علمي ، وهذا الإحساس لا يأتي إلا من خلال المشاهدة للظواهر المختلفة ، وهذا يتطلب تحديد البيانات الواجب توافرها حتى يمكن إجراء البحث والوصول إلى نتائج مقبولة يمكن الاعتماد عليها في تفسير تلك الظواهر المختلفة التي قد تثير الاهتمام .

يأتي بعد ذلك جمع لتلك البيانات من مصادرها المختلفة وتنظيمها وتبويبها وعرضها في صور جدولية أو بيانية ، ثم يتم استخدامها في حساب بعض المقاييس الخاصة بهذه الظواهر وإجراء تحليل لتلك البيانات بما يساعد في تفسير النتائج المختلفة للبيانات واستخدامها في استنتاج نظرية أو قاعدة أو قانون أو المساعدة في اتخاذ القرارات أو التنبوء بنتائج مستقبلية .

والشكل التالي يمكن أن يوضح الإطار العام لأي بحث علمي :


مراحل البحث العلمي
المشاهدة
الإحساس بوجود مشكلة
تحديد البيانات الواجب توافرها
جمع البيانات والمعلومات
تنظيم البيانات وتبويبها وعرضها
تحليل البيانات وتفسيرها
استنتاج نظرية أو قاعدة أو قرار

(٢) مفهوم علم الإحصاء

يختص علم الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

وقديماً عُرِف علم الإحصاء على أنه جمع البيانات عن ظاهرة معينة وترتيبها في جداول أو عرضها في صورة رسومات وأشكال بيانية بسيطة ، ومن ثم استخدم اصطلاح "علم الإحصاء" للتعبير عن البيانات والمقاييس المستخرجة من تلك البيانات (مثل المتوسطات) ، وعلى هذا الأساس نتحدث عن إحصاءات البطالة والحوادث والمواليد والوفيات ، ... إلخ .

لكن في حقيقة الأمر هذا استخدام ذي معنى ضيق لاصطلاح "علم الإحصاء" ، لكنِ مع تقدم العلوم بدأ علم الإحصاء يلعب دوراً متزايداً في حياتنا اليومية بحيث أصبح يشغل حيزاً كبيراً بين بقية العلوم الأخرى ، فأصبح يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها واستنتاج وتوقع نتائج واتخاذ قرارات .

وينقسم علم الإحصاء إلى قسمين رئيسيين :

الإحصاء الوصفي	الإحصاء الاستقرائي
وهو يهتم بجمع وتبويب وعرض ووصف البيانات وحساب بعض المقاييس الخاصة بها دون الوصول إلى نتائج أو استدلالات خاصة	أو **الاستدلال الإحصائي** وهو يبحث في استقراء النتائج واتخاذ القرارات

(٣) المجتمع والعينة

مثلاً لتحليل نتائج طلاب المملكة في مقرر اللغة الإنجليزية لطلاب وطالبات الثانوية العامة ، فمن المستحيل أو غير العملي أن نقوم بجمع درجات جميع الطلاب في هذا المقرر على مستوى المملكة وتنظيمها وتحليليها ثم نستنتج بعض النتائج من هذا التحليل ، هنا يكون **المجتمع** هو جميع طلاب المملكة . بدلاً من ذلك نقوم باختيار **عينة** من هؤلاء الطلاب (تحت شروط معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع) ونقوم بتحليل بيانات هذه العينة ونخرج من هذا التحليل باستدلالات تخص المجتمع ككل .

(٤) البيانات

يمكن ببساطة تعريف البيانات على أنها مجموعة من " **المشاهدات أو القياسات** " التي تخص الظاهرة تحت الدراسة ، والكمية التي نقوم بمشاهدتها أو قياسها تُسمى **بالمتغير** وعادةً نرمز له برمز مثل .. , B , A , y , x ، فمثلاً :

مثال	العملية الإحصائية : دراسة	البيانات (القياسات أو المشاهدات)	المتغير x
(١)	لون العين لبعض الأطفال حديثي الولادة	أخضر – أزرق – بني –	لون العين
(٢)	عدد الطلاب في فصول مدرسة	15 – 18 – 20 – 25 – 17 -	عدد الطلاب
(٣)	أطوال مجموعة من الطلاب في فصل ما (بالمتر)	1.5 – 1.52 – 1.71 – 1.83 -	طول الطالب
(٤)	أوزان بعض العاملات بمصنع معين (بالكيلوجرام)	55.2 – 60.1 – 63.35 – 70.52 -	وزن العاملة
(٥)	تقديرات عدد من الطلاب في مقرر الإحصاء	A – B – C – D – F – A – C – B -	تقدير الطالب

والمتغير (أي الظاهرة تحت الدراسة) إما أن يكون :

تُسمى البيانات عندئذٍ ببيانات نوعية

تُسمى البيانات عندئذٍ ببيانات كمية

متغير نوعي

أو

متغير كمي

أي لا يمكن التعبير عنه **بعدد** [مثل لون العين أو تقدير الطلاب في الأمثلة (١) ، (٥) السابقة]

(١) لون العين	أخضر – أزرق – بني – .....
(٥) تقدير الطلبة	A – B – C – F – D – A – A - ..

أي يمكن التعبير عنه **بعدد** مثل الأطوال أو الأوزان أو أعداد الطلاب

متغير متصل

تُسمى البيانات عندئذ ببيانات (كمية) متصلةً

وفيها يمكن أن يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين معينتين كما في الأمثلة (٣) ، (٤) السابقة **[بتعبير آخر هو كمية يمكن أن تُقاس ولا تُعد]**

(٣) أطوال الطلاب	1.5 – 1.52 – 1.71 – 1.83 - …
(٤) أوزان العاملات	55.2 – 60.1 – 63.25 - ……

أو

متغير متقطع

تُسمى البيانات عندئذ ببيانات (كمية) متقطعةً

خلاف ذلك كما في المثال (٢) السابق **[أو بتعبير آخر هو كمية يمكن أن تُعد ولا تُقاس]**

عدد الطلاب	15 – 18 – 20 – 25 - ……

(٥) خطوات العملية الإحصائية

يمكن تلخيص خطوات أي عملية إحصائية في الآتي :

(أ) جمع البيانات

هي عملية الحصول على القياسات الخاصة بظاهرة معينة وعادةً ما تُسمى البيانات المجمعة **بالبيانات الخام**

(ب) تنظيم وعرض البيانات

هي عملية وضع البيانات السابقة في جداول خاصة وعرضها بطرق مناسبة

(ج) تحليل البيانات

هي عملية إيجاد مقاييس تتحدد قيمها من البيانات السابقة وتعطي بعض الدلالات عن الظاهرة تحت الدراسة

(د) استقراء النتائج واتخاذ القرارات

هي الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من خلال تحليله للبيانات السابقة وعادةً ما تكون على شكل تقديرات أو تنبوءات أو تعميمات أو قرارات بالرفض أو القبول

(٦) تمرينات محلولة

في الجزء التالي سنتناول بعض التمرينات التي تؤكد على المفاهيم الأساسية التي تناولناها في الجزء السابق ، وفي كل تمرين سيُعطى لكل سؤال ٤ اختيارات للإجابة

المطلوب اختيار الإجابة السليمة وذلك بتظليل الدائرة المناظرة لتلك الإجابة باستخدام القلم الرصاص

كما ننبه لوجود المزيد من مثل هذه التمارين في نهاية هذا الجزء على صورة تدريبات للطالب ننصح الطالب بحلها لتثبيت مفاهيم الجزء السابق داخله حتى يشعر أنه يقف على أرض صلبة عند الانتقال للجزء التالي من هذا الباب ، ومقارنة حله بالأجوبة النهائية المعطاة عقب كل تمرين وإعطاء تقدير لنفسه

وسوف يكون ذلك أسلوبنا (بإذن الله) أثناء دراستنا لهذا المقرر

اختر الإجابة الصحيحة لكلٍ مما يأتي :

(١) هو العلم الذي يهتم بجمع وتبويب وعرض ووصف البيانات وحساب بعض المقاييس الخاصة بها دون الوصول إلى نتائج أو استدلالات خاصة

(أ) ● علم الإحصاء الوصفي
(ب) ○ علم الإحصاء الاستقرائي
(ج) ○ علم تقنية المعلومات
(د) ○ علم تكنولوجيا المعلومات

---

(٢) .... هي عملية الحصول على القياسات والبيانات الخاصة بظاهرة معينة .

(أ) ○ تحليل البيانات
(ب) ○ استقراء النتائج واتخاذ القرارات
(ج) ○ تنظيم وعرض البيانات
(د) ● جمع البيانات

---

(٣) .... هي عملية وضع البيانات الخاصة بظاهرة معينة في جداول منسقة وعرضها بطرق مناسبة .

(أ) ○ تحليل البيانات
(ب) ○ استقراء النتائج واتخاذ القرارات
(ج) ● تنظيم وعرض البيانات
(د) ○ جمع البيانات

(٤) عدد الأيام N في كل شهر هو :

(أ) متغير نوعي
(ب) متغير كمي متصل
(ج) متغير كمي متقطع
(د) خلاف ذلك

---

(٥) لون السيارات C في أحد مواقف السيارات هو :

(أ) متغير نوعي
(ب) متغير كمي متصل
(ج) متغير كمي متقطع
(د) خلاف ذلك

---

(٦) البيانات المجمعة عن تقديرات الطلبة في أحد المقررات الدراسية هي :

(أ) بيانات نوعية
(ب) بيانات كمية متصلة
(ج) بيانات كمية متقطعة
(د) خلاف ذلك

---

(٧) البيانات المجمعة عن الدخل السنوي لمنسوبي إحدى الهيئات الحكومية هي :

(أ) بيانات نوعية
(ب) بيانات كمية متصلة
(ج) بيانات كمية متقطعة
(د) خلاف ذلك

(٧) تدريبات للطالب

(١) هو العلم الذي يبحث في استقراء النتائج واتخاذ القرارات

(أ) ◯ علم الإحصاء الوصفي
(ب) ◯ علم الإحصاء الاستقرائي
(ج) ◯ علم تقنية المعلومات
(د) ◯ علم تكنولوجيا المعلومات

(٢) .... هي عملية الوصول إلى استنتاجات وتوقعات وتنبوءات خاصة بظاهرة معينة

(أ) ◯ تحليل البيانات
(ب) ◯ استقراء النتائج واتخاذ القرارات
(ج) ◯ تنظيم وعرض البيانات
(د) ◯ جمع البيانات

(٣) .... هي عملية إيجاد قيم لمقاييس تتحدد قيمها من البيانات الخاصة بظاهرة معينة وتُعطي بعض الدلالات عن تلك الظاهرة

(أ) ◯ تحليل البيانات
(ب) ◯ استقراء النتائج واتخاذ القرارات
(ج) ◯ تنظيم وعرض البيانات
(د) ◯ جمع البيانات

(٤) المسافة d (بالكيلومتر) التي يقطعها شخص يومياً من بيته لمكان عمله هي :

(أ) ◯ متغير نوعي
(ب) ◯ متغير كمي متصل
(ج) ◯ متغير كمي متقطع
(د) ◯ خلاف ذلك

(٥) وزن البطاطس *W* (بالكيلوجرام) التي تنتجها مزارع مختلفة في سنة معينة هو :

(أ) ◯ متغير نوعي (ب) ◯ متغير كمي متصل

(ج) ◯ متغير كمي متقطع (د) ◯ خلاف ذلك

(٦) عدد حبات البطيخ *N* التي تبيعها محلات سوبر ماركت مختلفة يوم الجمعة هو :

(أ) ◯ متغير نوعي (ب) ◯ متغير كمي متصل

(ج) ◯ متغير كمي متقطع (د) ◯ خلاف ذلك

(٧) الزمن *t* الذي يأخذه كل طالب في كليتك لحل اختبار مقرر الإحصاء هو :

(أ) ◯ متغير نوعي (ب) ◯ متغير كمي متصل

(ج) ◯ متغير كمي متقطع (د) ◯ خلاف ذلك

(٨) مقاس الأحذية *S* هو :

(أ) ◯ متغير نوعي (ب) ◯ متغير كمي متصل

(ج) ◯ متغير كمي متقطع (د) ◯ خلاف ذلك

(٩) اللعبة الرياضية *A* التي يفضلها أفراد أسرتك هي :

(أ) ◯ متغير نوعي (ب) ◯ متغير كمي متصل

(ج) ◯ متغير كمي متقطع (د) ◯ خلاف ذلك

(١٠) البيانات المجمعة عن موديلات السيارات في موقف ما ، هي :

(أ) ○ بيانات نوعية　　(ب) ○ بيانات كمية متصلة

(ج) ○ بيانات كمية متقطعة　　(د) ○ خلاف ذلك

(١١) البيانات المجمعة عن النسبة المئوية لدرجات الطلاب في أحد المقررات الدراسية هي :

(أ) ○ بيانات نوعية　　(ب) ○ بيانات كمية متصلة

(ج) ○ بيانات كمية متقطعة　　(د) ○ خلاف ذلك

(١٢) البيانات المجمعة عن درجة الحرارة ساعة الظهيرة في عدد من مدن المملكة هي :

(أ) ○ بيانات نوعية　　(ب) ○ بيانات كمية متصلة

(ج) ○ بيانات كمية متقطعة　　(د) ○ خلاف ذلك

(١٣) البيانات المجمعة عن الحالة الاجتماعية لسكان منطقة معينة هي :

(أ) ○ بيانات نوعية　　(ب) ○ بيانات كمية متصلة

(ج) ○ بيانات كمية متقطعة　　(د) ○ خلاف ذلك

الإجابة : (١) ب　(٢) ب　(٣) أ　(٤) ب　(٥) ب　(٦) ج　(٧) ب　(٨) ج　(٩) أ

(١٠) أ　(١١) ب　(١٢) ب　(١٣) أ

المحاضرة الثانية

الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

(١) مقدمة [البيانات النوعية – الكمية – المنفصلة]

(٢) عرض البيانات المنفصلة

- تحديد المدى
- تفريغ البيانات
- عرض البيانات عن طريق الجداول
- العرض البياني للبيانات

الأعمدة البسيطة – القضبان البسيطة – المضلع التكراري – المنحنى التكراري – طريقة الدائرة

(١) مقدمة

ذكرنا في الباب السابق (الباب الأول) ما هي البيانات [هي مجموعة المشاهدات أو القياسات التي تخص ظاهرة معينة تحت الدراسة] وعرفنا المتغير على أنه تلك الكمية التي نقوم بمشاهدتها أو قياسها ، كما ذكرنا أن البيانات إما أن تكون : نوعية أو كمية ، حيث :

(أ) البيانات النوعية : هي تلك البيانات التي لا يمكن التعبير عن متغيرها بعدد (أي بيانات غير رقمية) ، مثل :

- لون (أو نوع) السيارات الموجودة في موقف ما [أحمر – أبيض – أسود – ....]
- الحالة الاجتماعية للسيدات في محافظة معينة [متزوجة – عزباء – مطلقة – أرملة – منفصلة]
- رأيك في قرار خاص بالمؤسسة التي تعمل بها [أوافق بشدة – أوافق – أعترض – أتحفظ – ...]
- وغيره من مثل هذه الأمثلة .

(ب) البيانات الكمية : هي تلك البيانات التي يُعبر فيها عن المتغير بعدد (أي بيانات رقمية) ، وهذه البيانات بدورها تنقسم إلى :

(ب – ١) بيانات كمية متصلة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير أي قيمة بين قيمتين (أي بيانات يمكن أن تُقاس ولا تُعد ، مثل :

- أطوال الطلاب في إحدى المدارس .
- أوزان العاملات بإحدى المصانع .
- الدخل السنوي لمنسوبي مؤسسة معينة .
- وغيره من مثل هذه الأمثلة .

(ب – ٢) بيانات كمية متقطعة : وفيها يمكن أن يأخذ المتغير قيمة على (إما ..... أو ...... وليس أي قيمة بينهما) ، وبتعبير آخر هي بيانات يمكن أن تُعد ولا تُقاس ، مثل عدد طلاب الفصول المختلفة في مدرسة ما

والبيانات المنفصلة إما أن تكون نوعية أو كمية متقطعة

وسوف نستعرض في البند القادم (بإذن الله) كيفية عرض البيانات المنفصلة

(٢) عرض البيانات المنفصلة

كما ذكرنا في البند السابق أن البيانات المنفصلة إما أن تكون بيانات نوعية أو بيانات كمية متقطعة يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) قيماً محددة ولا يأخذ قيماً موزعة على فترة ، وهذه البيانات يمكن عرضها بطرق مختلفة منها الجداول ومنها الأشكال البيانية . ولتوضيح ذلك دعنا نتعامل مع المثال التوضيحي التالي :

مثال توضيحي (٢-١) : قام أحد الباحثين بجمع البيانات التالية عن درجة الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية بالثانوية العامة بأحد الفصول المتميزة بإحدى مدارس المنطقة الشرقية وكانت الدرجات كالتالي (الدرجة العظمى 100) :

92	98	99	94	93	95	99	99	95	100
94	95	92	95	96	93	95	94	95	97

والمطلوب تنظيم وعرض النتائج السابقة بطرق عرض مختلفة .

البيانات المعطاة في المثال تمثل الخطوة الأولى في أي عملية إحصائية وهي عملية " جمع البيانات " ، والبيانات هنا معطاة على صورة " بيانات خام " أي بيانات كاملة لكن في صورة غير منظمة ، ولتنظيم هذه البيانات نحاول تكوين ما يُسمى بالتوزيع التكراري لهذه البيانات ، ويتم ذلك كالآتي :

• تحديد المدى [وسنرمز له بالرمز *R*]

وهو "الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة" في البيانات المعروضة

92	98	99	94	93	95	99	99	95	100
94	95	92	95	96	93	95	94	95	97

ويمكن بسهولة ملاحظة أن أكبر قيمة = 100

وأن أقل قيمة = 92

وبالتالي يكون المدي مساوياً لــ :

$$R = 100 - 92 = 8$$

• تفريغ البيانات

92	98	99	94	93	95	99	99	95	100
94	95	92	95	96	93	95	94	95	97

جدول (٢–١) تفريغ البيانات

المتغير (الدرجة) x	تفريغ البيانات (العلامات)
92	||
93	||
94	|||
95	~~||||~~ |
96	|
97	|
98	|
99	|||
100	|

• عرض البيانات عن طريق الجداول

التوزيع (الجدول) التكراري

الدرجة x	العلامات	التكرار f
92	||	2
93	||	2
94	|||	3
95	~~||||~~ |	6
96	|	1
97	|	1
98	|	1
99	|||	3
100	|	1
		$\sum f = 20$

مجموع التكرارات (الطلاب)

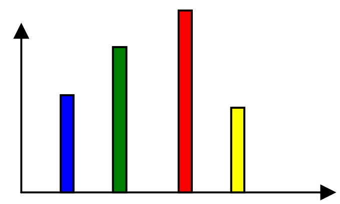
وتُقرأ سيجما f

التوزيع (الجدول) التكراري النسبي

الدرجة x	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f}$ $(f / \sum f =)$
92	2	2/20 = 0.1 or 0.1 x 100 = 10%
93	2	2/20 = 0.1 or 0.1 x 100 = 10%
94	3	3/20 = 0.15 or 0.15 x 100 = 15%
95	6	6/20 = 0.3 or 0.3 x 100 = 30%
96	1	1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%
97	1	1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%
98	1	1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%
99	3	3/20 = 0.15 or 0.15 x 100 = 15%
100	1	1/20 = 0.05 or 0.05 x 100 = 5%
	$\sum f = 20$	$\sum \bar{f} = 1$ or $\sum \bar{f} = 100\%$

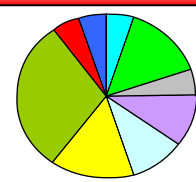
- **العرض البياني للبيانات المنفصلة :** طرق شتى منها

طريقة الأعمدة



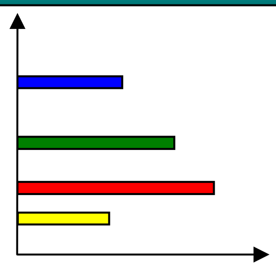
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بعمود (خط رأسي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

طريقة الدائرة



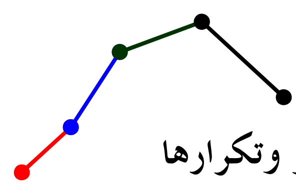
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة وذلك طبقاً لتكرارها

طريقة القضبان



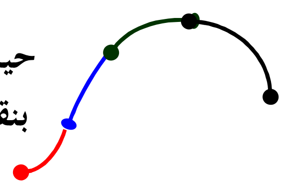
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقضيب (خط أفقي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

المضلع التكراري



حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة)

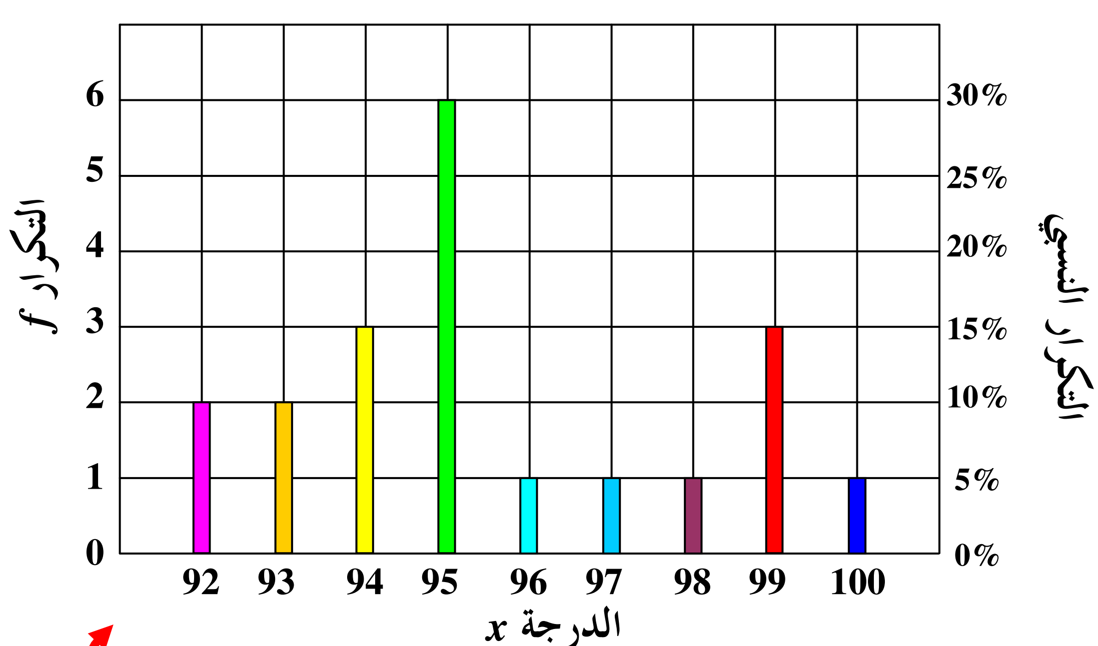
المنحنى التكراري



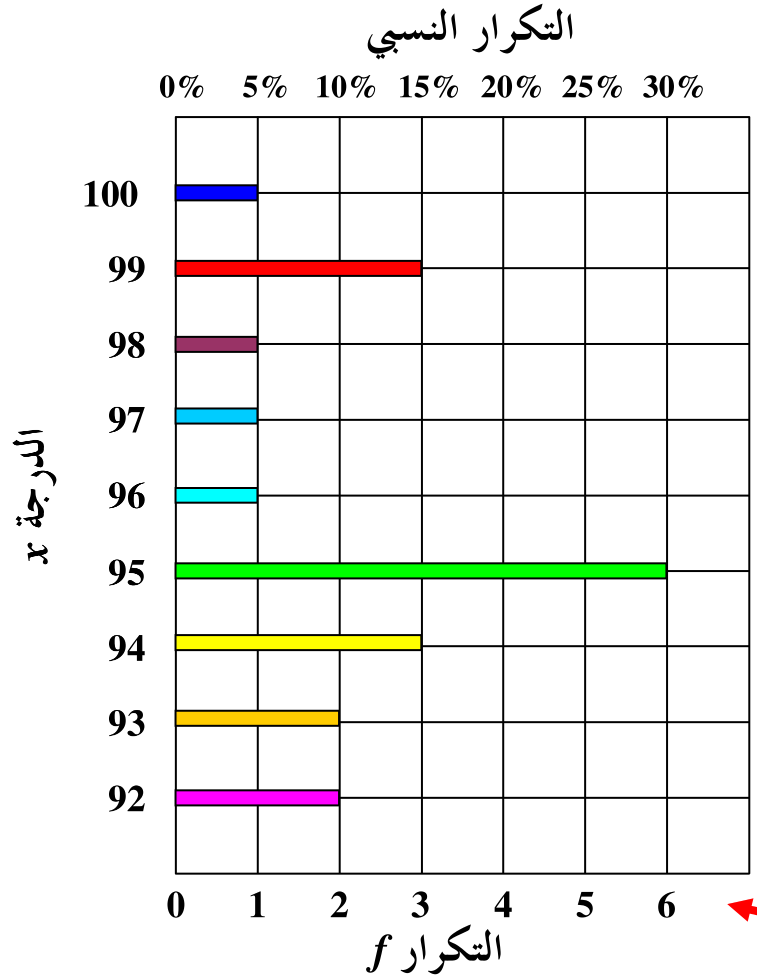
حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط ممهد (بواسطة اليد)

الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

طريقة الأعمدة البسيطة (الخطوط الرأسية)



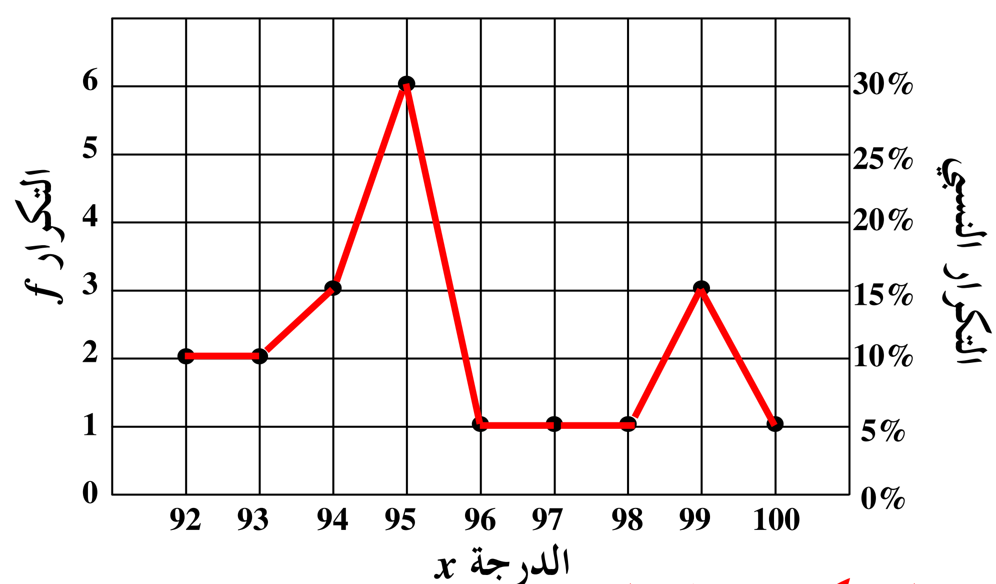
طريقة القضبان البسيطة (الخطوط الأفقية)



وفي الطريقتين لا يهم عرض المستطيلات لكن من المهم جداً أن تكون الأعمدة أو القضبان منفصلة عن بعضها

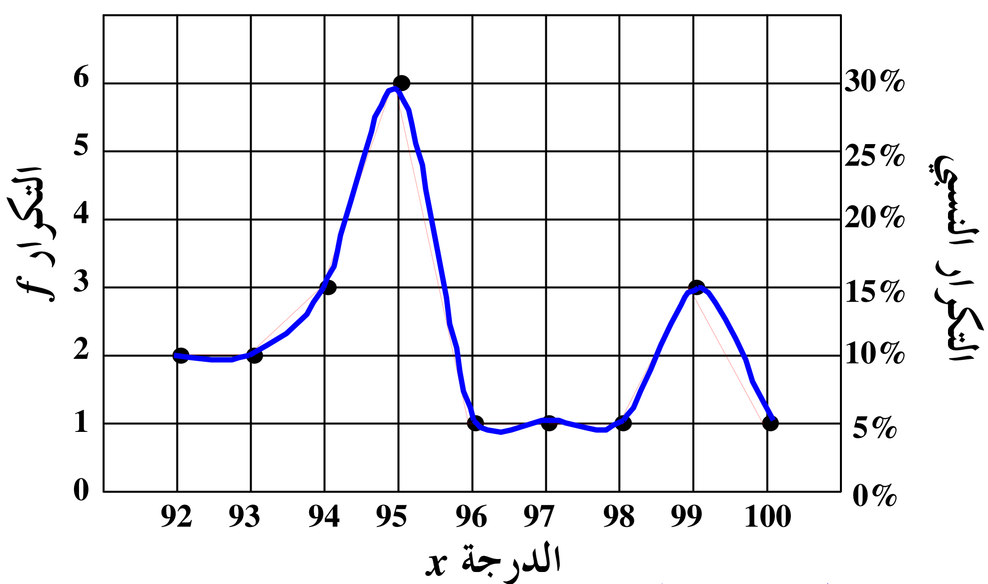
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

المضلع التكراري [المضلع التكراري النسبي]



خط منكسر (بالمسطرة)

المنحنى التكراري [المنحنى التكراري النسبي]



خط ممهد (باليد)

في الأسلوبين تُمثل كل قيمة من قيم المتغير (الدرجة) x بنقطة إحداثيها الأفقي هو قيمة المتغير وإحداثيها الرأسي هو قيمة التكرار [أو التكرار النسبي] المناظر لتلك القيمة

لاحظ أنه يمكن الجمع بين أكثر من طريقة لعرض البيانات

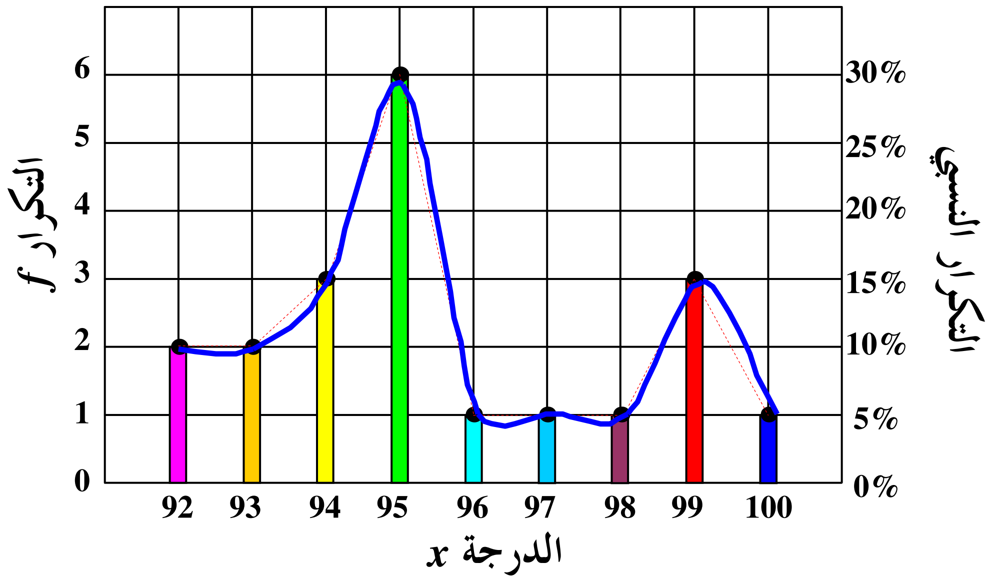
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1
التكرار النسبي $\bar{f}$	0.1	0.1	0.15	0.3	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05
(كنسبة مئوية)	10%	10%	15%	30%	5%	5%	5%	15%	5%

طرق مختلفة للعرض

طريقة الأعمدة البسيطة

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي)

المنحنى التكراري (أو التكراري النسبي)



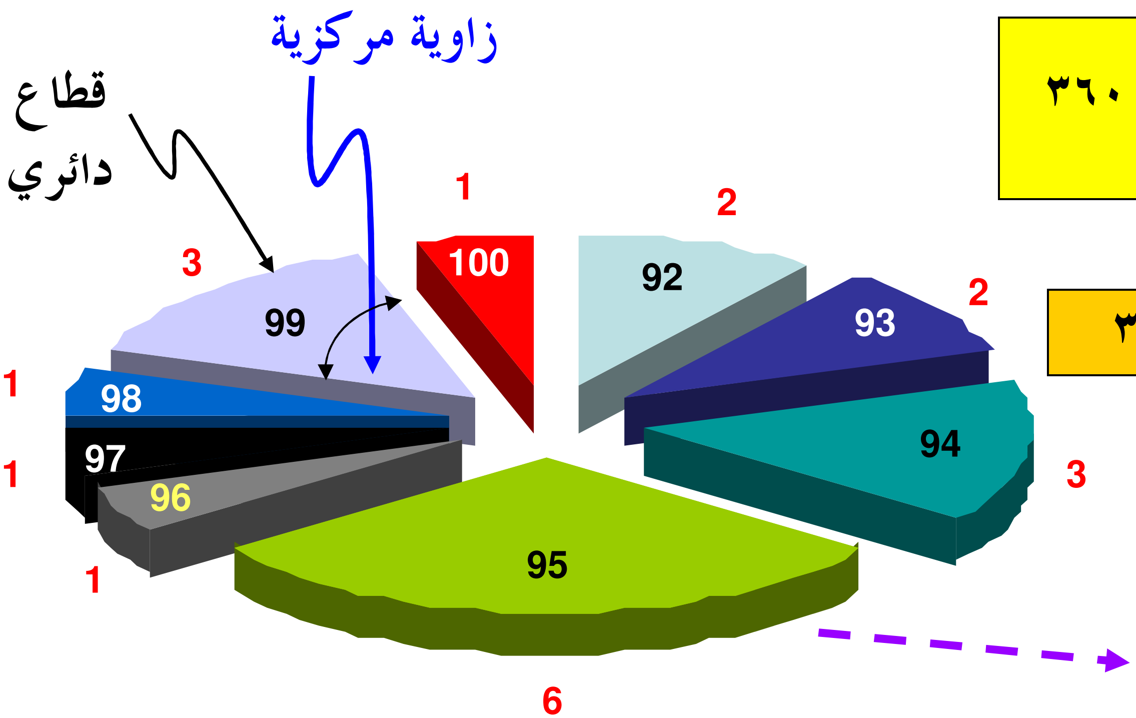
الدرجة x	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار f	2	2	3	6	1	1	1	3	1

والآن نتناول طريقة أخرى لتمثيل البيانات بيانياً وهي طريقة **الدائرة** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة تحدد زاويته المركزية بالعلاقة :

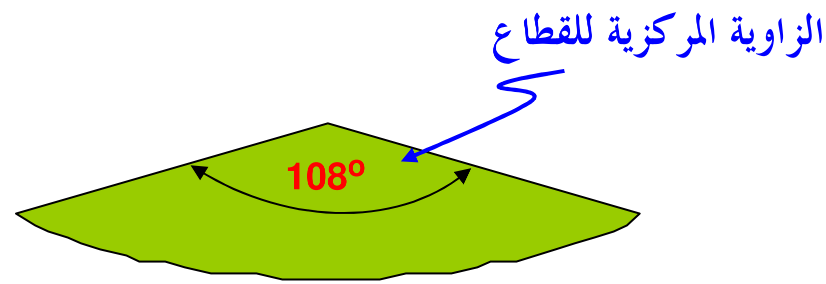
الزاوية المركزية لقيمة ما = $\dfrac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}}$ × ٣٦٠

أو

الزاوية المركزية لقيمة ما = التكرار النسبي للقيمة × ٣٦٠



القيم داخل القطاعات تمثل الدرجة (المتغير) x والقيم المكتوبة خارج القطاعات باللون الأحمر تمثل التكرار f

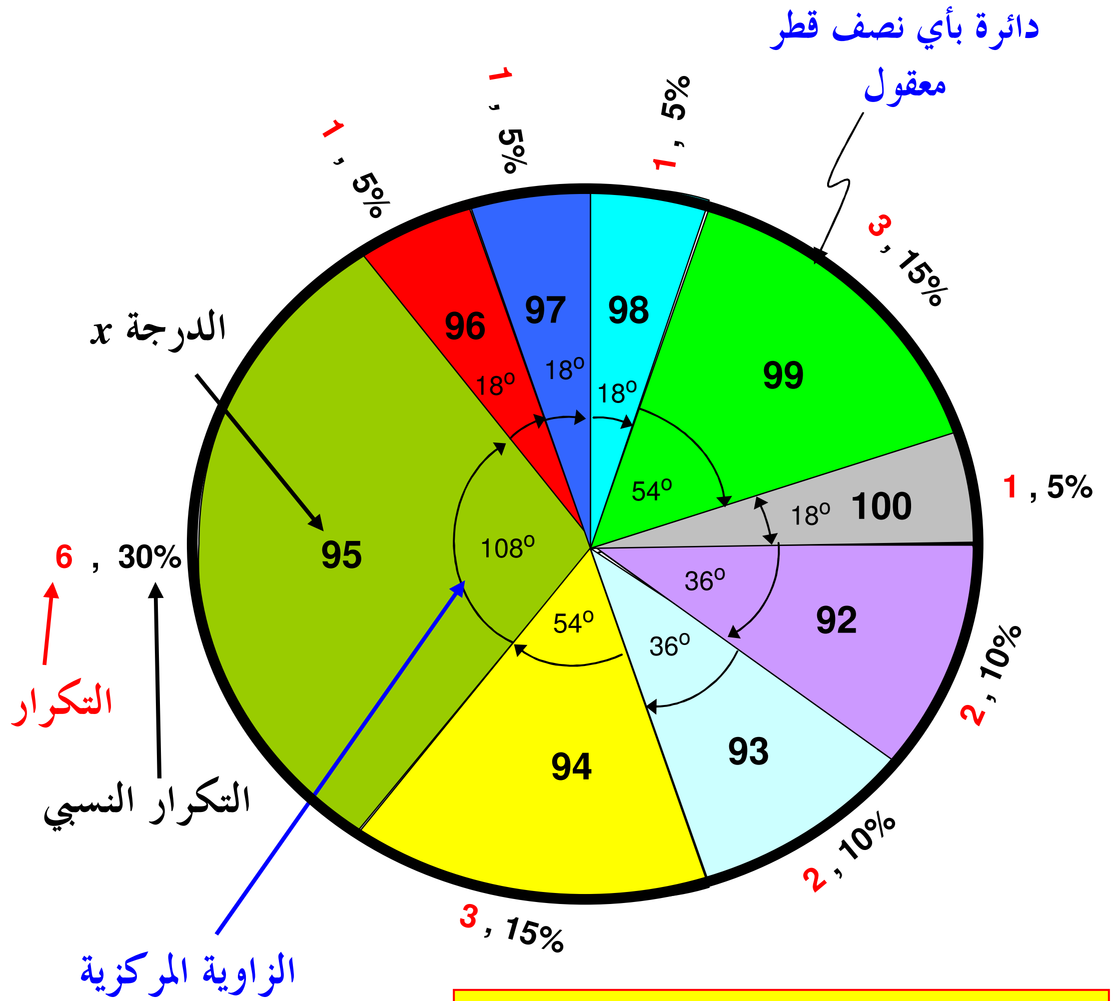


القطاع الخاص بالدرجة "95" ذات التكرار 6 قياس زاويته المركزية تساوي :

$$\frac{6}{20} \times 360 = 108^{o}$$

إذن لابد من حساب الزاوية المركزية المناظرة لكل قيمة من قيم المتغير x (الدرجة) ، وهذه القيم مبينة بالجدول التالي :

الزاوية المركزية	التكرار f	الدرجة x
(2/20)x360 = 36°	2	92
(2/20)x360 = 36°	2	93
(3/20)x360 = 54°	3	94
(6/20)x360 = 108°	6	95
(1/20)x360 = 18°	1	96
(1/20)x360 = 18°	1	97
(1/20)x360 = 18°	1	98
(3/20)x360 = 54°	3	99
(1/20)x360 = 18°	1	100
مجموع الزوايا = 360°	$\sum f = 20$	



طريقة الدائرة لتمثيل البيانات

مثال (٢-٢) : فى دراسة قام بإجرائها أحد الأطباء لطفل معرض لأحد الأمراض النفسية ، تم سؤاله عن لون مجموعة من الأشياء فكانت إجاباته كما يلى :

أحمر	أزرق	بنفسجى	أحمر	أخضر
أبيض	أبيض	أحمر	أخضر	أبيض
أزرق	أحمر	أخضر	أحمر	بنفسجى
أخضر	أزرق	أبيض	بنفسجى	أحمر

المطلوب : عرض البيانات السابقة بطرق مختلفة

ملحوظة : إذا لم يُذكر أمام المثال أنه مثال توضيحي ننصح القارئ بأن يقوم بحله بمفرده ويقارن حله بالحل التفصيلي المعطي

بداية الحل : نقوم أولاً بتفريغ البيانات [تحويلها من صورها الخام إلى صورة منظمة] وتكوين الجدول (التوزيع) التكراري (والتكراري النسبي)

هذا كل ما يمكن أن تحتاجه

نحتاجه فقط عند تمثيل البيانات
بطريقة الدائرة

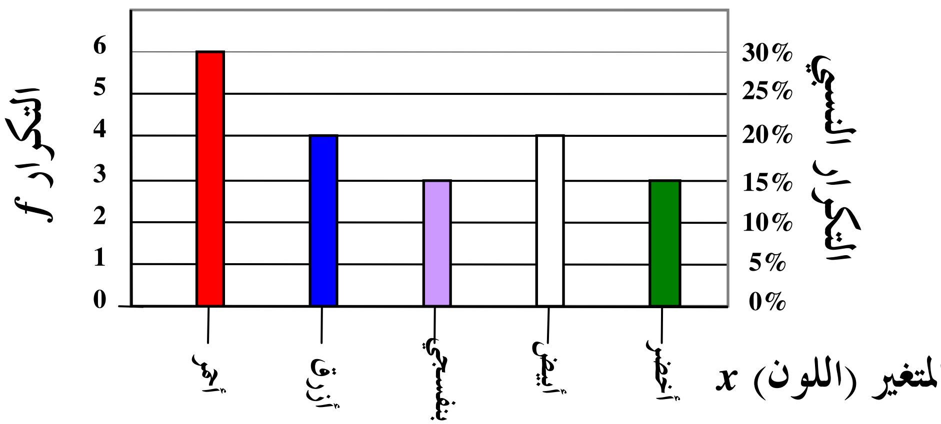
عمود (١) المتغير (اللون) x	عمود (٢) العلامات	عمود (٣) التكرار f	عمود (٤) التكرار النسبي $\bar{f}$	عمود (٥) التكرار النسبي $\bar{f}$ (كنسبة مئوية)	عمود (٦) الزاوية المركزية
أحمر	IIII I	6	6/20 = 0.30	(6/20) x 100 = 30%	0.3x360 = 108º
أزرق	IIII	4	4/20 = 0.20	(4/20) x 100 = 20%	0.2x360 = 72º
بنفسجي	III	3	3/20 = 0.15	(3/20) x 100 = 15%	0.15x360 = 54º
أبيض	IIII	4	4/20 = 0.20	(4/20) x 100 = 20%	0.2x360 = 72º
أخضر	III	3	3/20 = 0.15	(3/20) x 100 = 15%	0.15x360 = 54º
		$\sum f = 20$	$\sum \bar{f} = 1$	$\sum \bar{f} = 100\%$	المجموع = 360º

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

نستبدل العمود (٤) بالعمود (٥) إذا
كان التكرار النسبي مطلوب كنسبة مئوية

تمثيل البيانات بطريقة الأعمدة البسيطة

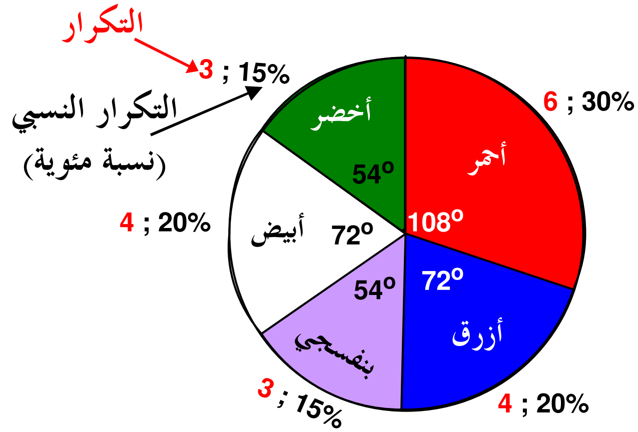


للاسترشاد به فقط

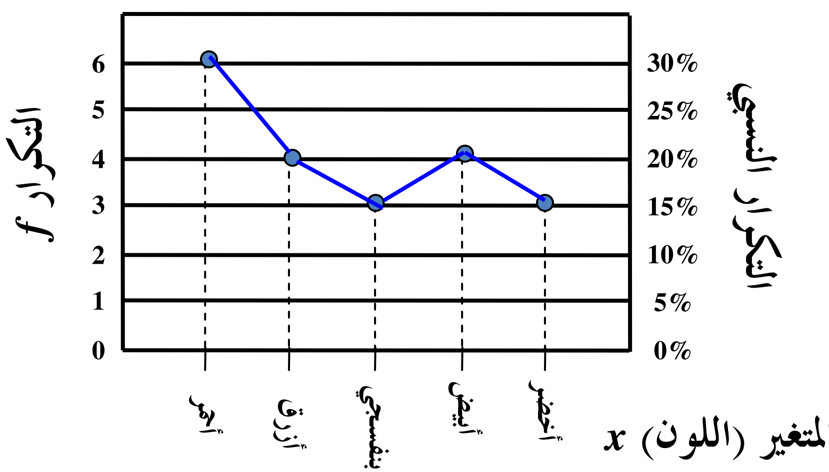
[التفاصيل في الصفحة السابقة]

x	f	الزاوية
أحمر	6	108
أزرق	4	72
بنفسجي	3	54
أبيض	4	72
أخضر	3	54

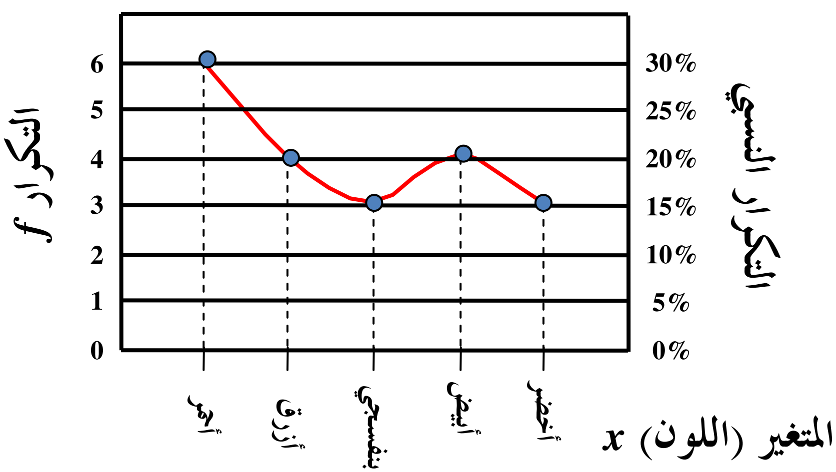
تمثيل البيانات بطريقة الدائرة



تمثيل البيانات بطريقة المضلع التكراري (النسبي)



تمثيل البيانات بطريقة المنحنى التكراري (النسبي)



المحاضرة الثالثة

[تابع] الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

(١) تمارين محلولة على ما سبق

(٢) عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهرة

- طريقة الأعمدة المزدوجة
- طريقة الأعمدة المجزأة
- طرق أخرى

تمارين محلولة (٢–١)

س ١ : الجدول التالي يبين عدد السيارات الموجودة في أحد المواقف طبقاً لنوع السيارة ، المطلوب عرض هذه البيانات بطرق بيانية مختلفة

نوع السيارة	شيفروليه C	نيسان N	تويوتا T	لانسر L	هيونداي H	مرسيدس M
عدد السيارات	20	30	50	30	60	10

الحل :

$$\frac{f}{\sum f}\times 360 \quad \text{or} \quad \bar{f}\times 360$$

$f / \sum f$

نوع السيارة

عدد السيارات

المتغير x	التكرار f	التكرار النسبي $\bar{f}$	الزاوية المركزية
C	20	0.10 or 10%	36°
N	30	0.15 or 15%	54°
T	50	0.25 or 25%	90°
L	30	0.15 or 15%	54°
H	60	0.30 or 30%	108°
M	10	0.05 or 5%	18°
	200	1 or 100%	360°

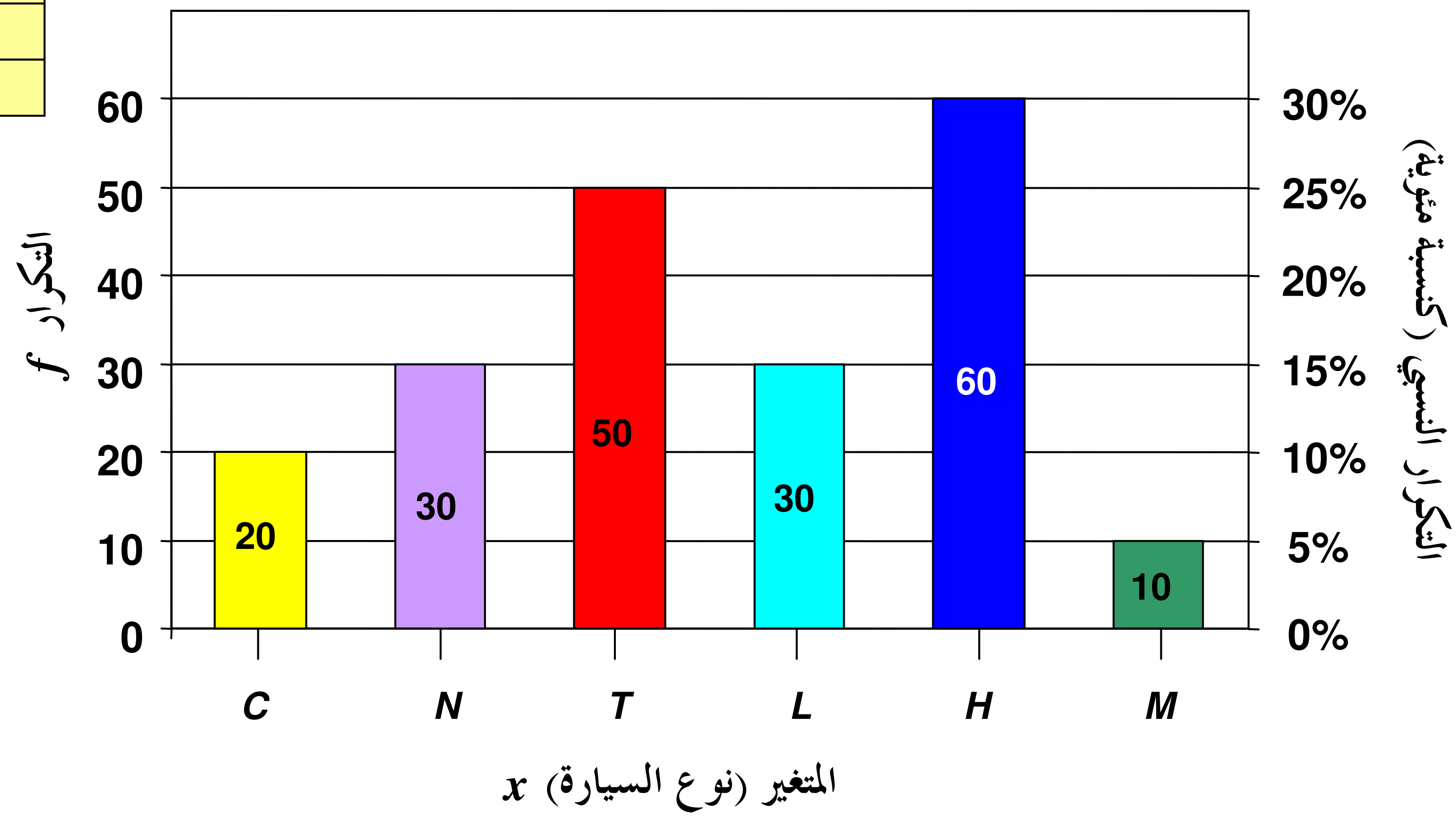
$\sum f$ $\sum \bar{f}$ مجموع الزوايا المركزية

تماماً مثل آخر مثال في المحاضرة السابقة

كأن ده عقلك وبيقولك إيه أساسيات التعامل مع أي مسألة من هذا النوع ؟

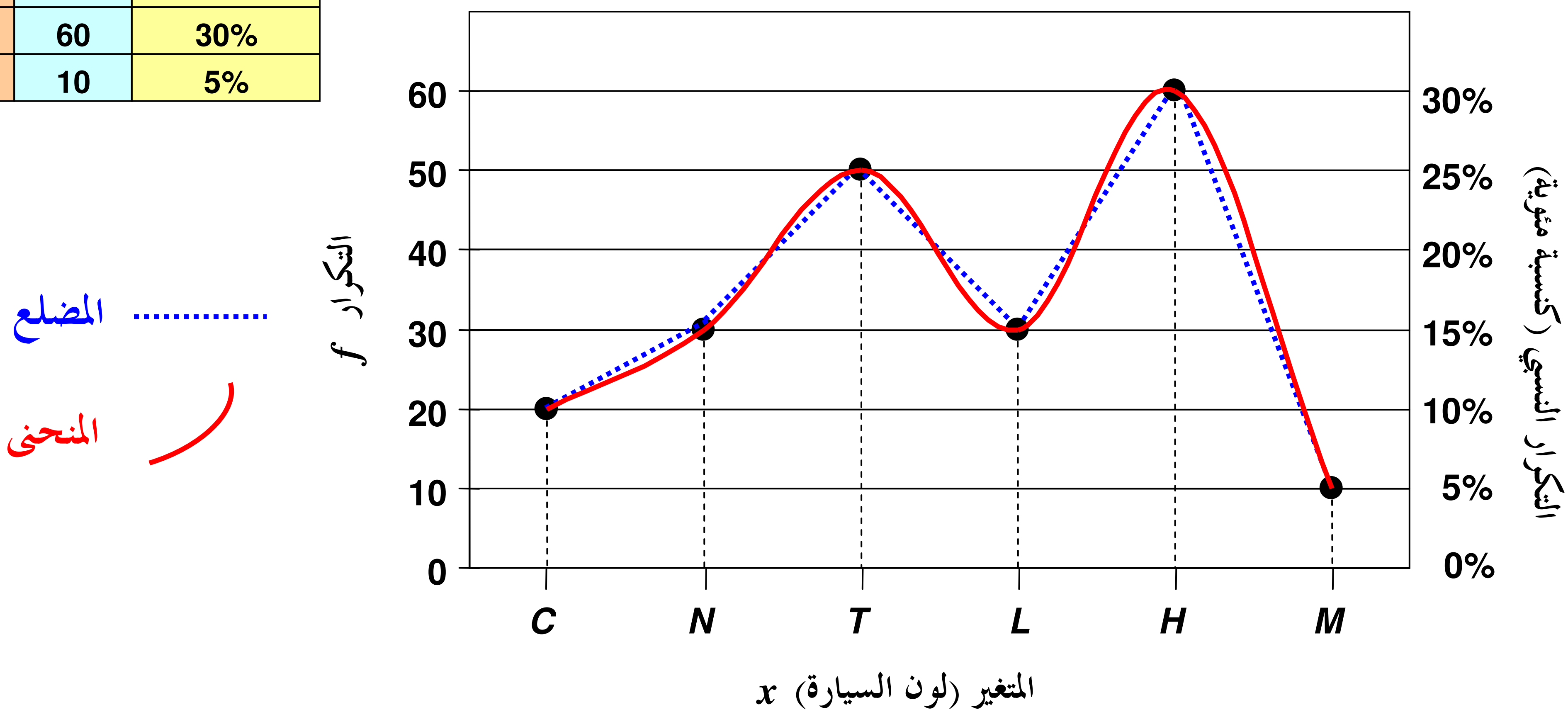
طريقة الأعمدة البسيطة

x	التكرار	التكرار النسبي
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%



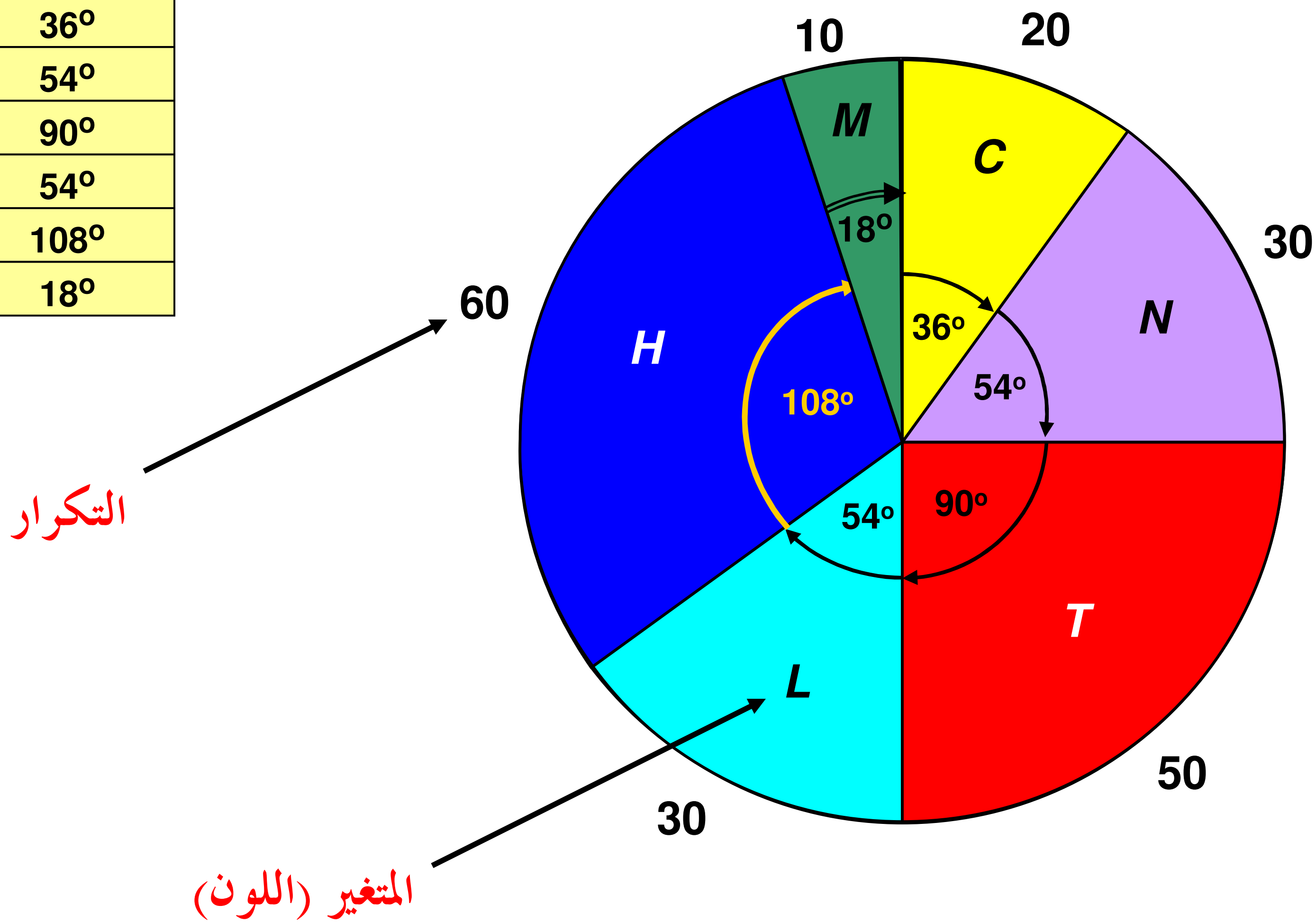
x	التكرار	التكرار النسبي
C	20	10%
N	30	15%
T	50	25%
L	30	15%
H	60	30%
M	10	5%

طريقة المضلع أو المنحنى التكراري (التكراري النسبي)



طريقة الدائرة

x	التكرار	الزاوية المركزية
C	20	36°
N	30	54°
T	50	90°
L	30	54°
H	60	108°
M	10	18°



س ٢ : المدى لمجموعة من البيانات المنفصلة هو :

○ أكثر القيم تكراراً في البيانات ○ أكبر قيمة في البيانات

○ أصغر قيمة في البيانات ● الفرق بين أكبر وأصغر قيمتين في البيانات

س ٣ : الجدول المرافق يبين درجات ٢٠ طالباً في أحد المقررات الدراسية :

الدرجة	92	93	94	95	96	97	98	99	100
التكرار	2	2	3	6	1	1	1	3	1

(أ) عدد الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هو :

○ 3 ○ 0.15 ○ 4 ● 7

(ب) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من 94 هو :

○ 3 ○ 0.15 ● 4 ○ 7

(ج) نسبة الطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

● 0.35 ○ 35% ○ 4 ○ 7

(د) النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على 94 فأقل هي :

○ 0.35 ● 35% ○ 4 ○ 7

هامش للإجابة

(٣-أ) $7 = 3 + 2 + 2$

(٣-ب) $4 = 2 + 2$

(٣-ج) $\frac{7}{20} = 0.35$

خذ بالك : المطلوب نسبة (وليس نسبة مئوية)

(٣-د) $0.35 \times 100 = 35\%$

أيوه .. ، ده بقى نسبة مئوية

س ٤ : الجدول المقابل يبين الجدول التكراري لأعمار عدد من الممرضات (لأقرب سنة) اللاتي تعملن في أحد أقسام إحدى المستشفيات ، من هذا الجدول أجب على الأسئلة التالية :

المتغير (العمر) x	التكرار (العدد) f	الزاوية المركزية
20	20	72^o
25	?	36^o
30	30	?
35	?	?
	$\sum f$	

(أ) عدد الممرضات ذات العمر 25 سنة هو :

○ 40 ○ 30 ○ 20 ● 10

(ب) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 30 سنة هي :

○ 144^o ● 108^o ○ 72^o ○ 36^o

(ج) الزاوية المركزية المناظرة للعمر 35 سنة هي :

● 144^o ○ 108^o ○ 72^o ○ 36^o

(د) عدد الممرضات الكلي [أي مجموع التكرارات $\sum f$] هو :

○ 110 ○ 105 ● 100 ○ 95

هامش للإجابة

(٤–أ) هناك تناسب بين التكرار والزاوية المركزية ، إذن :

20	72^o
?	36^o

$72 \times ? = 36 \times 20 \quad , \quad \therefore \quad ? = 10$

(٤–ب) بنفس الأسلوب السابق

20	72^o
30	?

$72 \times 30 = ? \times 20 \quad , \quad \therefore \quad ? = 108^o$

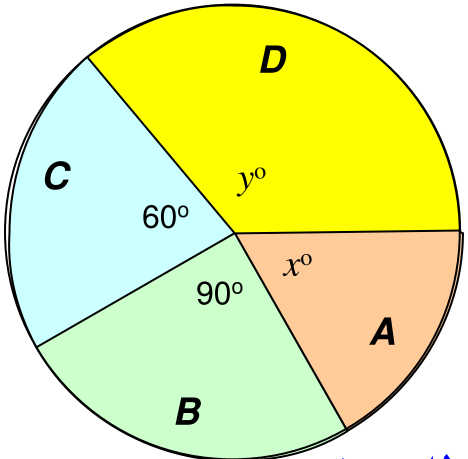
(٤–ج) مجموع الزوايا المركزية يجب أن يكون 360^o

$\therefore \quad 72 + 36 + 108 + ? = 360 \quad , \quad \therefore \quad ? = 144^o$

(٤–د) هناك أكثر من طريقة أميزها الأسلوب المتبع في الجزئين (أ) ، (ب) :

20	72^o
$\sum f$	360^o

$360 \times 20 = 72 \times \sum f \quad , \quad \therefore \quad \sum f = 100$



س ٥ : الشكل المقابل يبين مبيعات أربع شركات ***A , B , C , D*** (لبيع لعب الأطفال) وذلك خلال عيد الفطر المبارك ، فإذا كان عدد اللعب الكلي التي تم بيعها بواسطة هذه الشركات هو **5400** لعبة ، أجب على الأسئلة التالية :

(أ) النسبة المئوية لمبيعات الشركة ***B*** هي :

25% ●   30% ○   40% ○   60% ○

(ب) عدد اللعب التي باعتها الشركة ***B*** هو :

2700 ○   2250 ○   900 ○   1350 ●

(ج) عدد اللعب التي باعتها الشركتان ***A , D*** معاً هو :

900 ○   2250 ○   3150 ●   1350 ○

(د) وإذا كانت النسبة بين مبيعات الشركتين ***A , D*** هي **8 : 13** ، فإن قيمة x تكون :

150° ○   80° ○   90° ○   60° ○

إيه رأيك نخلي الجزء (د) واجب ، والحل هو ....

هامش للإجابة

(٥–أ)

100%	360°
?	90°

360 x ? = 90 x 100

? = 25%

(٥–ب)

$\frac{25}{100}$ x 5400 = 1350 → $\sum f$

(٥–ج)

الزاوية المركزية المناظرة لمبيعات الشركتين معاً تساوي

360 – (90 + 60) = 210°

5400	360°
?	210°

360 x ? = 210 x 5400

? = 3150

عرض البيانات المنفصلة لأكثر من ظاهرة

في بعض الأحيان نحتاج لدراسة ظاهرتين أو أكثر ، في هذه الحالة يمكن عرض البيانات بالطرق السابقة وطرق أخري كما يتضح من المثال التالي :

مثال توضيحي (٢-٣) : في دراسة قامت بها عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بُعد بجامعة الملك فيصل عن أعداد الطلاب والطالبات الذين تقدموا لاختبارات نهاية الفصل الدراسي الثاني للعام الجامعي 1431/1430 في تخصصات إدارة الأعمال والآداب والتربية الخاصة كانت البيانات كالتالي :

تخصص إدارة أعمال : 480 (طالبة) ، 1480 (طالب)

تخصص آداب : 2000 (طالبة) ، 3000 (طالب)

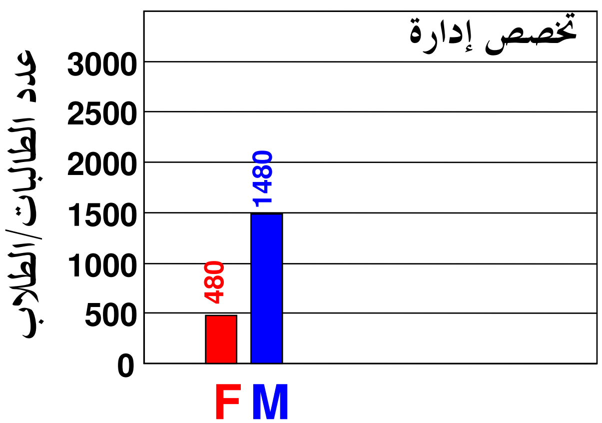
تخصص تربية خاصة : 2560 (طالبة) ، 2000 (طالب)

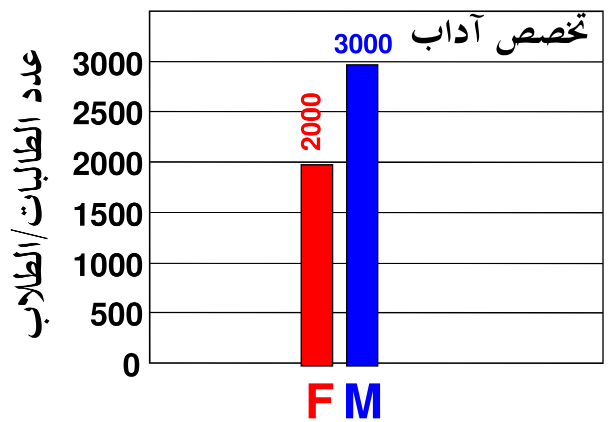
المطلوب عرض هذه البيانات بيانياً .

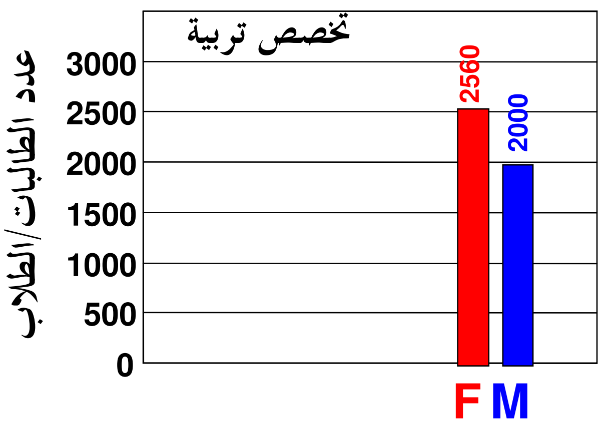
قبل أن نبدأ بعرض البيانات ، من المناسب أن نضع البيانات المرصودة في صورة جدول مناسب يسمح لنا بعرض هذه البيانات وأيضاً يسمح لنا بالمقارنات المختلفة .فإذا رمزنا للطالبات بالرمز **F** **(Female)** وللطلبة بالرمز **M** **(Male)** يمكننا تكوين الجدول التالي :

	طالبات F	طلاب M
إدارة أعمال	480	1480
آداب	2000	3000
تربية خاصة	2560	2000

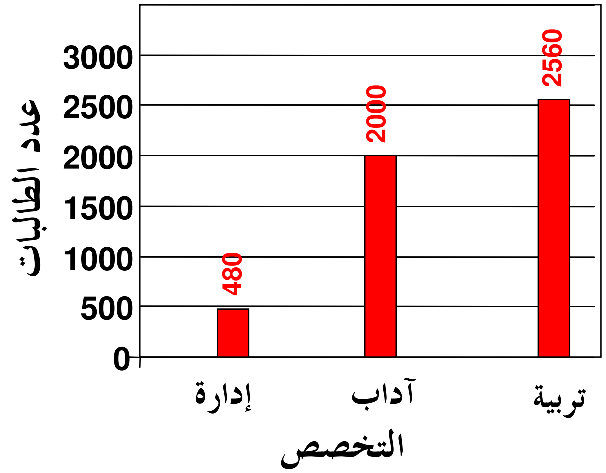
وبعد ذلك يمكن أن نقوم بعرض هذه البيانات بيانياً بطرق مختلفة منها أن نقوم بعرض أعداد الطالبات والطلاب لكل تخصص من التخصصات على حدى في ثلاثة رسومات منفصلة باستخدام طريقة الأعمدة البسيطة (مثلاً) كما هو مبين :



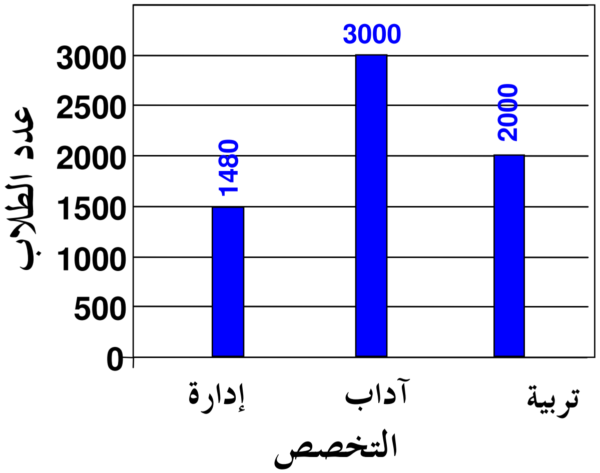




كما يمكننا أيضاً عرض بيانات الطالبات في كل التخصصات على رسمة ، وبيانات الطلاب على رسمة أخرى كما هو مبين بالشكل التالي :



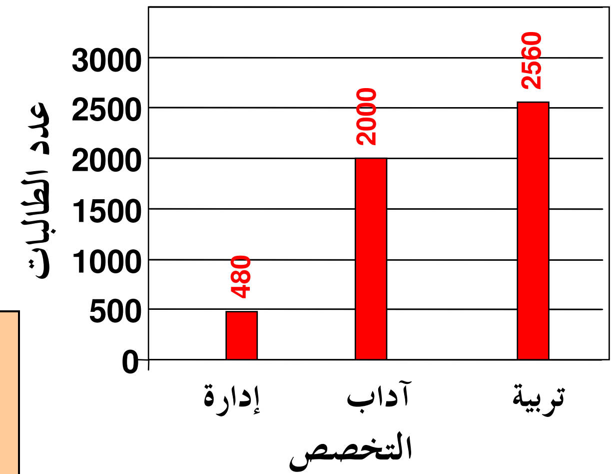
	طالبات F	طلاب M
إدارة أعمال	480	1480
آداب	2000	3000
تربية خاصة	2560	2000



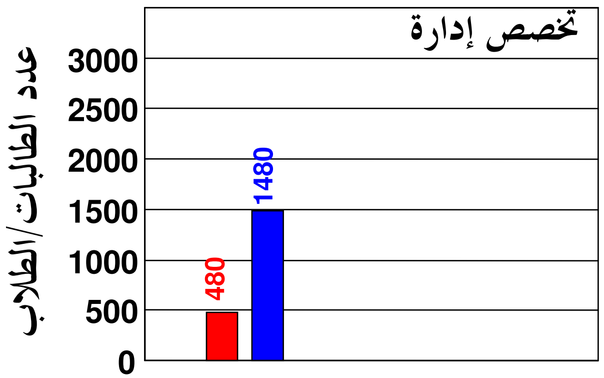
وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي

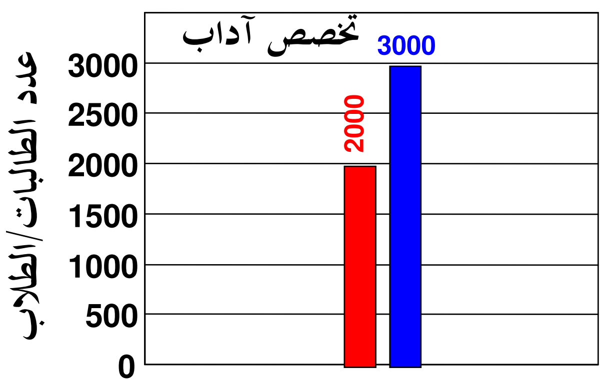
أليس من الممكن تجميع الرسومات السابقة في رسمة واحدة ؟

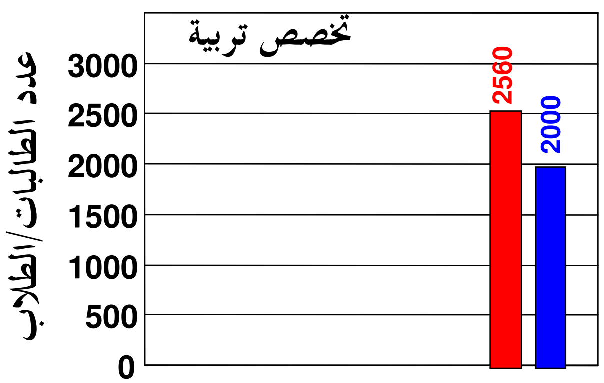
الإجابة : نعم ، وذلك عن طريق **الأعمدة المزدوجة** أو **الأعمدة المجزأة** كما هو مبين



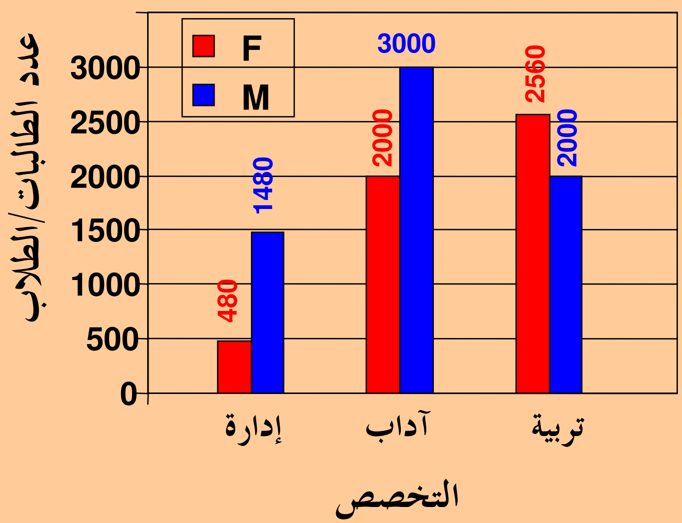
	M	F
إدارة أعمال	1480	480
آداب	3000	2000
تربية خاصة	2000	2560

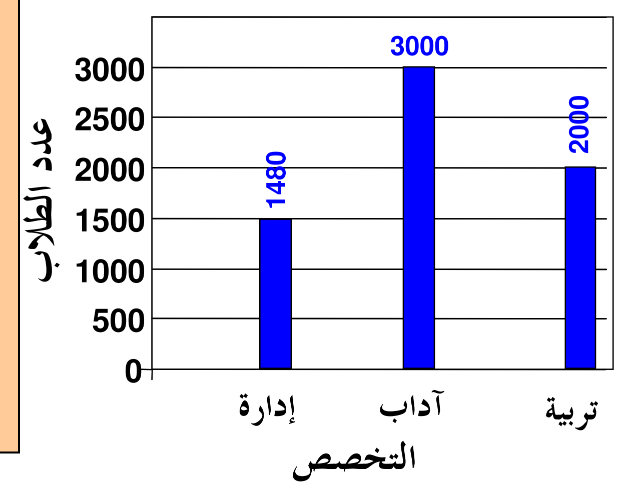






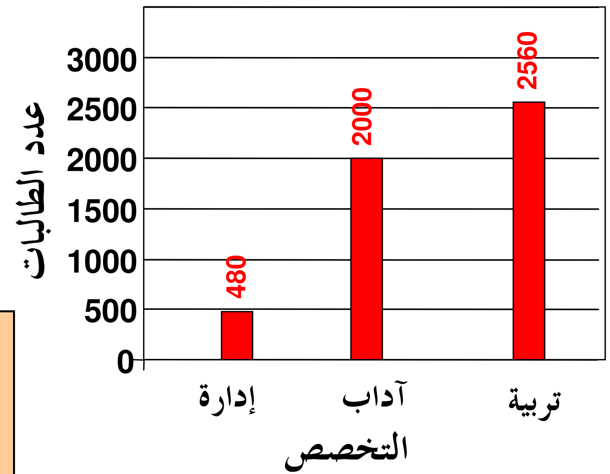
طريقة الأعمدة المزدوجة

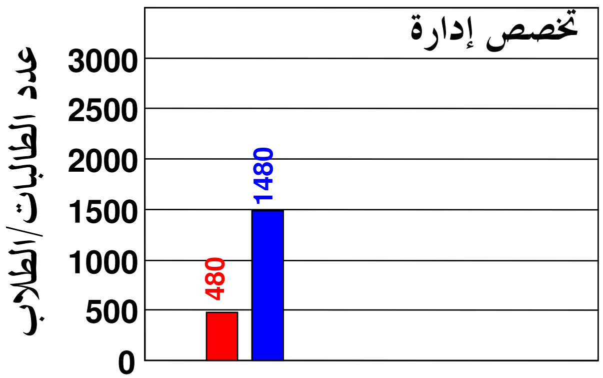


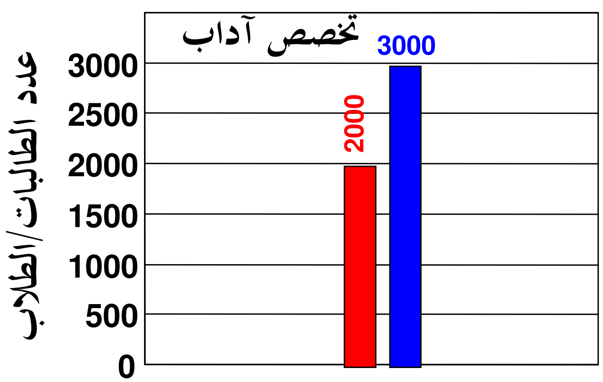


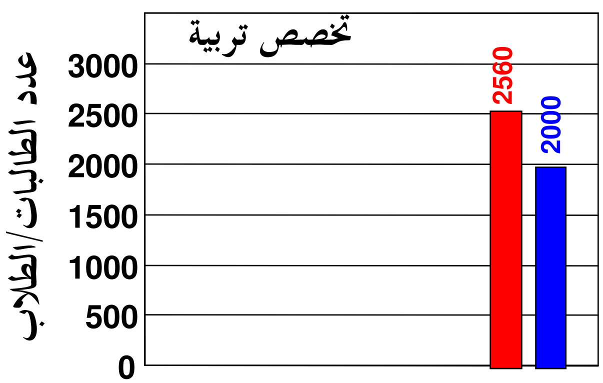
أي أن كل تخصص يُمثل بعمود مزدوج
مكون من عمودين بسيطين متلاصقين

	F	M	المجموع
إدارة أعمال	480	1480	1960
آداب	2000	3000	5000
تربية خاصة	2560	2000	4560

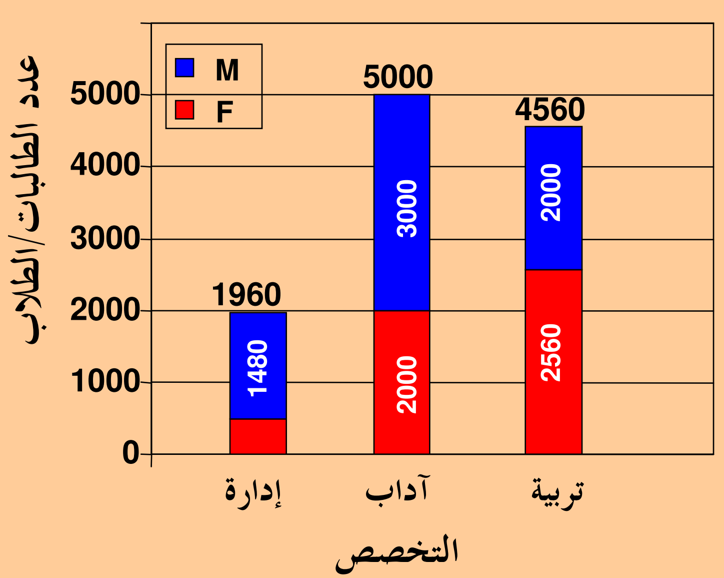


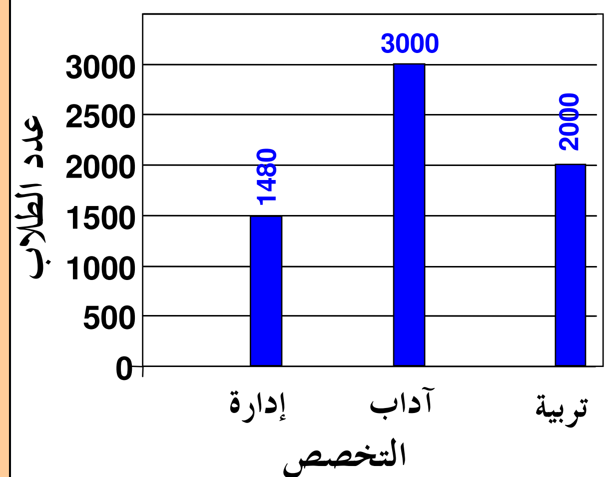






طريقة الأعمدة المجزأة

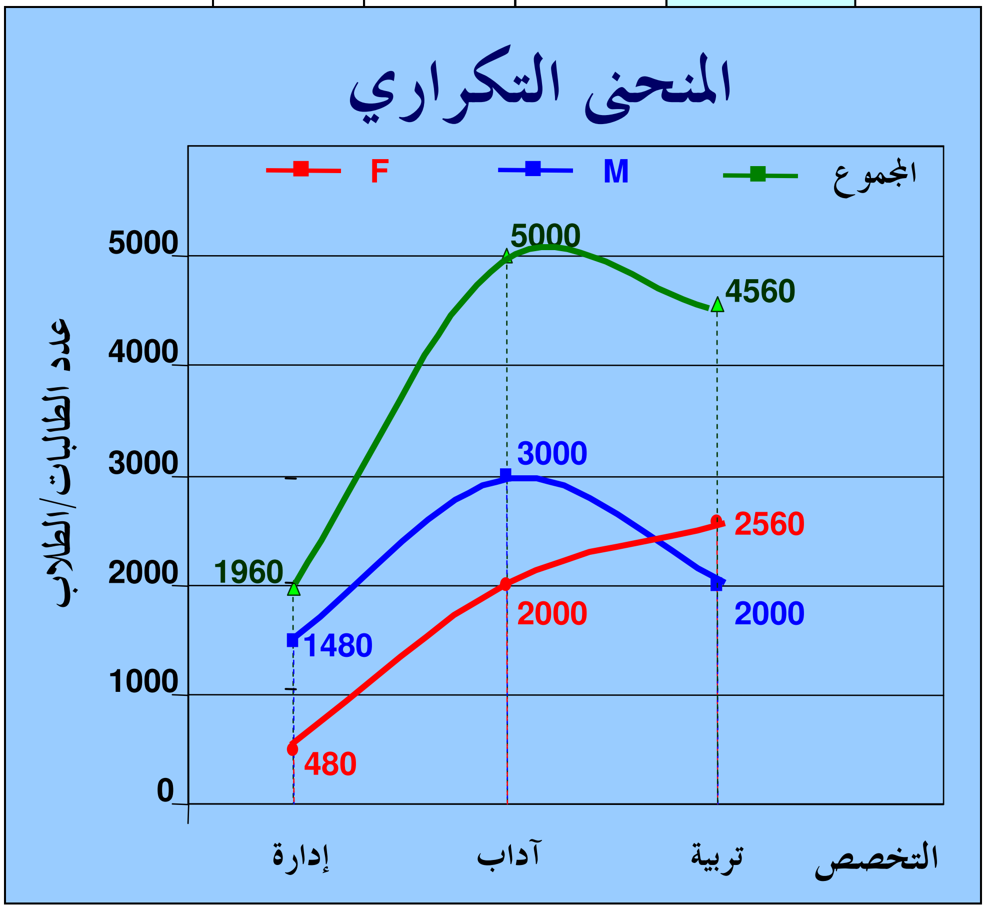


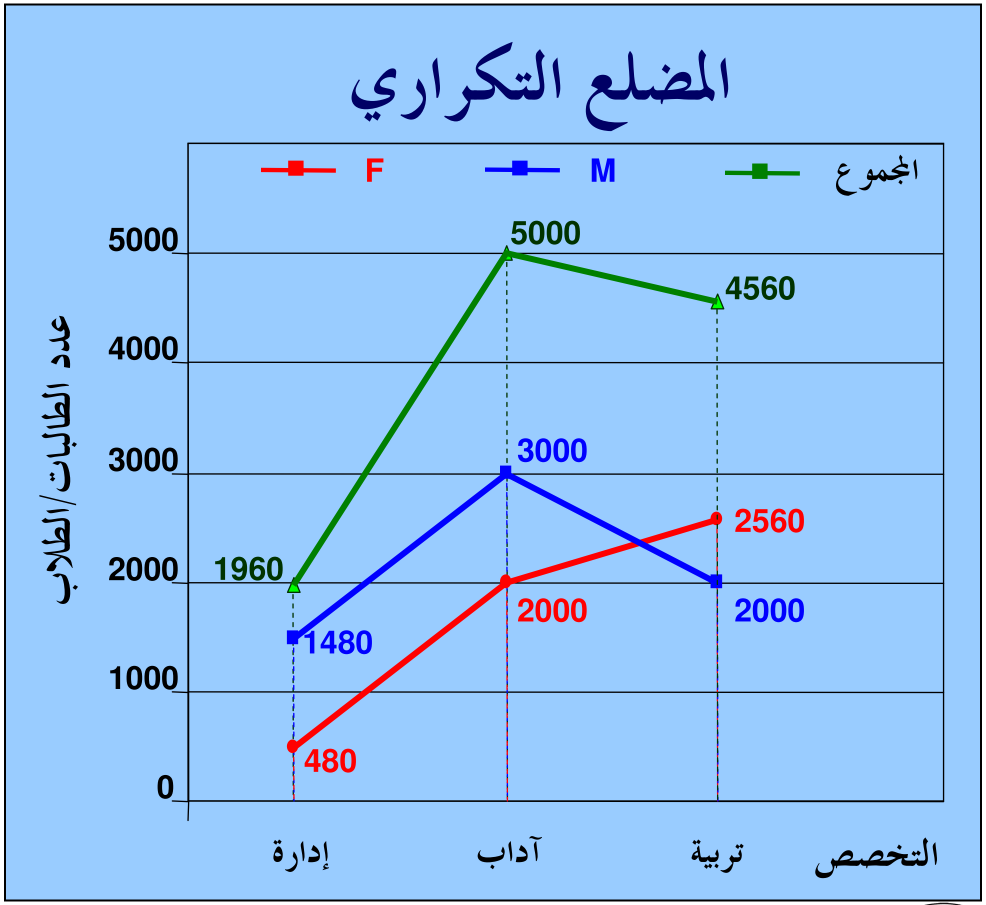


أي أن كلٍ تخصص يُمثل بعمود طوله يُعبر عن مجموع عدد طالباته وطلابه معا ثم يتم تجزئته إلى عمودين كل منهما يمثل فئة من الفئات

أيضاً نود التنويه أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة المضلع التكراري أو المنحنى التكراري كما هو مبين

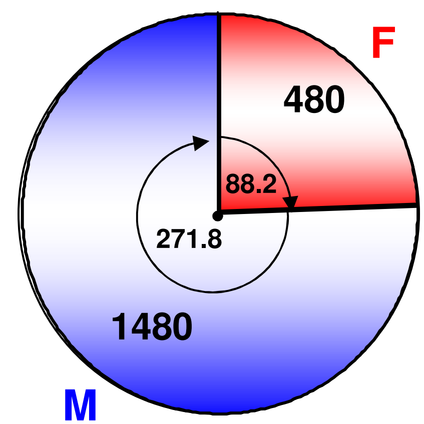
	F	M	المجموع
إدارة أعمال	480	1480	1960
آداب	2000	3000	5000
تربية خاصة	2560	2000	4560





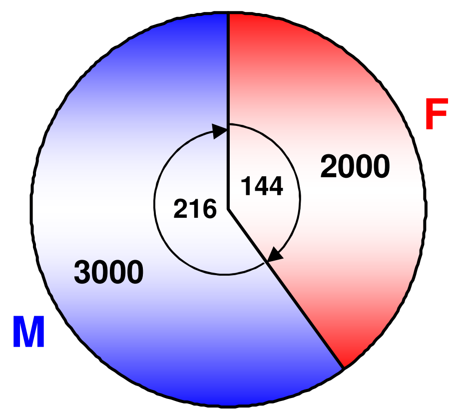
كما نود أن ننبه أيضاً إلى أنه يمكن تمثيل جميع البيانات بطريقة **الدائرة** ، وهنا يمكن أن نتعامل مع العرض بأكثر من طريقة [كما في حالة الأعمدة] . من هذه الطرق أن نقوم برسم دائرة لكل تخصص على حده كما هو موضح

تخصص إدارة	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	480	1480	1960
الزاوية المركزية	88.2º	271.8º	360º



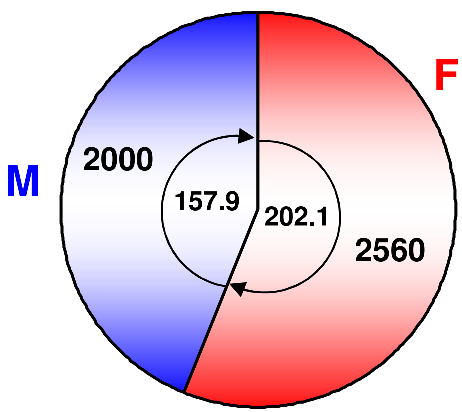
لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص إدارة أعمال

تخصص آداب	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2000	3000	5000
الزاوية المركزية	144º	216º	360º



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص آداب

تخصص تربية	F	M	المجموع
العدد (التكرار)	2560	2000	4560
الزاوية المركزية	202.1º	157.9º	360º

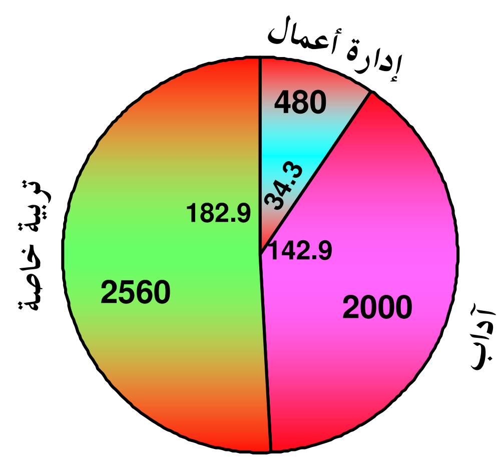


لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي لطلبة (طالبات + طلاب) تخصص تربية خاصة

أيضاً يمكن العرض باستخدام طريقة الدائرة وذلك برسم دائرتين : الأولى خاصة بطالبات جميع التخصصات والأخرى خاصة بطلاب جميع التخصصات كما هو موضح

الطالبات F	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	480	34.3°
تخصص آداب	2000	142.9°
تخصص تربية	2560	182.9°
المجموع	5040	≅ 360°

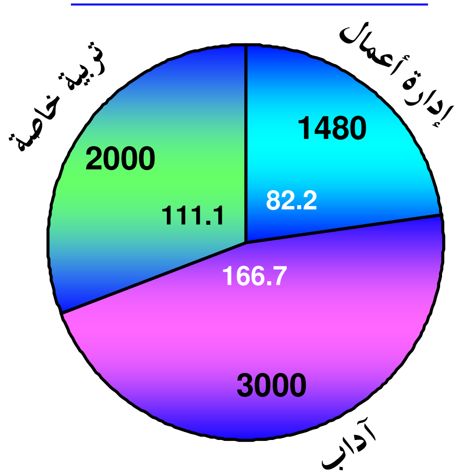
طالبات التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي **لطالبات جميع التخصصات**

الطلاب M	العدد (التكرار)	الزاوية المركزية
تخصص إدارة	1480	82.2°
تخصص آداب	3000	166.7°
تخصص تربية	2000	111.1°
المجموع	6480	360°

طلاب التخصصات المختلفة



لاحظ أن قيم الزوايا المركزية هنا مبني على أساس العدد الكلي **لطلاب جميع التخصصات**

وهنا يتبادر إلى الذهن السؤال التالي [وهو مشابه للسؤال الذي سألناه عند تعرضنا لطرق الأعمدة المزدوجة والمجزأة]

أليس من الممكن تجميع الرسومات السابقة في دائرة واحدة

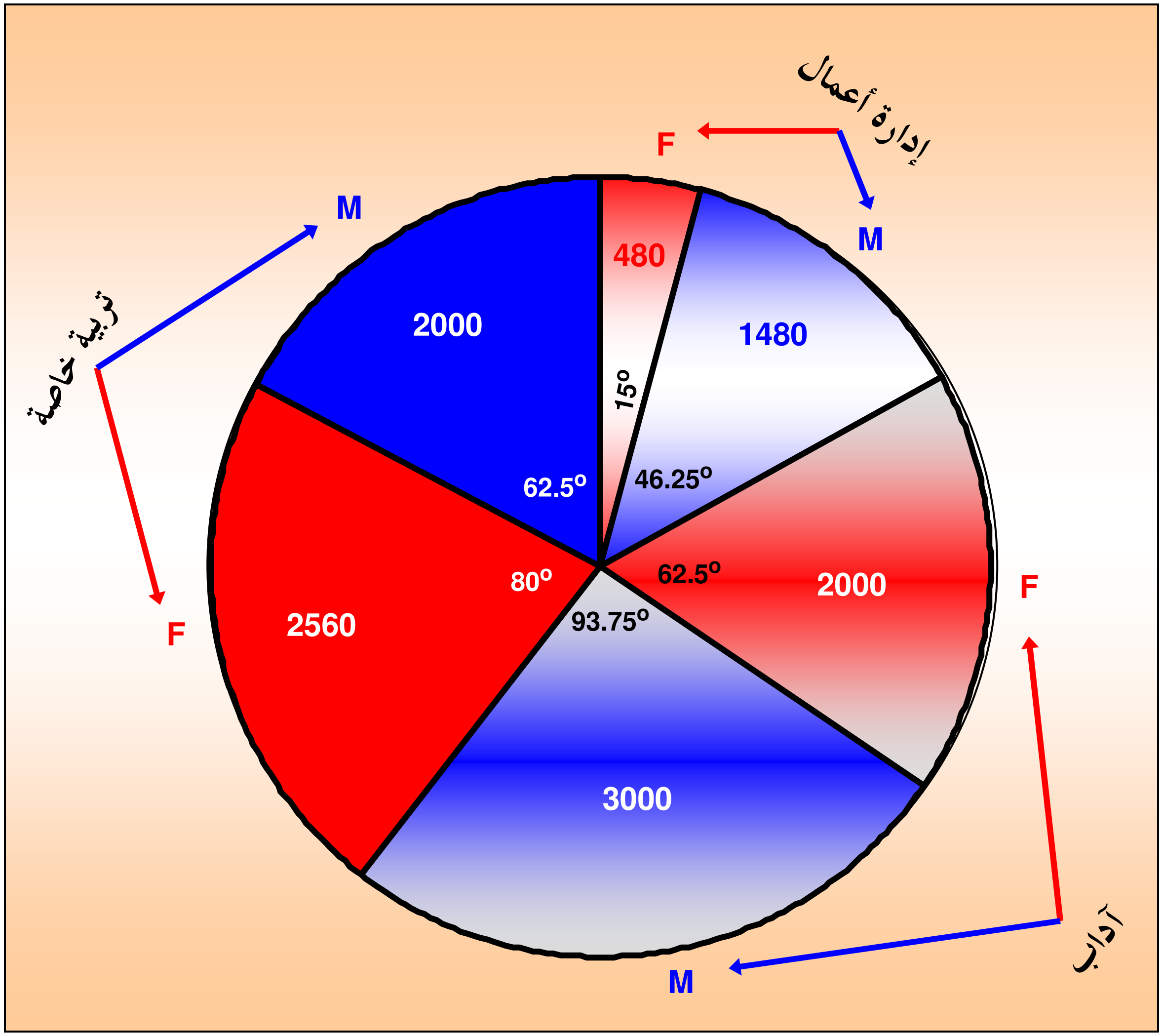
الإجابة نعم ، لكن لابد أن ننتبه إلى أن الزوايا المركزية هنا يجب أن تُحسب على أساس العدد الكلي للطلبة (طالبات + طلاب كل التخصصات) ، وبالتالي يجب تكوين الجدول المبين أولاً

	F	M	العدد الكلي في كل تخصص
إدارة أعمال	480 — 15°	1480 — 46.25°	1960 — 61.25°
آداب	2000 — 62.5°	3000 — 93.75°	5000 — 156.25°
تربية خاصة	2560 — 80°	2000 — 62.5°	4560 — 142.5°
العدد الكلي لكل جنس	5040 — 157.5°	6480 — 202.5°	11520 — 360°

العدد الموجود داخل ☐ يمثل عدد الطالبات أو الطلاب (أي التكرار) ، أما العدد الموجود داخل ○ فيمثل الزاوية المركزية المناظرة لهذا التكرار

المجموع الكلي للطلبة (طالبات + طلاب) المتقدمين للاختبار في نهاية الفصل الثاني 1430 / 1431

والآن نقوم بعرض البيانات بالطريقة التقليدية التي تعلمناها :



وننهي هذه المحاضرة بالسؤال التالي لأبنائي الطلاب والطالبات ومتروك إجابته لهم ، لكن قبل أن نسأل السؤال نود التنويه للملحوظة التالية :

ملحوظة : سنستخدم اللفظ "**طالبات**" للتدليل على الطلبة **الإناث** ، واللفظ "**طلاب**" للتدليل على الطلبة **الذكور** ، واللفظ "**طلبة**" للتدليل على الطالبات والطلاب معاً .

السؤال : بالاسترشاد بالجدول المبين في الصفحة السابقة ، ما هي النسبة المئوية لطلاب (ذكور) تخصص تربية بالنسبة :

(أ) لجميع الطلبة (طالبات + طلاب) في كل التخصصات

17.4% تقريباً

(ب) لجميع الطلاب (ذكور فقط) في كل التخصصات

30.9% تقريباً

(ج) لطلبة (طالبات + طلاب) تخصصهم

43.9% تقريباً

المحاضرة الرابعة

[تابع] الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

عرض البيانات الكمية المتصلة

(١) تمهيد

(٢) العرض بطريقة الجداول

- الجداول التكرارية (أو التكرارية النسبية)
- الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة)

(٣) العرض البياني للبيانات المتصلة

تمهيد

كما ذكرنا سابقاً ، فإن البيانات **المتصلة** هي تلك البيانات التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) أية قيمة بين قيمتين محددتين [مثل الأطوال ، الأوزان ، درجات الحرارة ، الدخل الشهري أو السنوي ، وغيرها] .
ويمكن عرض هذه البيانات أيضاً عن طريق الجداول أو بيانياً . ولتوضيح ذلك دعنا ننظر للمثال التوضيحي التالي :

مثال توضيحي (٢-٤) : في تجربة على أطوال سيقان زهور معينة في أحد المعامل البحثية بكلية الزراعة بجامعة الملك فيصل، قيست سيقان 50 زهرة فكانت البيانات كالتالي :

x	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 35$	$35 \le x < 40$	$40 \le x < 50$	$50 \le x < 60$
f	4	16	12	10	6	2

حيث x هو طول الساق (بوحدات السنتيمتر) ، f هو عدد الأزهار .
المطلوب عرض هذه البيانات بطرق مختلفة .

قبل أن نبدأ في عرض البيانات لابد من التذكير والتنويه للتالي :

١. البيانات هنا بيانات كمية متصلة فيها المتغير x (طول الزهرة) متغير كمي متصل .

٢. عدد الأزهار f هو تكرار المتغير x [وهذا واضح] .

٣. قيم المتغير x هنا معطاة على صورة ٦ فترات أو ما يُسمى بـــ **الفئات** حيث :

- الفئة الأولى : $0 \le x < 20$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 0 إلى ما قبل 20
- الفئة الثانية : $20 \le x < 30$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 20 إلى ما قبل 30
- الفئة الثالثة : $30 \le x < 35$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 30 إلى ما قبل 35
- الفئة الرابعة : $35 \le x < 40$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 35 إلى ما قبل 40
- الفئة الخامسة : $40 \le x < 50$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 40 إلى ما قبل 50
- الفئة السادسة : $50 \le x < 60$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 50 إلى ما قبل 60

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

تحذير : انتبه للفرق بين المتباينات ، وطريقة قراءتها وأيضاً معناها

	$x < 10$	$x \le 10$	$x > 10$	$x \ge 10$
المتباينة	$x < 10$	$x \le 10$	$x > 10$	$x \ge 10$
طريقة القراءة	x أقل من 10	x أقل من أو تساوي 10	x أكبر من 10	x أكبر من أو تساوي 10
معناها	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأكبر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأكبر من 10

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

٤. لكل فئة حدان : حد أدنى ، وحد أعلى

- فالفئة الأولى : حدها الأدنى 0 وحدها الأعلى 20 [وهو الحد الأدنى للفئة الثانية]
- والفئة الثانية : حدها الأدنى 20 [الحد الأعلى للفئة الأولى] وحدها الأعلى 30 [وهو الحد الأدنى للفئة الثالثة]
- والفئة الثالثة : حدها الأدنى 30 [الحد الأعلى للفئة الثانية] وحدها الأعلى 35 [وهو الحد الأدنى للفئة الرابعة]

وهكذا .

أي أن الفئات متصلة ولا فراغات بينها ، والحد الأدنى لكل فئة من الفئات الوسطى [غير الأولى والأخيرة] هو الحد الأعلى للفئة السابقة ، والحد الأعلى لها هو الحد الأدنى للفئة التالية لها .

الفئة	المتغير x (الطول)	
الأولى	0 -	من 0 إلى ما قبل 20
الثانية	20 -	من 20 إلى ما قبل 30
الثالثة	30 -	من 30 إلى ما قبل 35
الرابعة	35 -	من 35 إلى ما قبل 40
الخامسة	40 -	من 40 إلى ما قبل 50
السادسة	50 - 60	من 50 إلى ما قبل 60

وعليه ، يمكن كتابة الفئات كما هو مبين

٥. لكل فئة طول وهو يساوي الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى

- فالفئة الأولى طولها يساوي 20 والثانية طولها يساوي 10 والثالثة طولها يساوي 5 والرابعة طولها يساوي 5 والخامسة طولها يساوي 10 ، أما السادسة (والأخيرة) فطولها يساوي 10 . أي أن الفئات [في هذا المثال] ليست متساوية في الطول

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة c
الأولى	$0 \le x < 20$	20 – 0 = 20
الثانية	$20 \le x < 30$	30 – 20 = 10
الثالثة	$30 \le x < 35$	35 – 30 = 5
الرابعة	$35 \le x < 40$	40 – 35 = 5
الخامسة	$40 \le x < 50$	50 – 40 = 10
السادسة	$50 \le x < 60$	60 – 50 = 10

---

٦. لكل فئة مركز [وسنرمز له بالرمز x_0] وهي قيمة المتغير x الواقعة في منتصف تلك الفئة ، وتُحسب ببساطة على أنها متوسط حديها الأدنى والأعلى ، أي أن :

$$\text{مركز أي فئة} = \frac{\text{حد الفئة الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{2}$$

ومن ثم يكون مركز الفئة الأولى 10 ، والثانية 25 والثالثة 32.5 ، والرابعة 37.5 والخامسة 45 ، ومركز الفئة الأخيرة (السادسة) 55

الفئة	المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0
الأولى	$0 \le x < 20$	(0 + 20) ÷ 2 = 10
الثانية	$20 \le x < 30$	(20 + 30) ÷ 2 = 25
الثالثة	$30 \le x < 35$	(30 + 35) ÷ 2 = 32.5
الرابعة	$35 \le x < 40$	(35 + 40) ÷ 2 = 37.5
الخامسة	$40 \le x < 50$	(40 + 50) ÷ 2 = 45
السادسة	$50 \le x < 60$	(50 + 60) ÷ 2 = 55

ويمكن تجميع كل ما تقدم في جدول واحد كالتالي

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0
الأولى	$0 \le x < 20$	$20 - 0 = 20$	$(0 + 20) \div 2 = 10$
الثانية	$20 \le x < 30$	$30 - 20 = 10$	$(20 + 30) \div 2 = 25$
الثالثة	$30 \le x < 35$	$35 - 30 = 5$	$(30 + 35) \div 2 = 32.5$
الرابعة	$35 \le x < 40$	$40 - 35 = 5$	$(35 + 40) \div 2 = 37.5$
الخامسة	$40 \le x < 50$	$50 - 40 = 10$	$(40 + 50) \div 2 = 45$
السادسة	$50 \le x < 60$	$60 - 50 = 10$	$(50 + 60) \div 2 = 55$

وبعد هذا التمهيد الضروري ، نعود إلى مثالنا ، حيث يمكن عرض البيانات (الكمية المتصلة) إما عن طريق جداول (تكرارية أو تكرارية نسبية) أو بيانياً كما في حالة البيانات المنفصلة التي سبق وتعرضنا لها من قبل

١. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) :

يُعتبر الجدول الأخير [بعد إضافة عمود التكرار أو عمود التكرار النسبي له] إحدى طرق عرض البيانات وبالتالي يمكننا الحصول على الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) للبيانات

المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	التكرار (العدد) f	التكرار النسبي $\bar{f}$
$0 \le x < 20$	20	10	4	$4 \div 50 = 0.08$ or 8%
$20 \le x < 30$	10	25	16	$16 \div 50 = 0.32$ or 32%
$30 \le x < 35$	5	32.5	12	$12 \div 50 = 0.24$ or 24%
$35 \le x < 40$	5	37.5	10	$10 \div 50 = 0.20$ or 20%
$40 \le x < 50$	10	45	6	$6 \div 50 = 0.12$ or 12%
$50 \le x < 60$	10	55	2	$2 \div 50 = 0.04$ or 4%
			$\sum f = 50$	$\sum \bar{f} = 1$ or 100%

يمكن الاستغناء عنهما هنا

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

٢. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع :

وفي حالة البيانات المتصلة قد يكون من المفيد تكوين ما يُسمى **بالتوزيع التكراري المتجمع الصاعد** الذي يُعطي **مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأدنى** لكل فئة من الفئات

من الصفحة السابقة

الجدول التكراري	
المتغير x (الطول)	التكرار f
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

	الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد		
	المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
أقل من 0	$x < 0$	0	$0 \div 50 = 0$ $[0\%]$
أقل من 20	$x < 20$	$0 + 4 = 4$	$4 \div 50 = 0.08$ $[8\%]$
أقل من 30	$x < 30$	$4 + 16 = 20$	$20 \div 50 = 0.40$ $[40\%]$
أقل من 35	$x < 35$	$20 + 12 = 32$	$32 \div 50 = 0.64$ $[64\%]$
أقل من 40	$x < 40$	$32 + 10 = 42$	$42 \div 50 = 0.84$ $[84\%]$
أقل من 50	$x < 50$	$42 + 6 = 48$	$48 \div 50 = 0.96$ $[96\%]$
أقل من 60	$x < 60$	$48 + 2 = 50$	$50 \div 50 = 1$ $[100\%]$

$\sum f$ $\qquad$ $\sum \bar{f}$

0

$\sum f$

ذيل السهم يدل على البداية
واتجاهه يدل على التجميع
التتالي للتكرارات

وفي أحيان أخرى قد يكون من المرغوب فيه الحصول على **التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى لكل فئة** . عندئذٍ يُسمى التوزيع **بالتوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط (أو النازل)** .

من الصفحة السابقة

الجدول التكراري	
المتغير x (الطول)	التكرار f
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

$\sum f$ $\sum \bar{f}$ $\sum f$

الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط

	المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
0 أو أكثر	$x \ge 0$	$46 + 4 = 50$	$50 \div 50 = 1$ [100%]
20 أو أكثر	$x \ge 20$	$30 + 16 = 46$	$46 \div 50 = 0.92$ [92%]
30 أو أكثر	$x \ge 30$	$18 + 12 = 30$	$30 \div 50 = 0.60$ [60%]
35 أو أكثر	$x \ge 35$	$8 + 10 = 18$	$18 \div 50 = 0.36$ [36%]
40 أو أكثر	$x \ge 40$	$2 + 6 = 8$	$8 \div 50 = 0.16$ [16%]
50 أو أكثر	$x \ge 50$	$0 + 2 = 2$	$2 \div 50 = 0.04$ [4%]
60 أو أكثر	$x \ge 60$	0	$0 \div 50 = 0$ [0%]

0

ذيل السهم يدل على البداية واتجاهه يدل على التجميع التنازلي للتكرارات

الجدول التكراري	
المتغير x	التكرار
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

هل لاحظت الفارق بين التوزيعين
المتجمع الصاعد
والمتجمع الهابط

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد	
المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع
أقل من 0	0
أقل من 20	$0 + 4 = 4$
أقل من 30	$4 + 16 = 20$
أقل من 35	$20 + 12 = 32$
أقل من 40	$32 + 10 = 42$
أقل من 50	$42 + 6 = 48$
أقل من 60	$48 + 2 = 50$

الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

0 $\rightarrow \sum f$

$\sum f$

التوزيع التكراري المتجمع الهابط	
المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع
0 أو أكثر	$46 + 4 = 50$
20 أو أكثر	$30 + 16 = 46$
30 أو أكثر	$18 + 12 = 30$
35 أو أكثر	$8 + 10 = 18$
40 أو أكثر	$2 + 6 = 8$
50 أو أكثر	$0 + 2 = 2$
60 أو أكثر	0

$\sum f$

الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

$\sum f \leftarrow$ 0

عرض البيانات الكمية المتصلة بيانياً

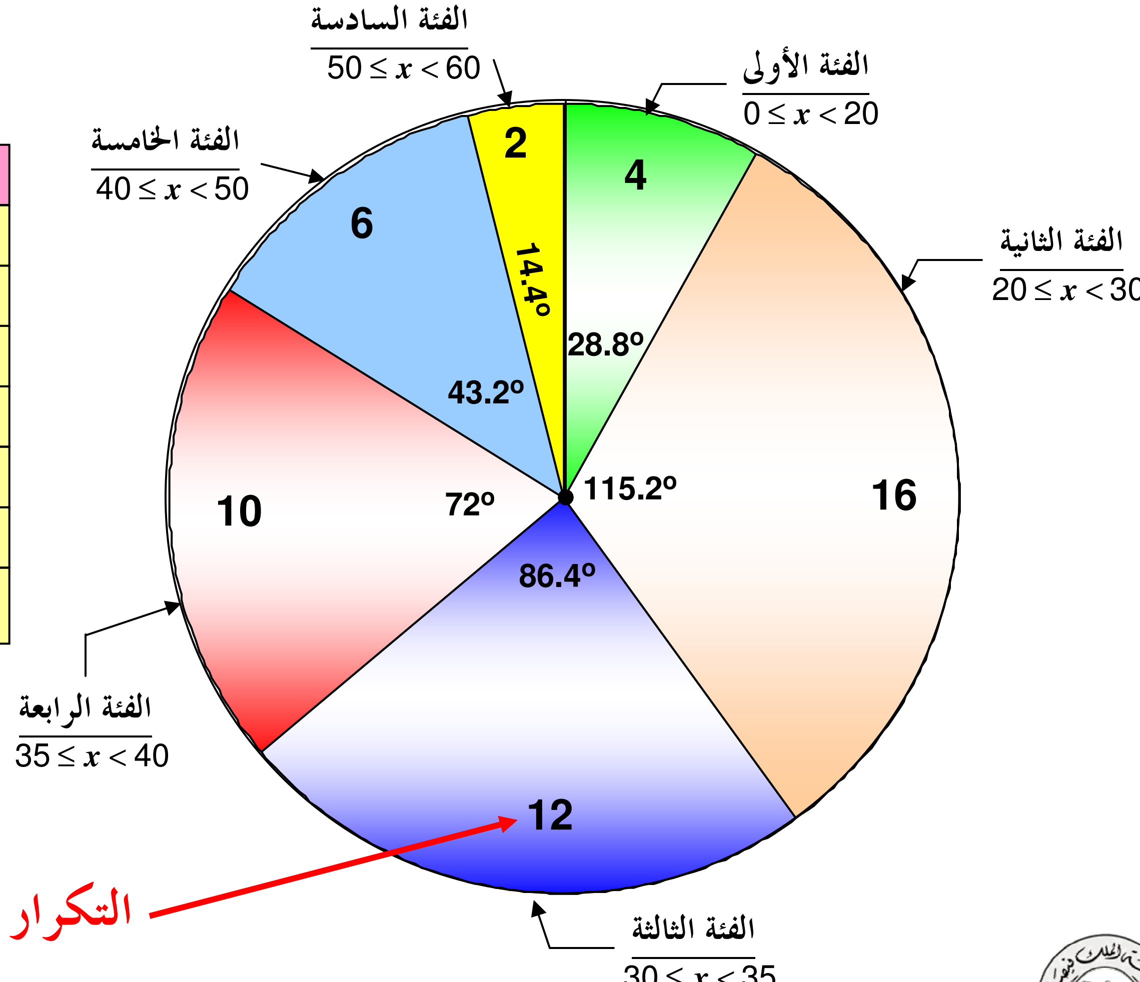
يمكن عرض البيانات المتصلة بطرق مختلفة وكل طريقة لها مزاياها ويمكن أن ترد على بعض الأسئلة بأسلوب أسرع من نظيرتها ، لذا سنستعرض بعضاً من هذه الطرق . وكما ذكرنا سابقاً (عند تعاملنا مع البيانات المنفصلة) أنه من أساسيات عرض أي بيانات بيانياً هو **وضوح** **وبساطة** طريقة العرض ولا مانع من أن تكون أيضاً **جاذبة** . ولعرض للبيانات المعطاة في المثال التوضيحي (٢-٤) السابق يجب القيام أولاً بتنظيم البيانات [إن كانت على صورة بيانات خام] ووضعها في صورة جدول تكراري أو جدول تكراري نسبي [كما سبق] ثم نقوم بعرضها بيانياً بطرق مختلفة منها :

- **الدائرة :** وهي مشابهة تماماً لطريقة الدائرة في عرض البيانات المنفصلة ، لذا سنبدأ بها .
- **المدرج التكراري :** وهي تناظر طريقة الأعمدة البسيطة في حالة البيانات المنفصلة .
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري :** وهي تناظر طريقة المضلع (أو المنحنى) التكراري للبيانات المنفصلة .
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد (أو الهابط) :**

وهي طريقة ذات أهمية كبيرة في حالة البيانات الكمية المتصلة

تُمثل كل **فئة** بقطاع دائري طبقاً للزاوية المركزية لهذه الفئة . إذن **لابد** من تحديد الزوايا المركزية أولاً ثم تمثيل البيانات بنفس الطريقة التي اتبعناها مع البيانات المنفصلة .

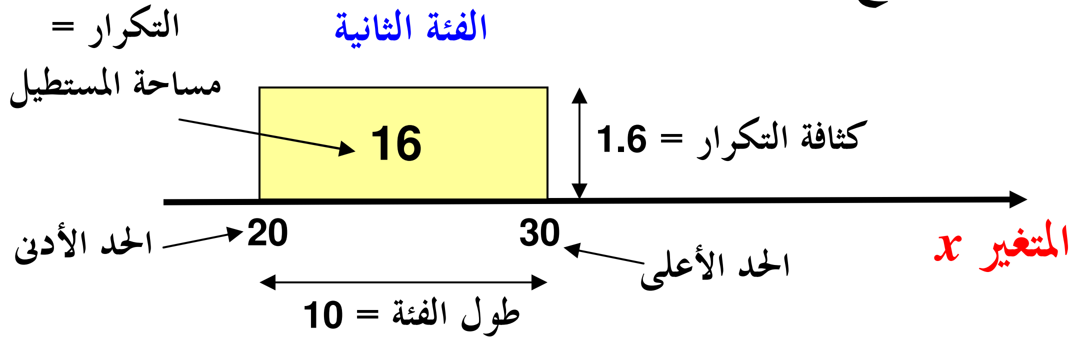
الجدول التكراري		
المتغير x	التكرار f	الزاوية المركزية
$0 \le x < 20$	4	$(4 \div 50) \times 360 = 28.8^o$
$20 \le x < 30$	16	$(16 \div 50) \times 360 = 115.2^o$
$30 \le x < 35$	12	$(12 \div 50) \times 360 = 86.4^o$
$35 \le x < 40$	10	$(10 \div 50) \times 360 = 72^o$
$40 \le x < 50$	6	$(6 \div 50) \times 360 = 43.2^o$
$50 \le x < 60$	2	$(2 \div 50) \times 360 = 14.4^o$
	$\sum f = 50$	مجموع الزوايا = 360^o



طريقة المدرج التكراري لتمثيل البيانات الكمية المتصلة

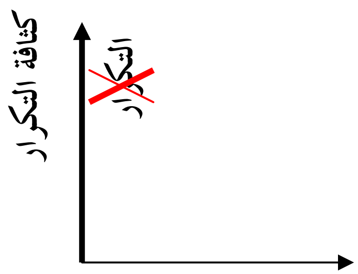
هو أسلوب مشابه لطريقة الأعمدة البسيطة [للبيانات المنفصلة] مع الاختلافات التالية :

١. تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته تقع على المحور الأفقي [الذي يمثل المتغير x] وعرضه يساوي طول الفئة ومساحته تساوي تكرار الفئة .

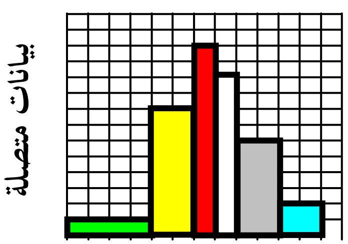


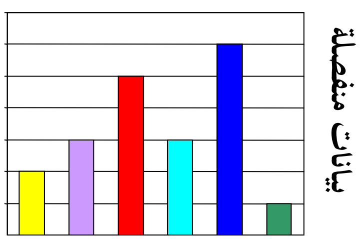
وحيث أن مساحة أي مستطيل تساوي عرض المستطيل مضروباً في ارتفاعه ، فإن ارتفاع أي مستطيل يكون مساوياً لــ "تكرار الفئة مقسوماً على طول الفئة" . سنسمي خارج القسمة هذا بــ "كثافة التكرار" .

٢. المحور الرأسي هنا يمثل كثافة التكرار [وليس التكرار كما في حالة الأعمدة البسيطة] .



٣. لا فراغات موجودة بين المستطيلات [حيث أن البيانات هنا بيانات متصلة] بخلاف طريقة الأعمدة في حالة البيانات المنفصلة حيث يجب ألا تكون الأعمدة متلاصقة .





الجدول التكراري

المتغير x (الطول)	الفئة
$0 \le x < 20$	الأولى
$20 \le x < 30$	الثانية
$30 \le x < 35$	الثالثة
$35 \le x < 40$	الرابعة
$40 \le x < 50$	الخامسة
$50 \le x < 60$	السادسة

وبالتالي لرسم المدرج التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها

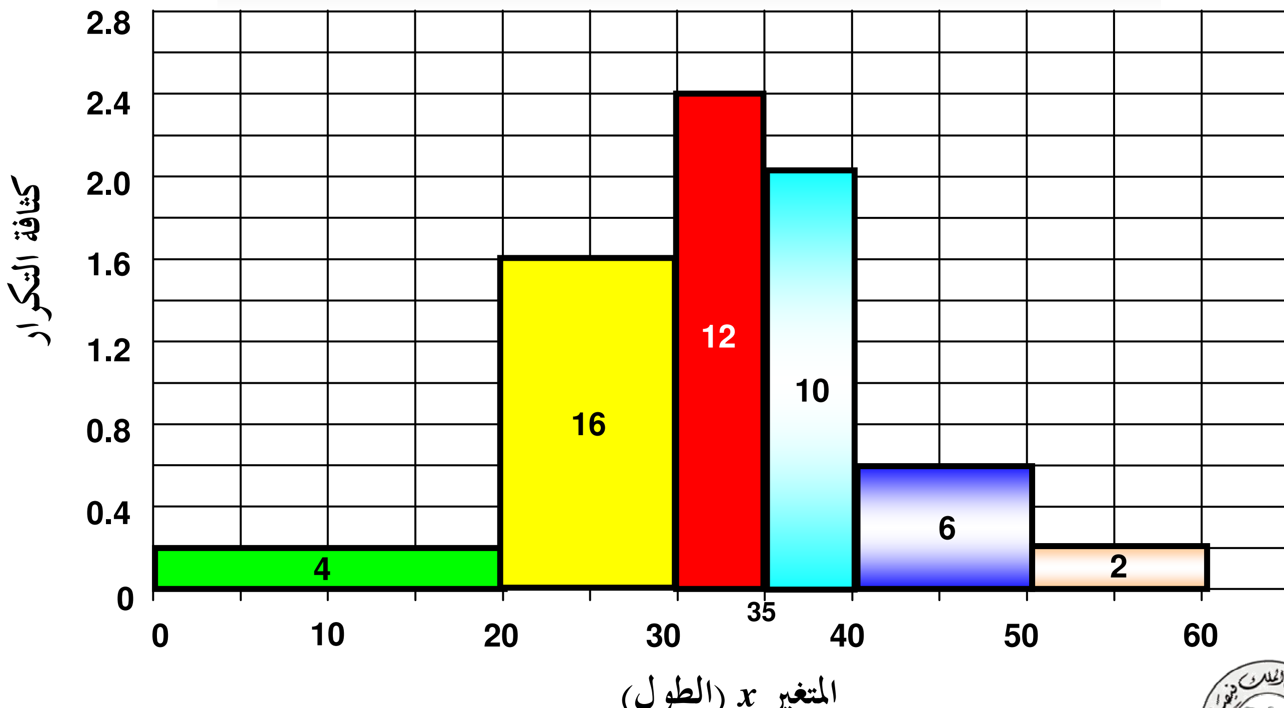
إضافة للجدول

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	كثافة التكرار $f \div c$
$0 \le x < 20$	4	20	$4 \div 20 = 0.2$
$20 \le x < 30$	16	10	$16 \div 10 = 1.6$
$30 \le x < 35$	12	5	$12 \div 5 = 2.4$
$35 \le x < 40$	10	5	$10 \div 5 = 2$
$40 \le x < 50$	6	10	$6 \div 10 = 0.6$
$50 \le x < 60$	2	10	$2 \div 10 = 0.2$

والآن يمكن رسم المدرج التكراري بأخذ محورين متعامدين : الأفقي ويمثل المتغير x [وهنا مقياس الرسم له أو تدريجه مهم] والرأسي يمثل كثافة التكرار ونقوم بتمثيل كل فئة بمستطيل قاعدته على المحور الأفقي (وطولها = طول الفئة) وارتفاعه يمثل كثافة تكرار الفئة (وبالتالي مساحته تساوي تكرار الفئة) .

المتغير x	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	1.6
$30 \le x < 35$	12	5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	2
$40 \le x < 50$	6	10	0.6
$50 \le x < 60$	2	10	0.2

المدرج التكراري للمثال التوضيحي (٢-٤)



تذكر وتذكري الآتي :

١. مساحة كل مستطيل هي تكرار الفئة ، وبالتالي فإن مجموع مساحات المستطيلات في المدرج التكراري هي التكرار الكلي [50 هنا]

٢. ارتفاع كل مستطيل هو كثافة التكرار وليس التكرار أو التكرار النسبي .

٣. طول قاعدة أي مستطيل هي طول الفئة

٤. المستطيلات متلاصقة وليس بينها فراغات

المضلع (المنحنى) التكراري للبيانات الكمية المتصلة

وهو أسلوب مشابه لطريقة المضلع التكراري للبيانات المنفصلة ، إلا أن كل فئة تُمثل بنقطة : إحداثيها الأفقي هو **مركز الفئة** ، وإحداثيها الرأسي هو **كثافة تكرارها** .

وبالتالي لرسم المضلع التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها [كما في حالة المدرج التكراري] إلى جانب عمود يبين مركز الفئة .

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	25	1.6
$30 \le x < 35$	12	5	32.5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	37.5	2
$40 \le x < 50$	6	10	45	0.6
$50 \le x < 60$	2	10	55	0.2

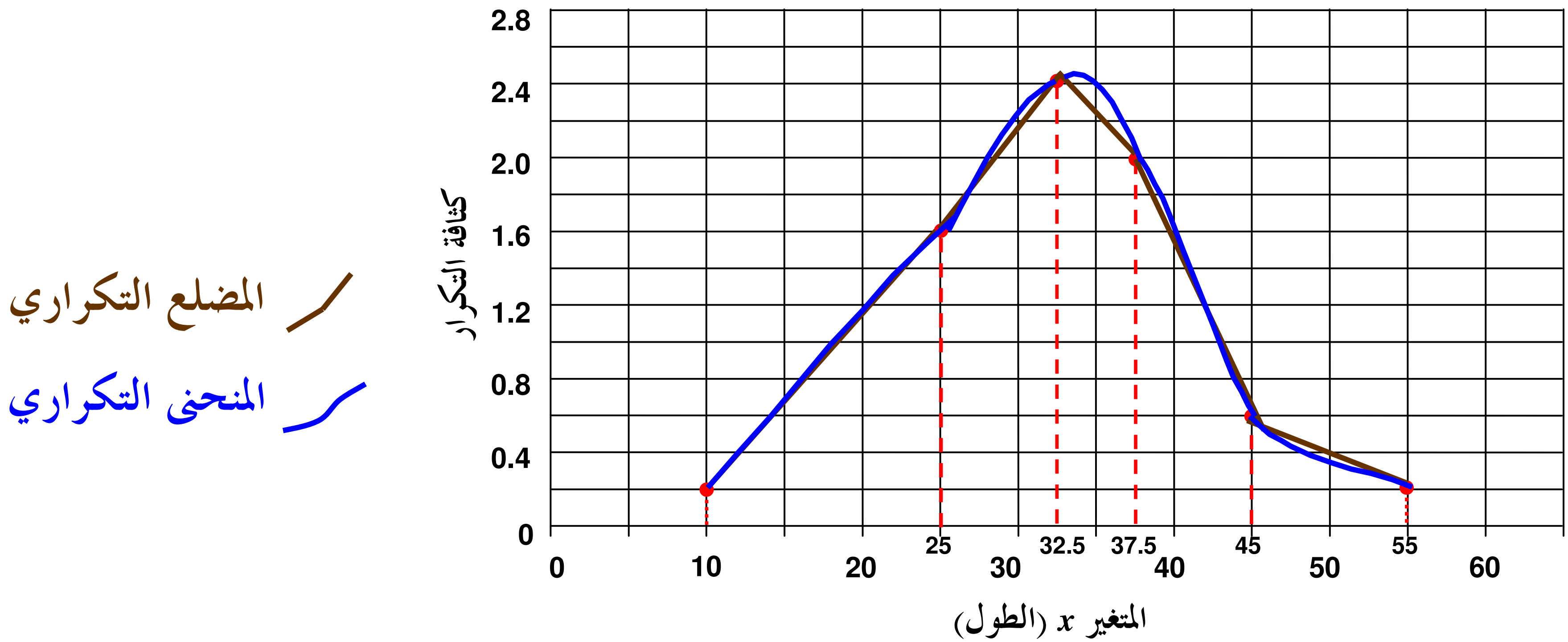
وبأخذ محورين متعامدين : الأفقي (ويمثل المتغير x) والرأسي (ويمثل كثافة التكرار) ، نقوم بتمثيل الفئات بالنقاط المبينة بالجدول .

ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بالمسطرة نحصل على خط منكسر هو المضلع التكراري للبيانات .

أما إذا قمنا بتوصيل النقاط باليد وبطريقة ناعمة نحصل على خط ممهد هو المنحنى التكراري لمجموعة البيانات .

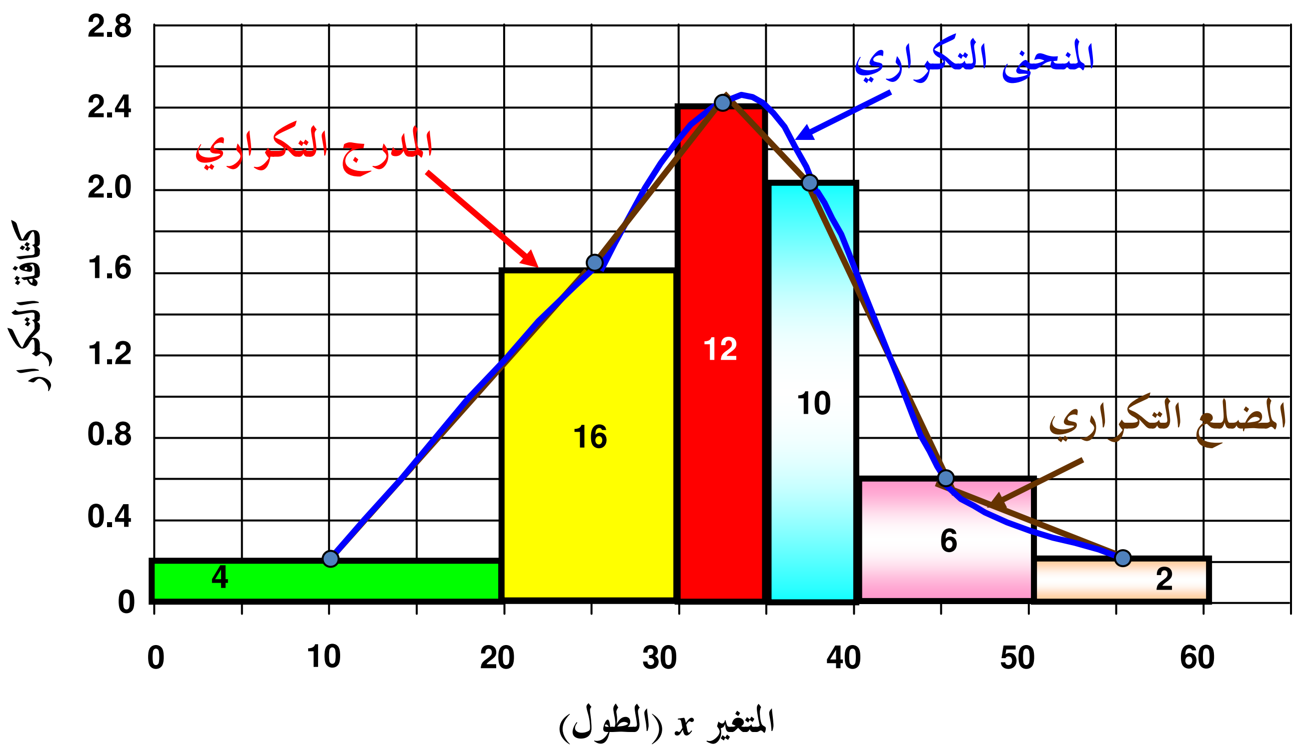
المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \le x < 20$	10	0.2	(10 , 0.2)
$20 \le x < 30$	25	1.6	(25 , 1.6)
$30 \le x < 35$	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
$35 \le x < 40$	37.5	2	(37.5 , 2)
$40 \le x < 50$	45	0.6	(45 , 0.6)
$50 \le x < 60$	55	0.2	(55 , 0.2)

أخذنا من الجدول السابق ما يهمنا



لاحظ أنه يمكن رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري على رسمة واحدة ، حيث أن نقطة منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل في المدرج التكراري هي النقطة الممثلة للفئة عند رسم كلٍ من المضلع التكراري والمنحنى التكراري

المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \le x < 20$	10	0.2	(10 , 0.2)
$20 \le x < 30$	25	1.6	(25 , 1.6)
$30 \le x < 35$	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
$35 \le x < 40$	37.5	2	(37.5 , 2)
$40 \le x < 50$	45	0.6	(45 , 0.6)
$50 \le x < 60$	55	0.2	(55 , 0.2)



المحاضرة الخامسة

[تابع] الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

تابع العرض البياني للبيانات الكمية المتصلة

(١) ملخص لما سبق شرحه في المحاضرة السابقة (المحاضرة الرابعة)

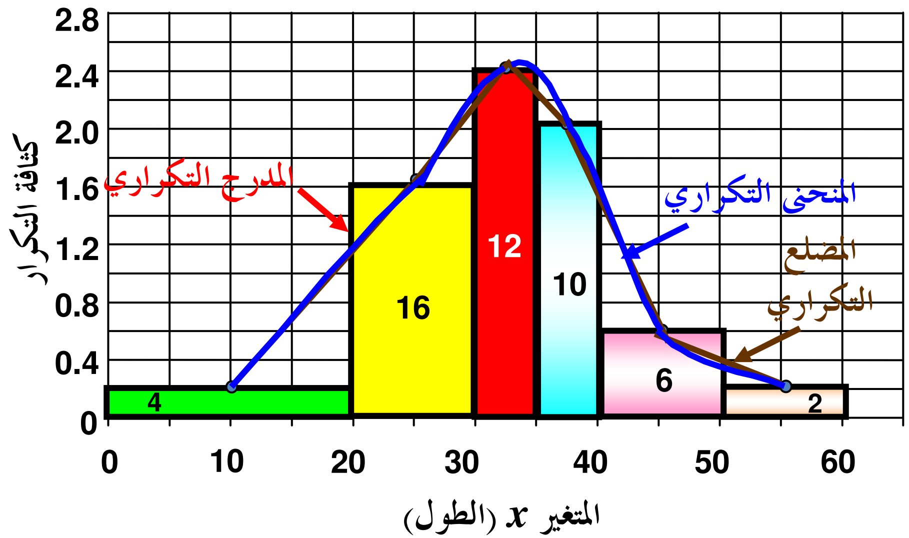
(٢) المضلع (المنحنى) التكراري المتجمع

مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]

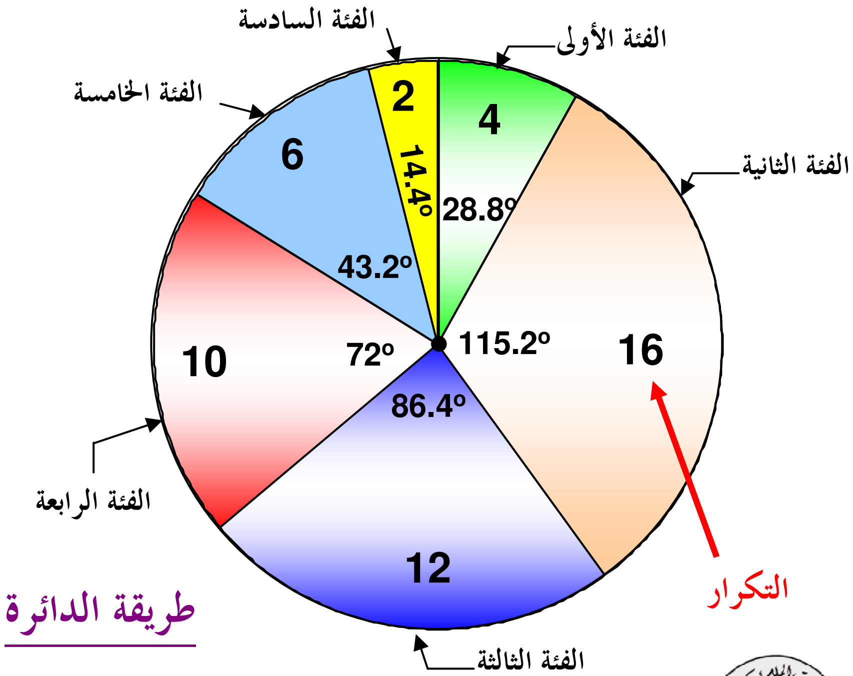
ملخص لما سبق

الجدول التكراري

	المتغير x	التكرار f	الزاوية المركزية	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة الممثلة للفئة
الفئة لأولى	$0 \le x < 20$	4	28.8^o	20	10	0.2	(10 , 0.2)
الفئة الثانية	$20 \le x < 30$	16	115.2^o	10	25	1.6	(25 , 1.6)
الفئة الثالثة	$30 \le x < 35$	12	86.4^o	5	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
الفئة الرابعة	$35 \le x < 40$	10	72^o	5	37.5	2	(37.5 , 2)
الفئة الخامسة	$40 \le x < 50$	6	43.2^o	10	45	0.6	(45 , 0.6)
الفئة السادسة	$50 \le x < 60$	2	14.4^o	10	55	0.2	(55 , 0.2)
		$\sum f = 50$	المجموع = 360^o				



طرق عرض مختلفة للبيانات الكمية المتصلة



طريقة الدائرة

ذكرنا سابقاً عند عرضنا للبيانات عن طريق الجداول أنه يمكن عرض البيانات عن طريق التوزيـــع التكــــراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد ، ويمكن الاستفادة من هذه الجداول في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :

التوزيع التكراري الأصلي

المتغير x	التكرار f
$0 \le x < 20$	4
$20 \le x < 30$	16
$30 \le x < 35$	12
$35 \le x < 40$	10
$40 \le x < 50$	6
$50 \le x < 60$	2
	$\sum f = 50$

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

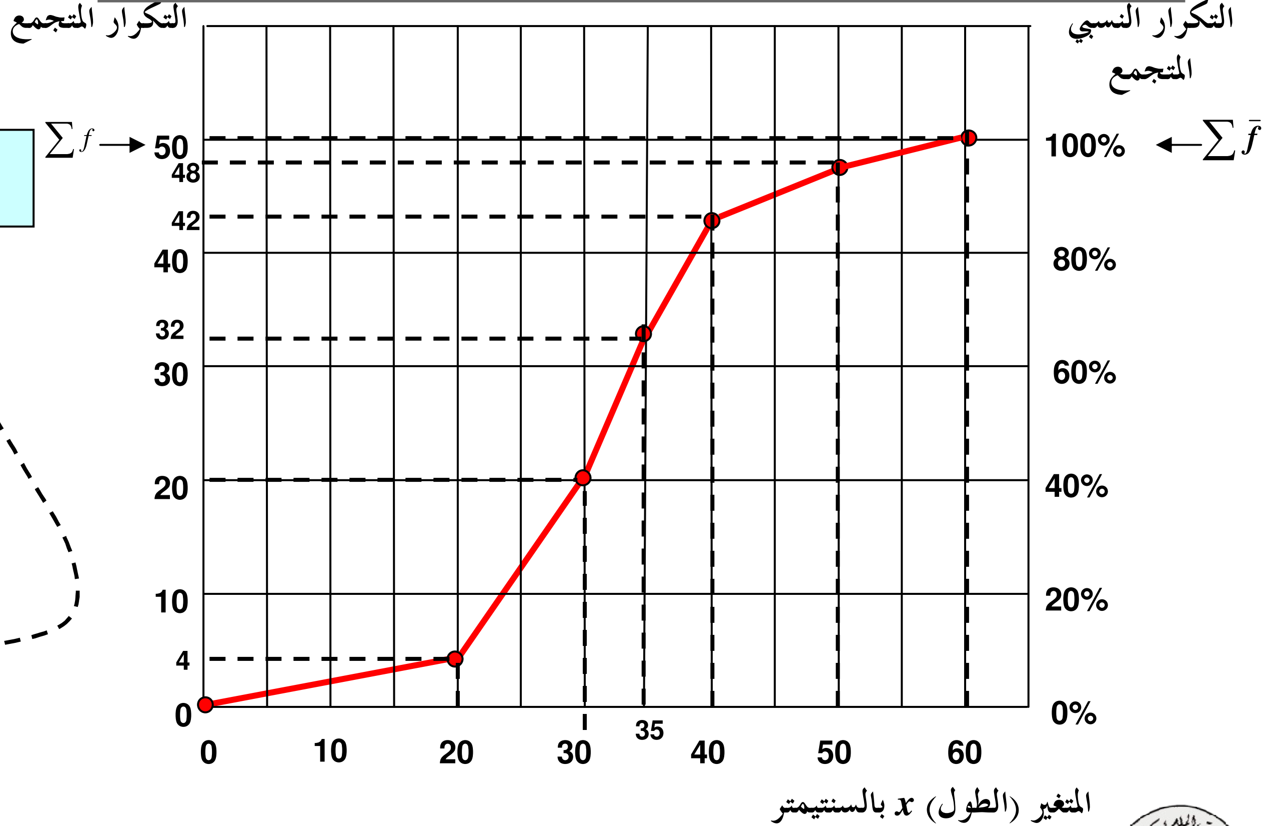
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
< 0	0	0%	(0 , 0)
< 20	4	8%	(20 , 4)
< 30	20	40%	(30 , 20)
< 35	32	64%	(35 , 32)
< 40	42	84%	(40 , 42)
< 50	48	96%	(50 , 48)
< 60	50	100%	(60 , 50)

التكرار المتجمع المناظر

الحد الأدنى للفئة

(30 , 20)

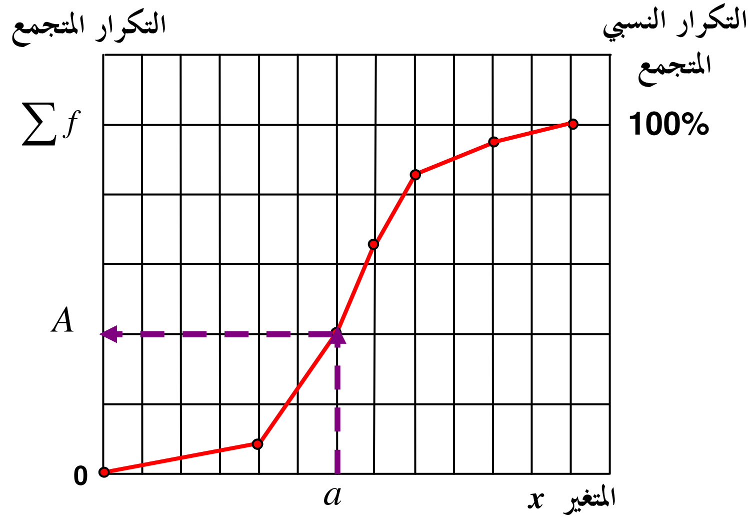
المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد



ويفيد المضلع التكراري المتجمع الصاعد في الرد على العديد من الأسئلة نستعرض بعضها في التالي :

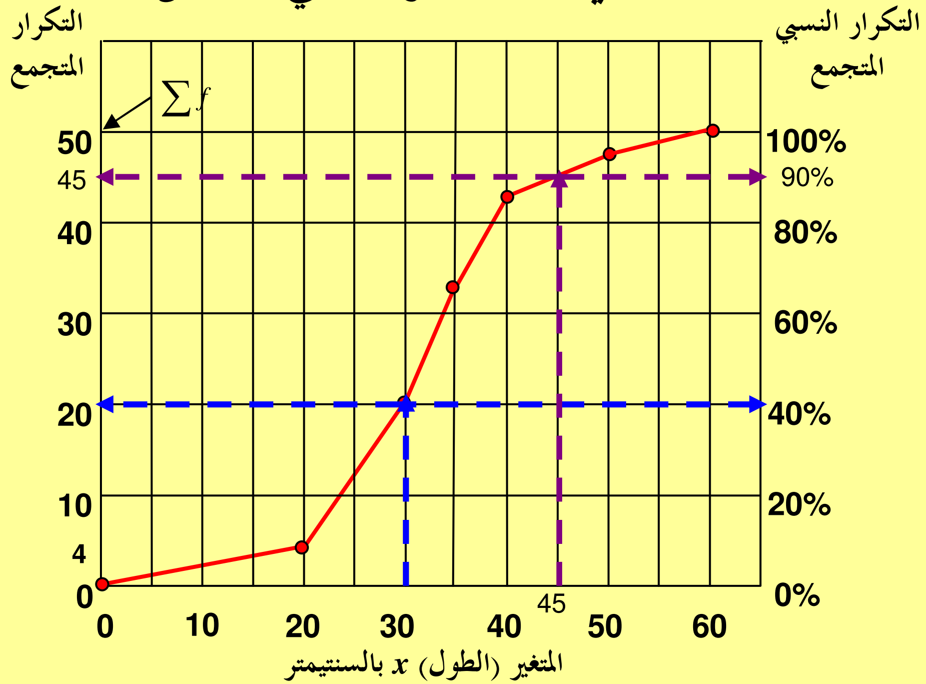
- تحديد التكرار المتجمع المناظر لــ :

"أقل من قيمة معينة x"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لــ "$x < a$" نحدد قيمة a على المحور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المضلع في نقطة ، فيكون التكرار المتجمع المطلوب هي القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] المناظرة لنقطة التقاطع

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق

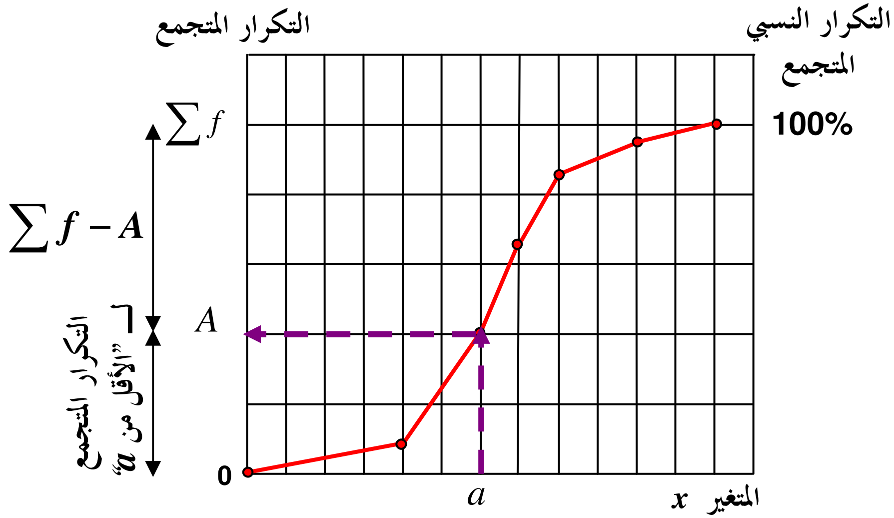


عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 30 هو 20 ونسبتهم المئوية هي 40%

عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 45 هو 45 ونسبتهم المئوية هي 90%

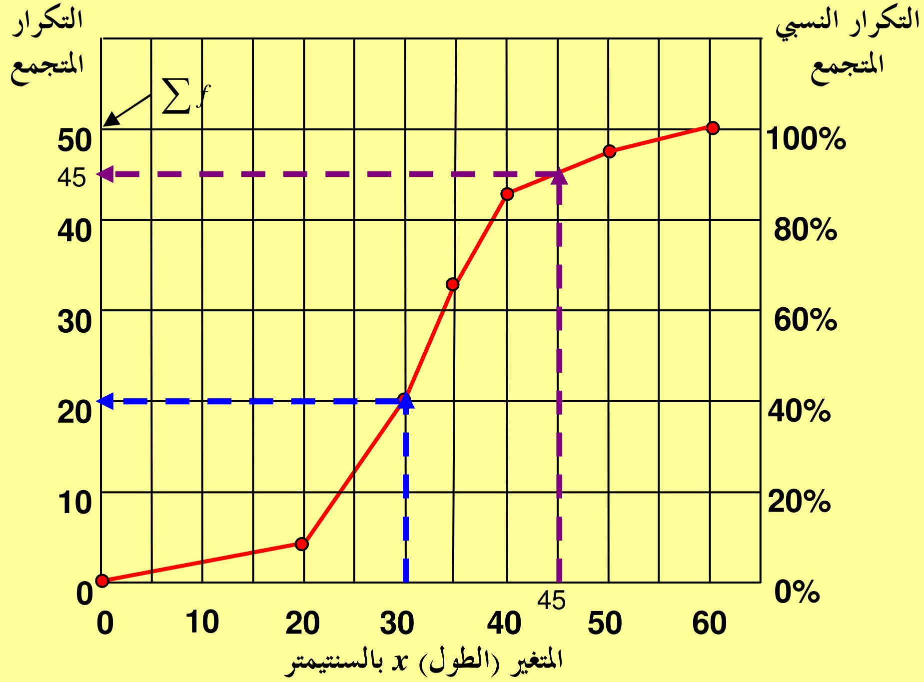
- **تحديد التكرار المتجمع المناظر لـــ :**

"x أكبر من أو تساوي قيمة معينة"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لـــ "$x \geq a$" نحدد قيمة a على المحور الأفقي [محور المتغير] ونرسم خطاً رأسياً حتى يتقاطع مع المضلع في نقطة ونحدد القراءة الأفقية A [على محور التكرار المتجمع] ، ويكون الحل المطلوب هو "المجموع الكلي للتكرارات – القيمة A"

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو :

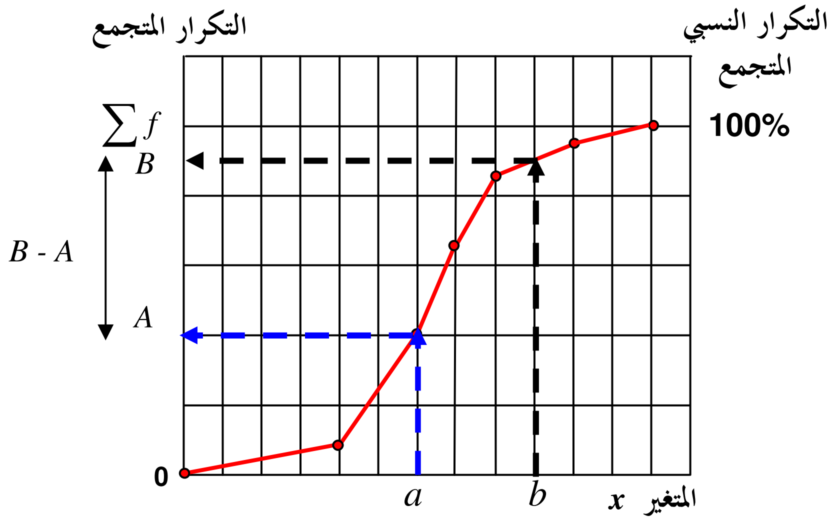
50 – 20 = 30

عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو :

50 – 45 = 5

- تحديد التكرار المتجمع المناظر لــ :

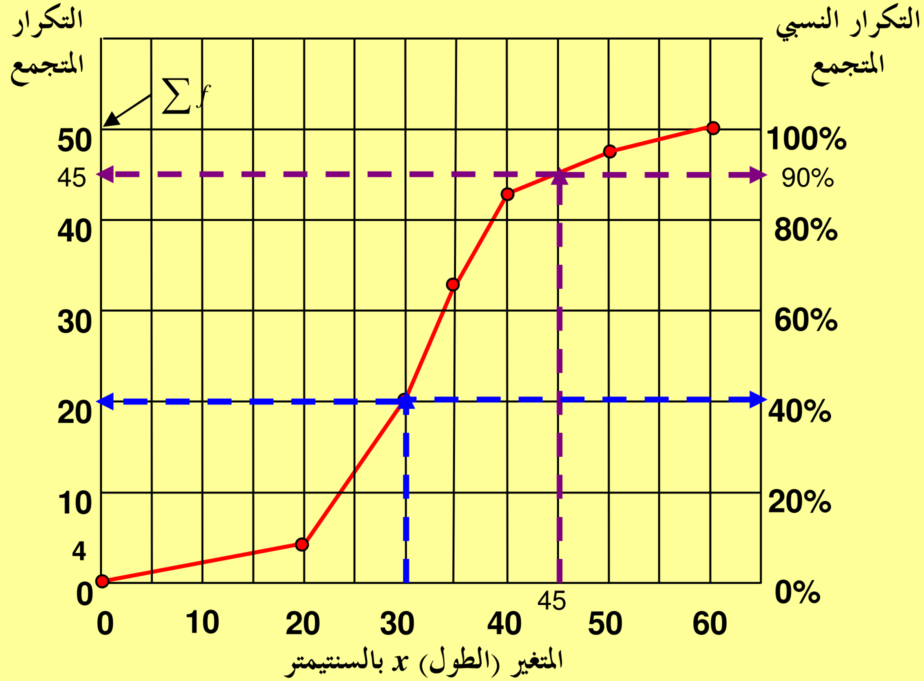
"x محصورة بين قيمتين"



فلحساب قيمة التكرار المتجمع المناظر لــ "$a \leq x < b$" نحدد قيمتي a , b على المحور الأفقي [محور المتغير] ونحدد قيم التكرارات المتجمعة المناظرة [لتكن A , B على الترتيب] ، فيكون الحل المطلوب هو :

الفرق بين القيمتين A , B

فمثلاً في المثال التوضيحي السابق



عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 30 ، 45 هو :

45 – 20 = 25

ونسبتهم المئوية تساوي : $\frac{25}{50} \times 100 = 50\%$

أو من الرسم : 90 – 40 = 50%

وبنفس طريقة المضلع التكراري المتجمع الصاعد يمكن رسم المضلع التكراري (أو التكـــراري النـــسبي) المتجمع الهابط كالآتي :

التكرار f	المتغير x
التوزيع التكراري الأصلي	
4	$0 \le x < 20$
16	$20 \le x < 30$
12	$30 \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < 60$
$\sum f = 50$	

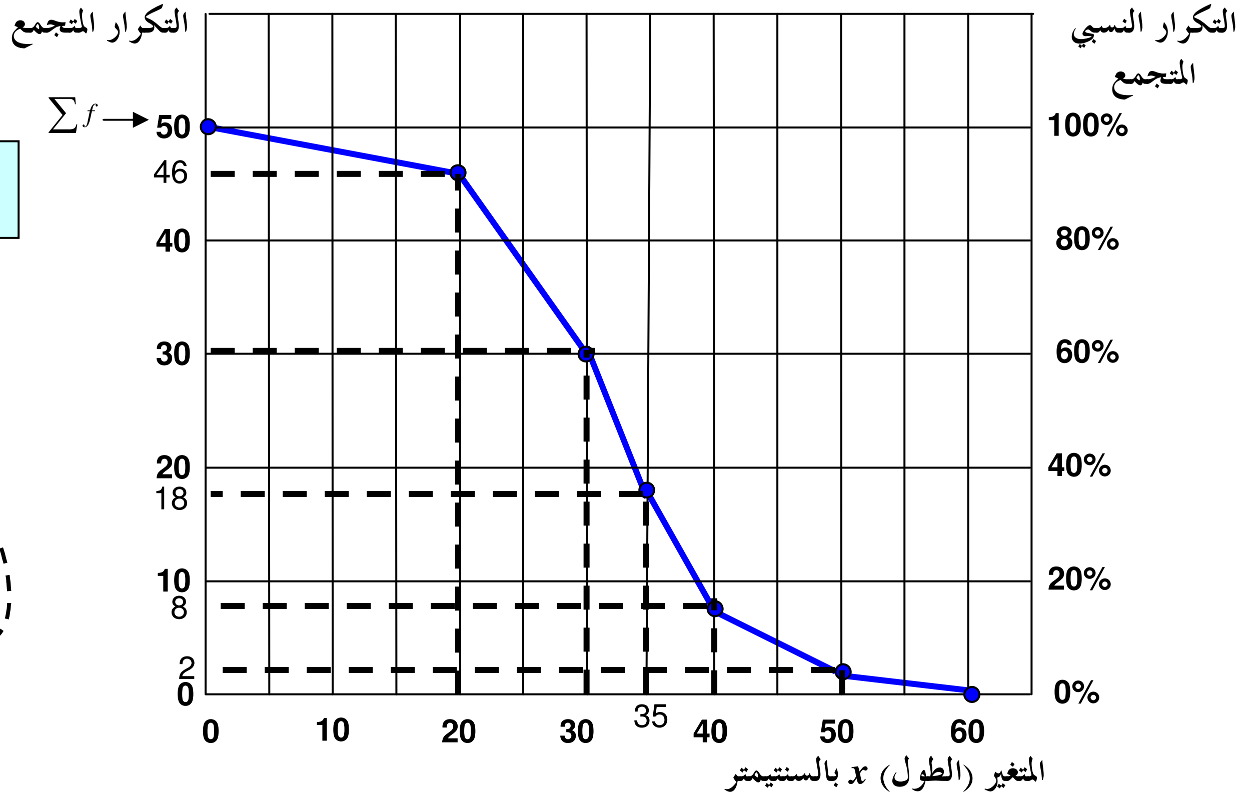
التكرار المتجمع المناظر

الحد الأدنى للفئة

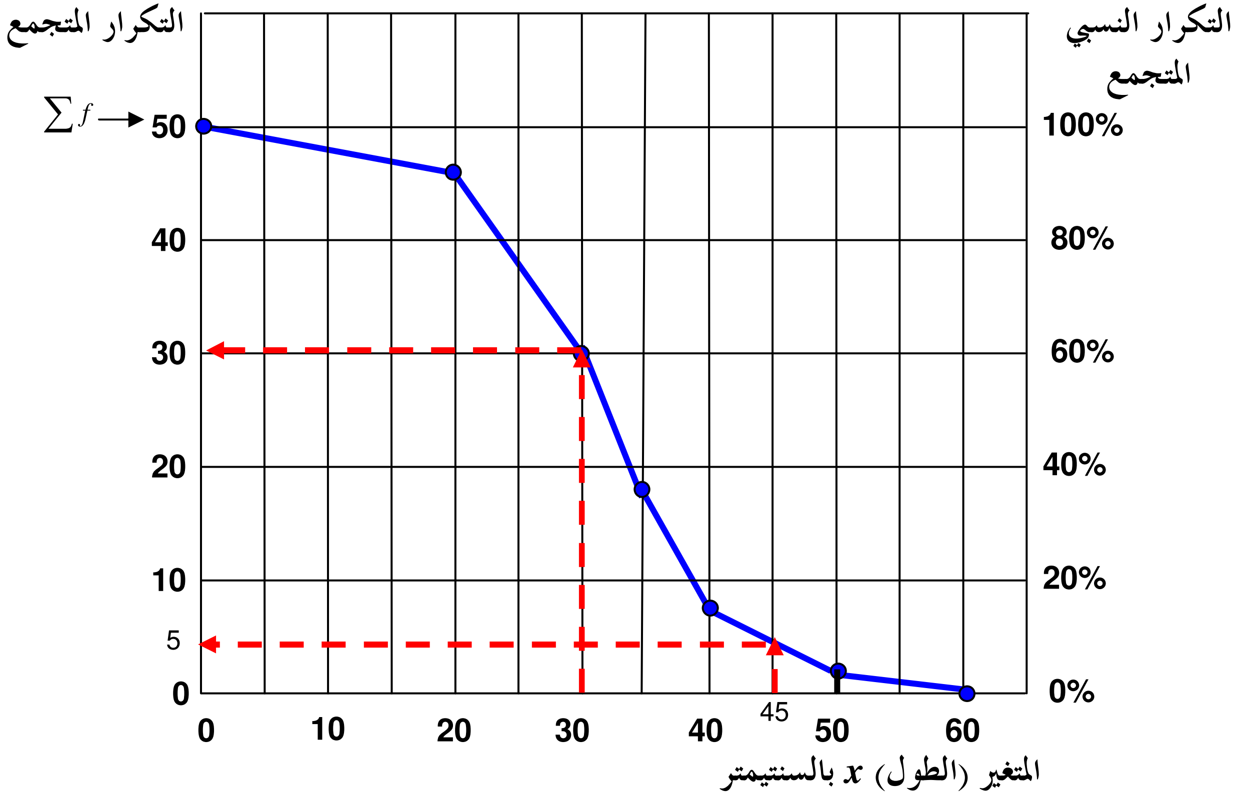
(30 , 30)

النقطة الموقعة على الرسم	التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x
التوزيع التكراري المتجمع الهابط			
(0 , 50)	100%	50	≥ 0
(20 , 46)	92%	46	≥ 20
(30 , 30)	60%	30	≥ 30
(35 , 18)	36%	18	≥ 35
(40 , 8)	16%	8	≥ 40
(50 , 2)	4%	2	≥ 50
(60 , 0)	0%	0	≥ 60

المضلع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط



ويفيد المضلع التكراري المتجمع الهابط في الرد على نفس الأسئلة التي يرد عليها المضلع التكراري المتجمع الـــصاعد مع الأخذ في الاعتبار أن التدريج الرأسي [التكرار المتجمع] يمثل التكرار المناظر لــ " x أكبر من أو تساوي"



فمثلاً في المثال التوضيحي السابق

- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 30 فأكثر هو 30 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 30 هو : 50 – 30 = 20
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها 45 فأكثر هو 5 بينما عدد الأزهار التي أطوال سيقانها أقل من 45 هو : 50 – 5 = 45
- عدد الأزهار التي أطوال سيقانها ما بين 30 , 45 هو : 30 – 5 = 25

قارن النتائج السابقة بالنتائج التي سبق وحصلنا عليها باستخدام المضلع التكراري المتجمع المتصاعد

أي أن المضلعان التكراريان المتجمعان الصاعد والهابط يؤديان نفس الغرض ، لذا سنوجه اهتمامنا لأحدهما فقط [وليكن الصاعد]

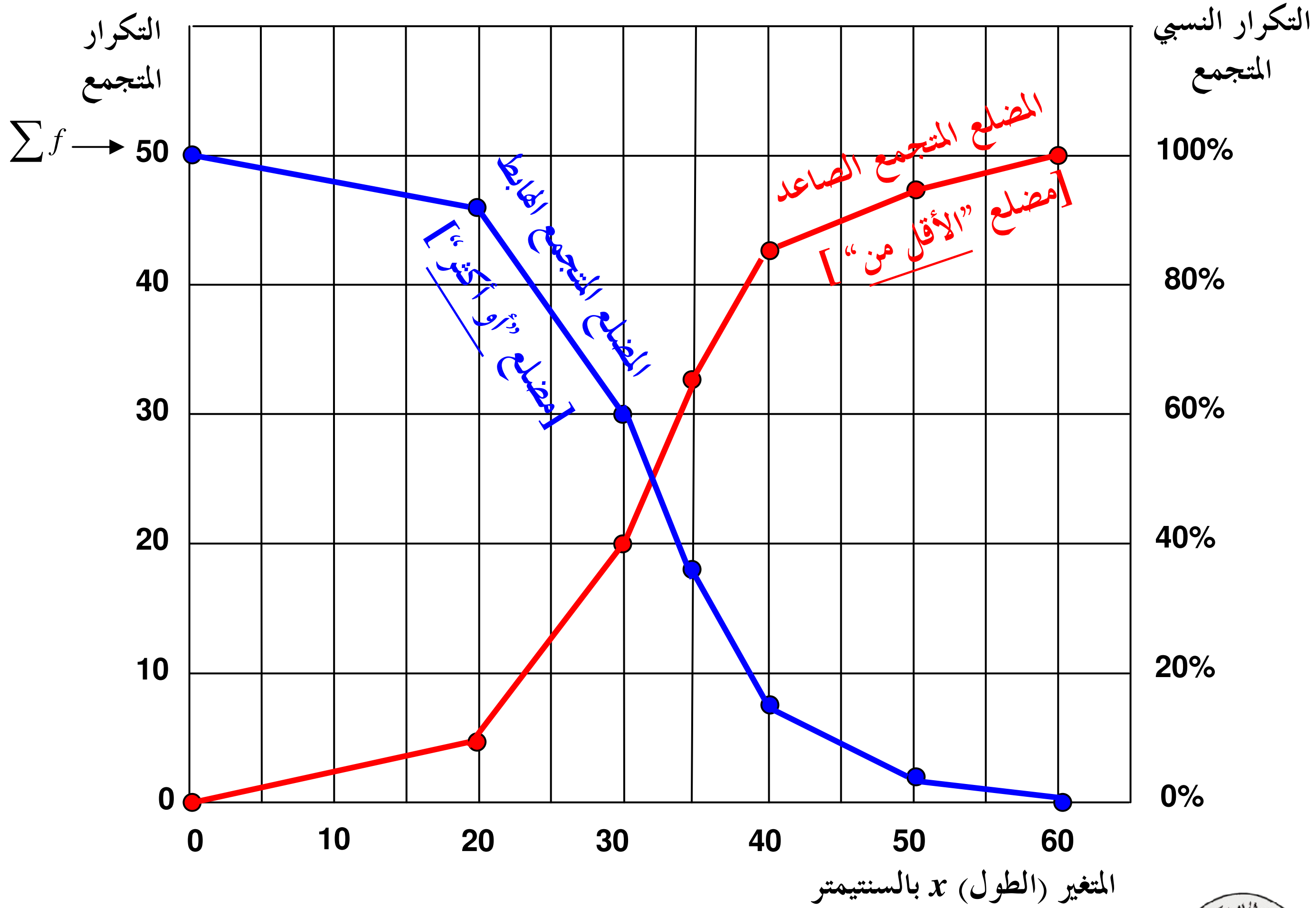
ويمكن رسم المضلعين التكراريين المتجمعين : الصاعد والهابط على رسمة واحدة كما هو مبين :

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
< 0	0	0%	(0 , 0)
< 20	4	8%	(20 , 4)
< 30	20	40%	(30 , 20)
< 35	32	64%	(35 , 32)
< 40	42	84%	(40 , 42)
< 50	48	96%	(50 , 48)
< 60	50	100%	(60 , 50)

التوزيع التكراري المتجمع الهابط

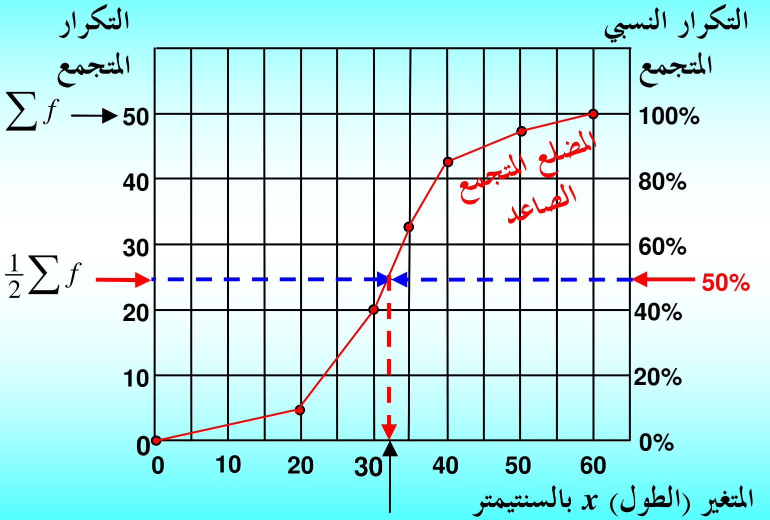
المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع	النقطة الموقعة على الرسم
≥ 0	50	100%	(0 , 50)
≥ 20	46	92%	(20 , 46)
≥ 30	30	60%	(30 , 30)
≥ 35	18	36%	(35 , 18)
≥ 40	8	16%	(40 , 8)
≥ 50	2	4%	(50 , 2)
≥ 60	0	0%	(60 , 0)



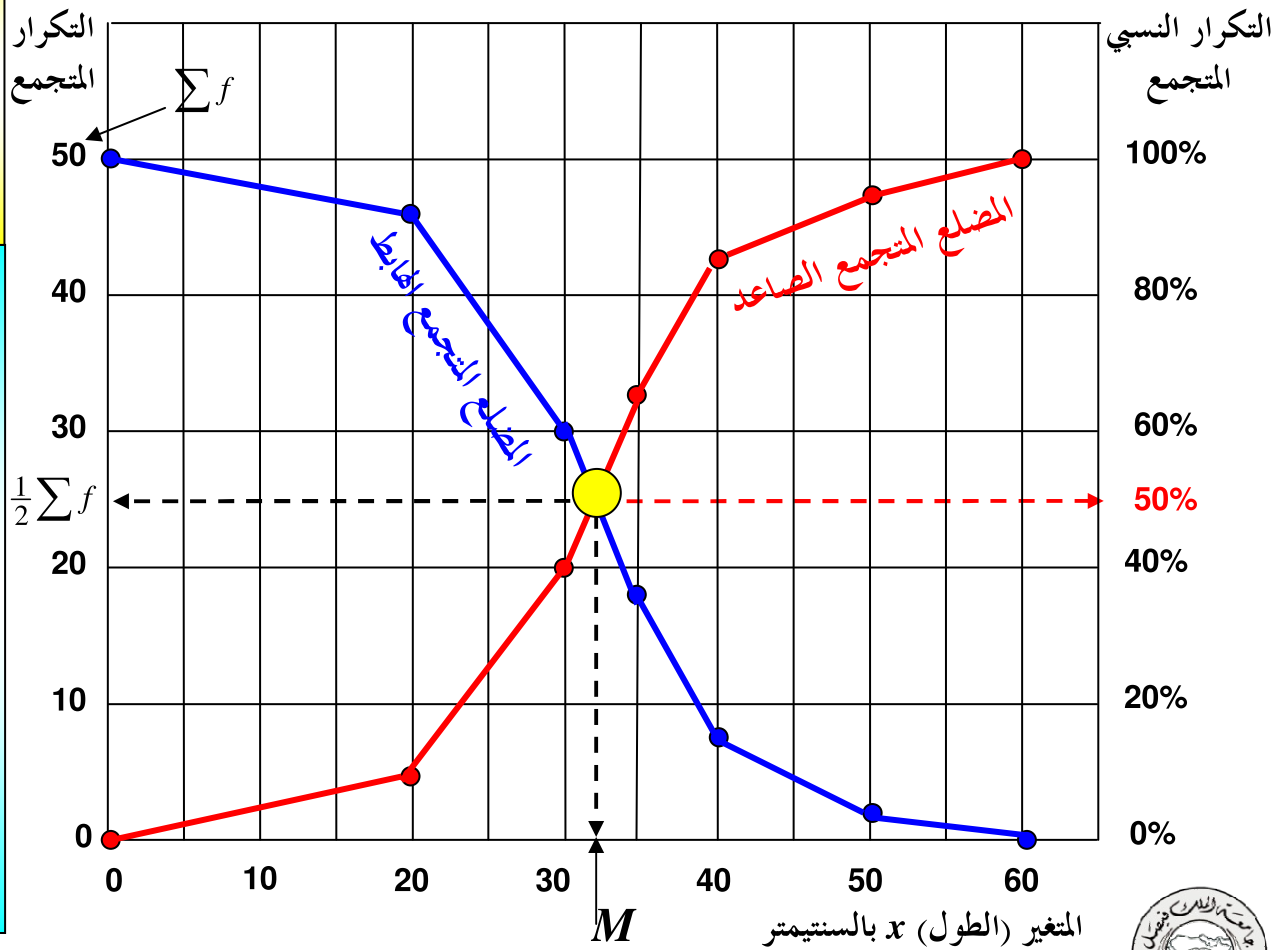
ويُلاحظ أن المضلعين يتقاطعان في نقطة ، قيمة المتغير x عندها تساوي M (مثلاً) ، هذه القيمة يناظرها تكرار متجمع يساوي $\frac{1}{2}\sum f$ [= 25 في مثالنا التوضيحي] وتكرار متجمع نسبي قدره 50%] . هذه القيمة M تُسمى **بالوسيط**

أي أن وسيط مجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هي قيمة في وسط مجموعة القيم تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد

كيفية تحديد الوسيط



$M \cong 32$



مراجعة عامة على الباب الثاني

في الجزء القادم [بإذن الله] ستقوم بعمل مراجعة عامة على كل ما تقدم من موضوعات في هذا الباب :

[الباب الثاني : التوزيعات التكرارية]

وذلك من خلال مثالين : مثال (٢–٥) والذي يلخص عرض البيانات المنفصلة ، ومثال (٢–٦) والذي يلخص عرض البيانات الكمية المتصلة .

أأمل من الله عز وجل أن أوفق في ذلك

مراجعة لكل ما تم شرحه ويخص البيانات المنفصلة

مثال (٢-٥) على البيانات المنفصلة [ص ٤٦ بالمرجع الأساسي] : تم سؤال عدد من طلاب كليتي الآداب والتربية عن عدد حوادث السيارات التي تعرضوا لها خلال العام الماضي فكانت إجاباتهم كما يلي :

3 2 2 1 0 1 2 1 1 1 0 0 1 2 2

1 3 1 0 0 1 2 1 0 2 3 0 0 0 1

المطلوب عرض البيانات السابقة بطرق مختلفة .

الجدول التكراري

المتغير x (عدد الحوادث)	تفريغ البيانات (العلامات)	التكرار f (عدد الطلاب)	التكرار النسبي $\bar{f} = f / \sum f$
0	~~IIII~~ IIII	9	0.3 or 30%
1	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	0.37 or 37%
2	~~IIII~~ II	7	0.23 or 23%
3	III	3	0.1 or 10%
		$\sum f = 30$	1 or 100%

$\sum \bar{f}$

الجدول التكراري النسبي

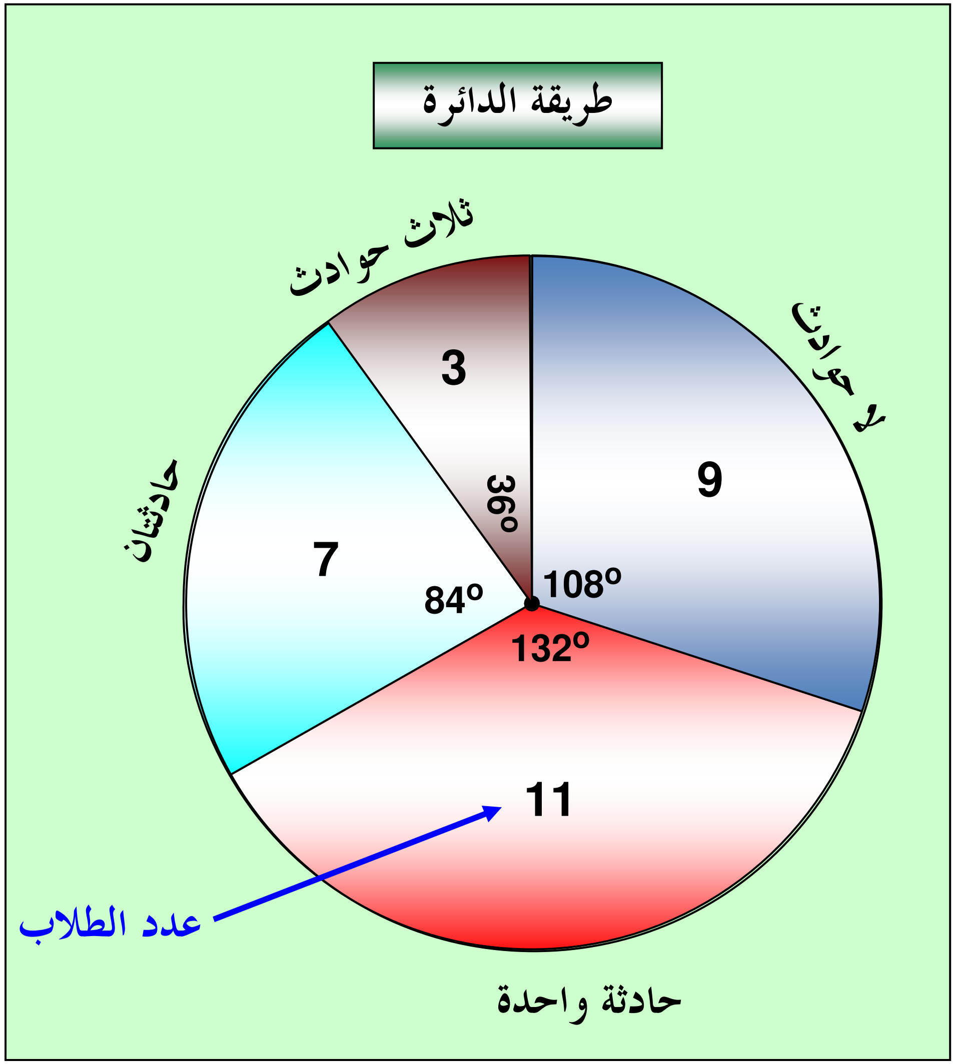
أكتب	اضغط	أكتب	اضغط	الناتج
9	÷	30	=	0.3
11	÷	30	=	0.366666666 ≅ 0.37
7	÷	30	=	0.233333333 ≅ 0.23
3	÷	30	=	0.1

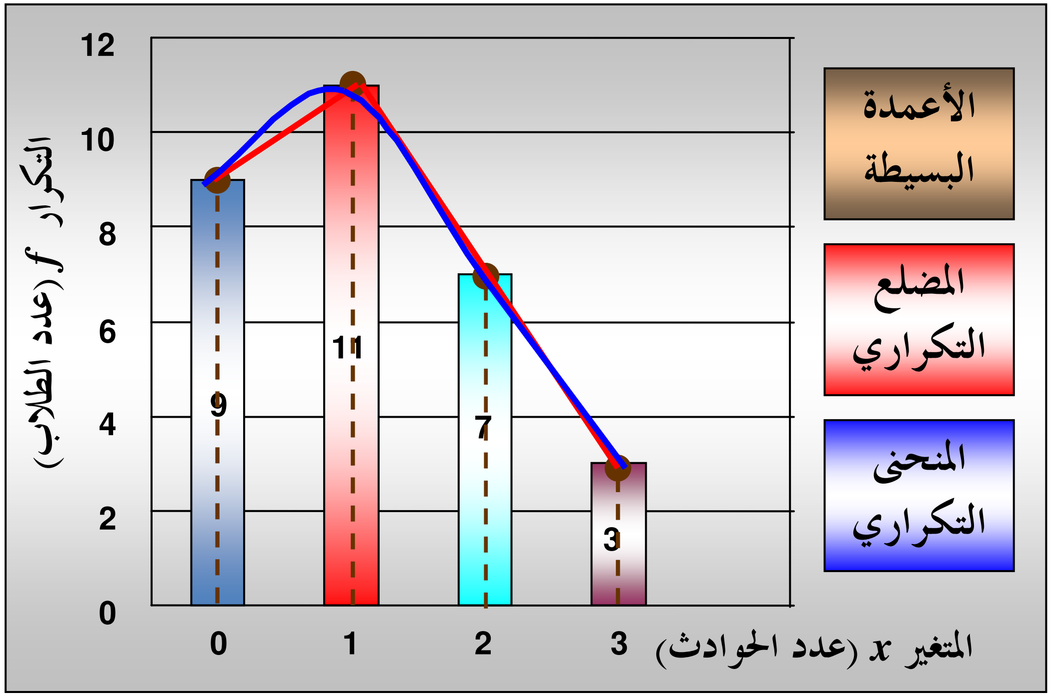
0.3 + 0.37 + 0.23 + 0.1 = 1

0.36666666 ≅ 0.37

0.23333333 ≅ 0.23

x	f	$\bar{f}$	الزاوية المركزية
0	9	30%	(9 ÷ 30) x 360 = 108º
1	11	37%	(11 ÷ 30) x 360 = 132º
2	7	23%	(7 ÷ 30) x 360 = 84º
3	3	10%	(3 ÷ 30) x 360 = 36º
	30	100%	360º
	$\sum f$	$\sum \bar{f}$	مجموع الزوايا





مثال (٢-٦) : الجدول التالي يبين الأجر السنوي [بآلاف الريالات السعودية] لـــ 60 عاملاً في إحدى الشركات :

الدخل x (بالآلف)	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	100 -	120 - 180
عدد العمال f	6	9	15	12	9	6	3

(أ) أوجد المدى R للأجور .

(ب) اعرض البيانات السابقة باستخدام طريقة الدائرة ، المدرج التكراري ، المضلع التكراري .

(ج) كون كلاً من الجدولين التكراري المتجمع الصاعد والتكراري المتجمع الهابط .

(د) ارسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه قدر عدد العاملين الذين يحصلون على أجر :

(١) أقل من 88 ألف سنوياً (٢) 96 ألف سنوياً أو أكثر
(٣) لا يقل عن 63 ألف سنوياً ولا يزيد عن 75 ألف سنوياً

(هـــ) قدر قيمة الوسيط M للأجور .

(أ) المدى R للأجور : ذكرنا في حالة البيانات الكمية المتقطعة أن المدى هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأصغر قيمة فيها . نفس الشيء في حالة البيانات الكمية المتصلة ، ولكن هنا [في حالة البيانات الكمية المتصلة] : تكون أكبر قيمة هي الحد الأعلى للفئة الأخيرة [= 180] ، وأصغر قيمة هي الحد الأدنى للفئة الأولى [= 50] .

$$R = 180 - 50 = 130$$

والمعلومات التالية هي التي يمكن أن نحتاجها للرد على الجزء (ب) بالكامل

الجدول التكراري النسبي

الجدول التكراري

النقطة	كثافة التكرار	مركز الفئة x_0	طول الفئة c	الزاوية المركزية	التكرار النسبي	التكرار f	المتغير (الأجر) x	الفئة
(55 , 0.6)	0.6	55	10	36^o	10%	6	$50 \le x < 60$	الأولى
(65 , 0.9)	0.9	65	10	54^o	15%	9	$60 \le x < 70$	الثانية
(75 , 1.5)	1.5	75	10	90^o	25%	15	$70 \le x < 80$	الثالثة
(85 , 1.2)	1.2	85	10	72^o	20%	12	$80 \le x < 90$	الرابعة
(95 , 0.9)	0.9	95	10	54^o	15%	9	$90 \le x < 100$	الخامسة
(110 , 0.3)	0.3	110	20	36^o	10%	6	$100 \le x < 120$	السادسة
(150 , 0.05)	0.05	150	60	18^o	5%	3	$120 \le x < 180$	السابعة
				المجموع = 360^o	$\sum \bar{f} = 100\%$	$\sum f = 60$		

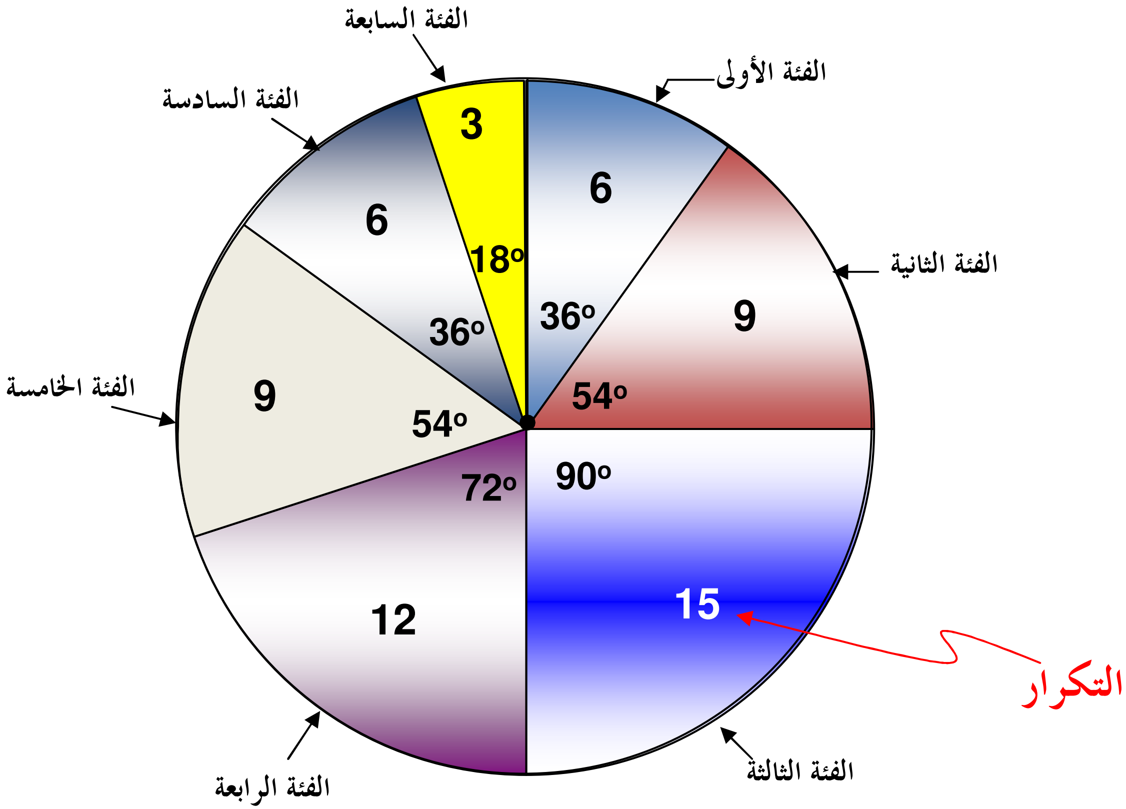
نحتاجه في المضلع التكراري

نحتاجه في طريقة الدائرة

نحتاج إليهما في المدرج التكراري

(ب) عرض البيانات بطريقة الدائرة :

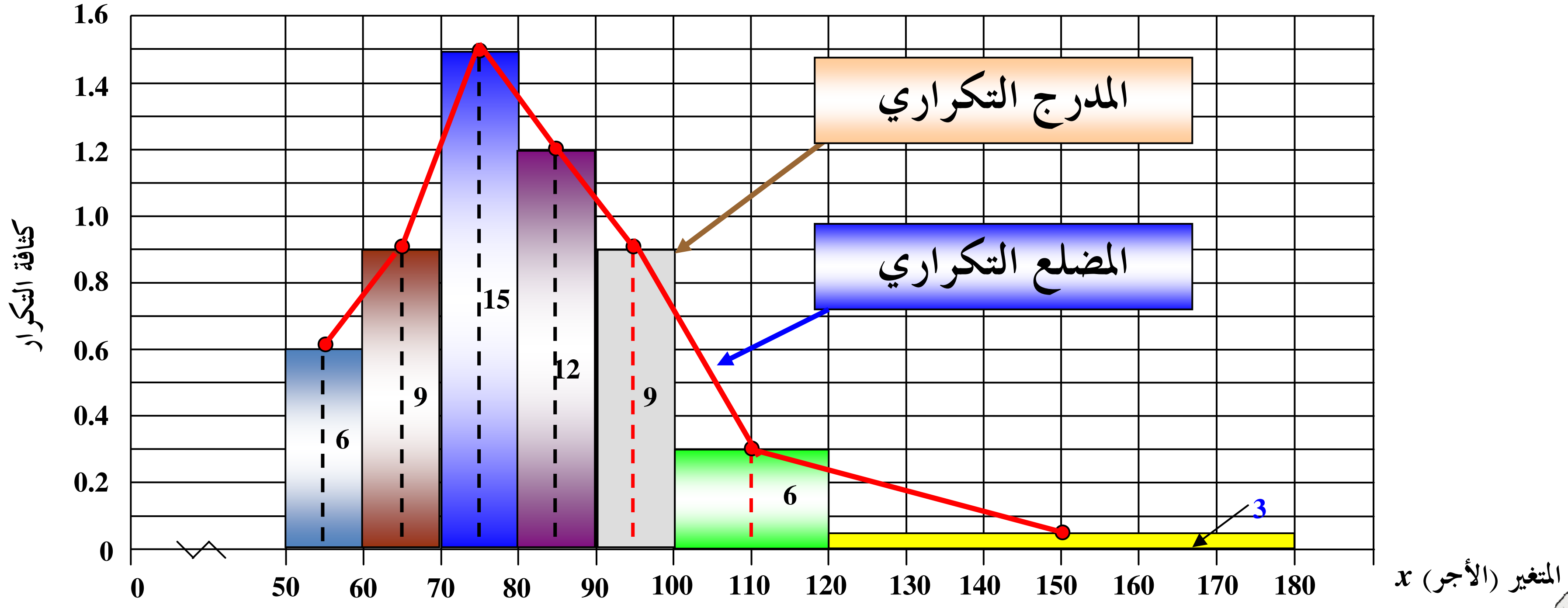
	الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	الزاوية المركزية
الأولى	$50 \le x < 60$	6	36^o
الثانية	$60 \le x < 70$	9	54^o
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	90^o
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	72^o
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	54^o
السادسة	$100 \le x < 120$	6	36^o
السابعة	$120 \le x < 180$	3	18^o
		$\sum f = 60$	المجموع = 360^o



المدرج التكراري والمضلع التكراري

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة	كثافة التكرار	النقطة
الأولى	$50 \le x < 60$	6	10	55	0.6	(55 , 0.6)
الثانية	$60 \le x < 70$	9	10	65	0.9	(65 , 0.9)
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	10	75	1.5	(75 , 1.5)
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	10	85	1.2	(85 , 1.2)
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	10	95	0.9	(95 , 0.9)
السادسة	$100 \le x < 120$	6	20	110	0.3	(110 , 0.3)
السابعة	$120 \le x < 180$	3	60	150	0.05	(150 , 0.05)
		$\sum f = 60$				



(ج) الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع الهابط

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f
الأولى	$50 \le x < 60$	6
الثانية	$60 \le x < 70$	9
الثالثة	$70 \le x < 80$	15
الرابعة	$80 \le x < 90$	12
الخامسة	$90 \le x < 100$	9
السادسة	$100 \le x < 120$	6
السابعة	$120 \le x < 180$	3
		$\sum f = 60$

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
< 50	0	0%
< 60	6	10%
< 70	15	25%
< 80	30	50%
< 90	42	70%
< 100	51	85%
< 120	57	95%
< 180	60	100%

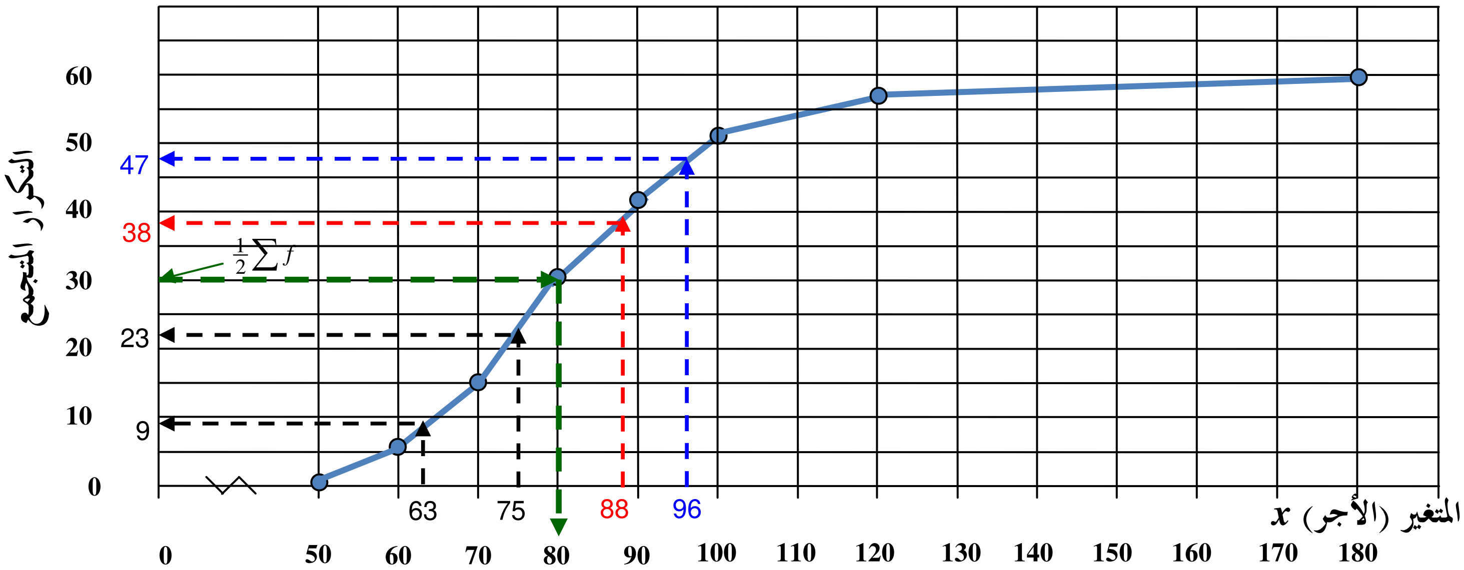
مجموعها $= \sum f = 60$

التوزيع التكراري المتجمع الهابط

المتغير x	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
≥ 50	60	100%
≥ 60	54	90%
≥ 70	45	75%
≥ 80	30	50%
≥ 90	18	30%
≥ 100	9	15%
≥ 120	3	5%
≥ 180	0	0%

(د) المضلع التكراري المتجمع الصاعد

المضلع التكراري المتجمع الصاعد [منحنى الــ "أقل من"]



التوزيع التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة
< 50	0	(50 , 0)
< 60	6	(60 , 6)
< 70	15	(70 , 15)
< 80	30	(80 , 30)
< 90	42	(90 , 42)
< 100	51	(100 , 51)
< 120	57	(120 , 57)
< 180	60	(180 , 60)

(١) عدد العاملين الذين يحصلون على أقل من 88 ألف سنوياً حوالي : **38**

(٢) عدد العاملين الذين يحصلون على 96 ألف سنوياً أو أكثر حوالي : **60 – 47 = 13**

(٣) عدد العاملين الذين يحصلون على أجر لا يقل عن 63 ألف ولا يزيد عن 75 ألف سنوياً حوالي :

23 – 9 = 14

(هــ) الوسيط M : هي قيمة x المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{2}\sum f$ [أي 30] : $M = 80$

المحاضرة السادسة

[تابع] الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

تابع مراجعة عامة على الباب الثاني [التوزيعات التكرارية]

حيث نتابع المراجعة العامة التي بدأناها في المحاضرة الماضية [المحاضرة الخامسة] وذلك بعرض عدد من التمرينات المحلولة والتي روعي في أسئلتها أن تكون موضوعية [إختيارات متعددة] وبنفس الأسلوب التي ستوضع بها أسئلة إختبارات نهاية الفصل الدراسي وأيضاً أسئلة الواجبات حتى يألف كل طالب وطالبة على كلٍ من أسئلة الاختبار النهائي وأسئلة الواجبات

لكن ما أنصح به ألا نهمل الأسئلة التقليدية [مثل المثالين السابقين (٢–٥) ، (٢–٦)] حيث أن هذا النوع من الأمثلة التقليدية هو الأساس الذي بدونه لا نستطيع التعامل مع أسئلة الاختيار المتعدد

تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

س ١ : التكرار النسبي لفئة من الفئات هو :

- ○ النسبة بين الحد الأعلى للفئة ومجموع التكرارات
- ○ خارج قسمة تكرار الفئة على طولها
- ● نسبة تكرار الفئة إلى مجموع التكرارات
- ○ النسبة بين الحد الأدنى للفئة ومجموع التكرارات

ملحوظات :

- تكرار الفئة النسبي والذي نرمز له بالرمز $\bar{f}$ هو $\bar{f} = \dfrac{f}{\sum f}$
- كثافة التكرار هو التكرار مقسوماً على طول الفئة .
- لا معنى للإجابتين الأولى والأخيرة .

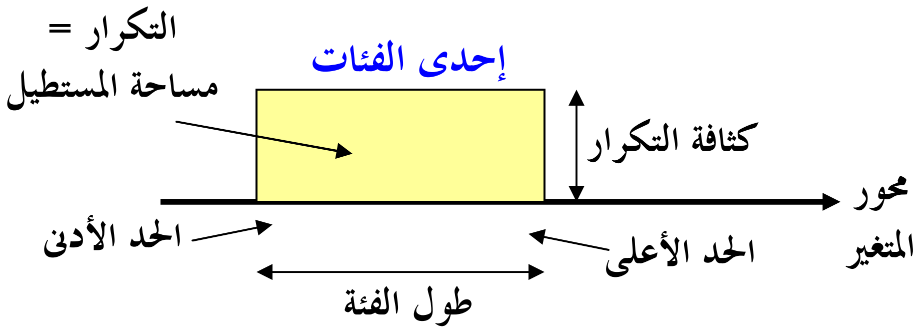
س ٢ : في المدرج التكراري تكون مساحة أي مستطيل من المستطيلات هي :

- ● تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ التكرار النسبي للفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ كثافة تكرار الفئة التي يمثلها المستطيل
- ○ طول الفئة التي يمثلها المستطيل

ملحوظة : تكون الإجابة **الصحيحة** هي الإجابة **الثالثة** إذا كان السؤال عن **ارتفاع المستطيل** وليس مساحته ، وتكون الإجابة **الصحيحة** هي الإجابة **الرابعة** إذا كان السؤال عن **طول قاعدة المستطيل** وليس مساحته ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثانية .

تذكر :

أنه في المدرج التكراري تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته مرسومة على المحور الأفقي (محور المتغير) بين الحدين الأدنى والأعلى للفئة [أي طول القاعدة = طول الفئة] ، ومساحته تمثل تكرار الفئة ، وارتفاعه يساوي كثافة تكرار الفئة [تكرار الفئة مقسوماً على طولها] . لمزيد من التفاصيل ، **أنظر شريحة ١٥ من المحاضرة الرابعة** .

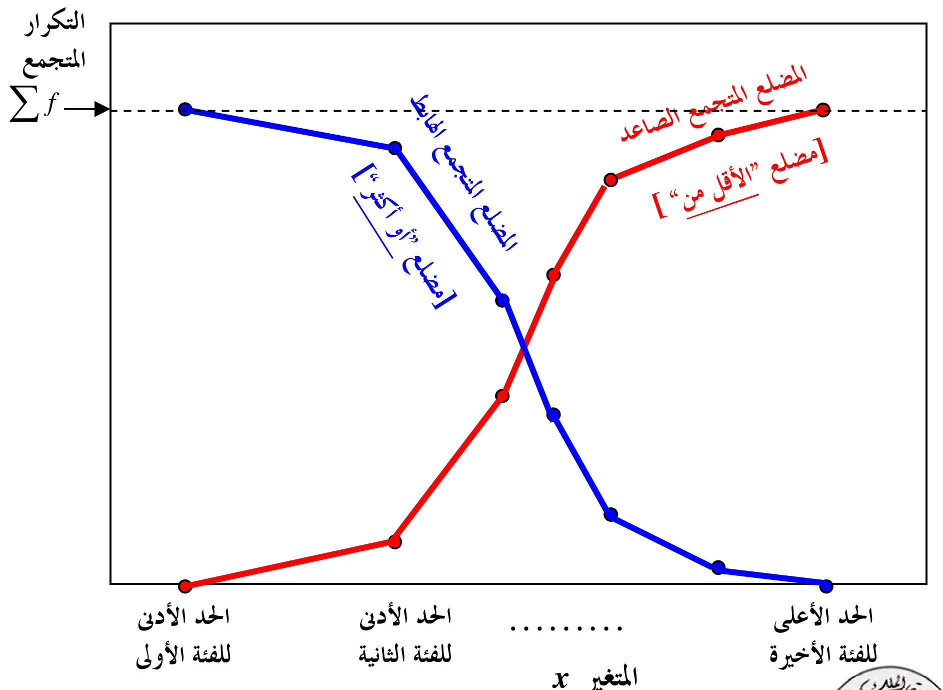


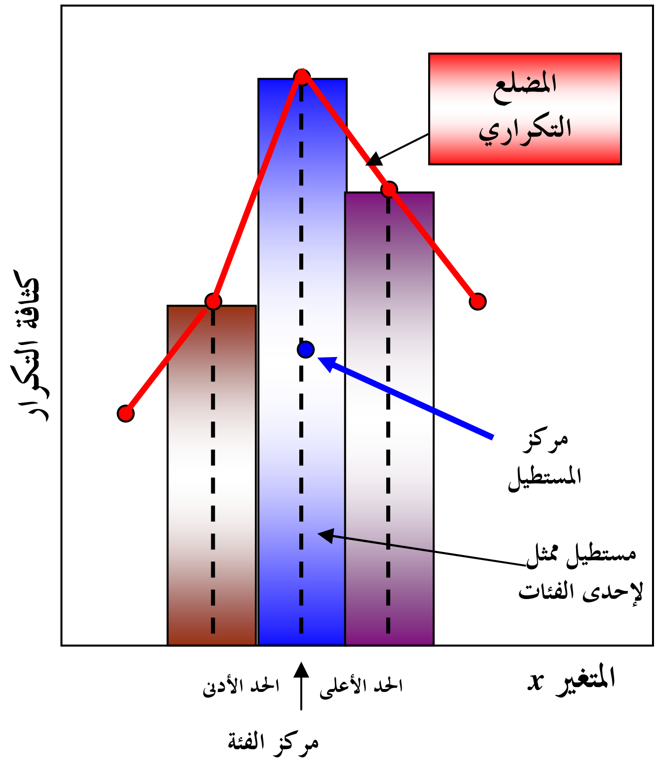
س ٣ : في المضلع التكراري تُمثل كل فئة بنقطة إحداثياها :

- ○ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأقل من هذا الحد .
- ○ الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع لجميع قيم المتغير الأكبر من أو تساوي هذا الحد .
- ○ مركز المستطيل الممثل لتلك الفئة في المدرج التكراري .
- ● مركز الفئة وكثافة تكرارها .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشرائح ١٨ ، ١٩ [المحاضرة الرابعة] ، والشرائح ٦ ، ١٠ [المحاضرة الخامسة]

تذكر :





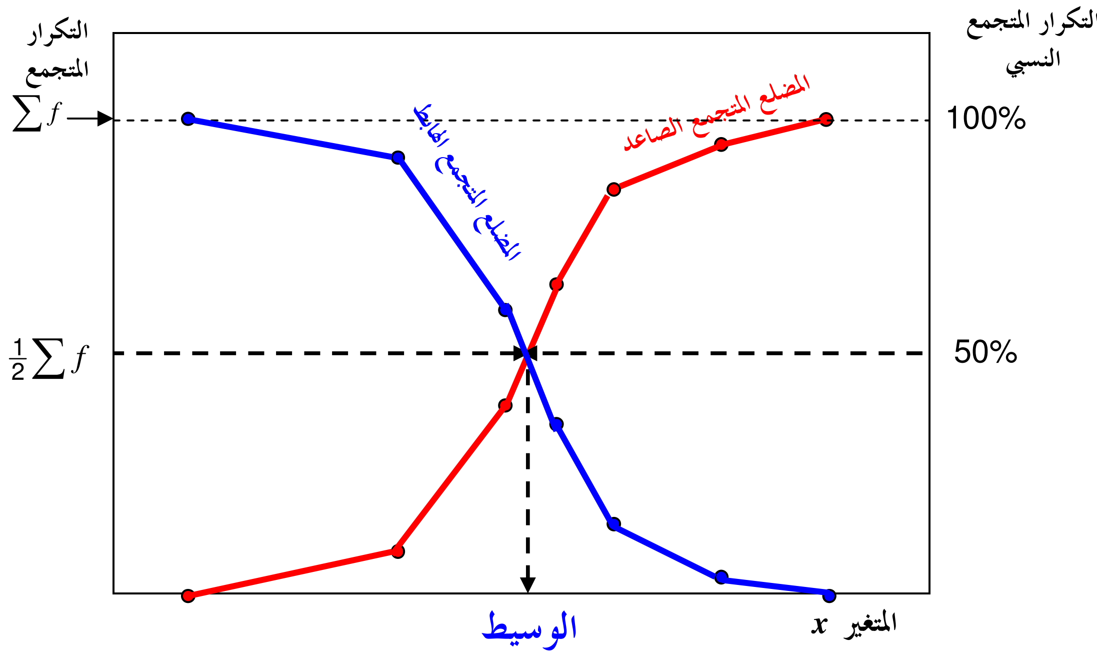
ملحوظة : تكون الإجابة **الصحيحة** هي الإجابة **الأولى** إذا كان السؤال عن **المضلع التكراري المتجمع الصاعد** وليس عن المضلع التكراري ، وتكون الإجابة **الصحيحة** هي الإجابة **الثانية** إذا كان السؤال عن **المضلع التكراري المتجمع الهابط** وليس عن المضلع التكراري ، ولا معنى في هذا السؤال للإجابة الثالثة .

س ٤ : **الوسيط** لمجموعة من البيانات المرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً هو :

- قيمة للمتغير يناظرها تكرار متجمع قدره $\frac{1}{2}\sum f$ حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات
- قيمة للمتغير يناظرها تكرار نسبي قدره 50% .
- نقطة تقاطع المضلعين التكراريين المتجمعين الصاعد والهابط .
- قيمة للمتغير تقسم مجموعة البيانات إلى مجموعتين متساويتين في العدد .

لمزيد من المراجعة يمكن الرجوع للشريحة ١٣ [المحاضرة الخامسة]

تذكر :



ملحوظة :

مثل هذا النوع من الأسئلة [حيث من الممكن أن تكون هناك أكثر من إجابة صحيحة] ~~مرفوض~~ ، وبالتالي لن يكون هناك مثل هذا النوع من الأسئلة في اختبار نهاية الفصل . ولكن ميزة هذا السؤال الوحيدة هي أنه يُعطي أكثر من تعريف للوسيط

س ٥ : في التوزيع التكراري المبين للمتغير الكمي المتصل x

الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \le x < 20$	10
الثانية	$... \le x < ...$	15
الثالثة	$30 \le x < ...$	20
الرابعة	$50 \le x < 60$	5

أ) مجموع التكرارات $\sum f$ يساوي :

○ 100 ○ 200 ○ 1 ● 50

ب) التكرار النسبي للفئة الرابعة يساوي :

○ 0.2 ○ 0.3 ● 0.1 ○ 0.4

ج) مركز الفئة الأولى عند x تساوي :

○ 0 ● 10 ○ 15 ○ 20

د) كثافة تكرار الفئة الرابعة تساوي :

○ 0.1 ● 0.5 ○ 5 ○ 55

هـ) الحد الأعلى للفئة الثالثة هو :

○ 20 ○ 30 ○ 40 ● 50

و) مركز الفئة الثانية عند x تساوي :

● 25 ○ 30 ○ 35 ○ 15

هامش للإجابة :

(أ) $\sum f = 10 + 15 + 20 + 5 = 50$

(ب) $\bar{f} = \dfrac{f}{\sum f} = \dfrac{5}{50} = 0.1$

(ج) مركز الفئة الأولى = $\dfrac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$

$\dfrac{0+20}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

(د) طول الفئة الرابعة = حدها الأعلى − حدها الأدنى

$60 - 50 = 10$

∴ كثافة تكرار الفئة الرابعة = $\dfrac{\text{تكرارها}}{\text{طولها}} = \dfrac{5}{10} = 0.5$

(هـ) الحد الأعلى للفئة الثالثة = الحد الأدنى للفئة الرابعة = 50

(و) الحد الأدنى للفئة الثانية = الحد الأعلى للفئة الأولى = 20

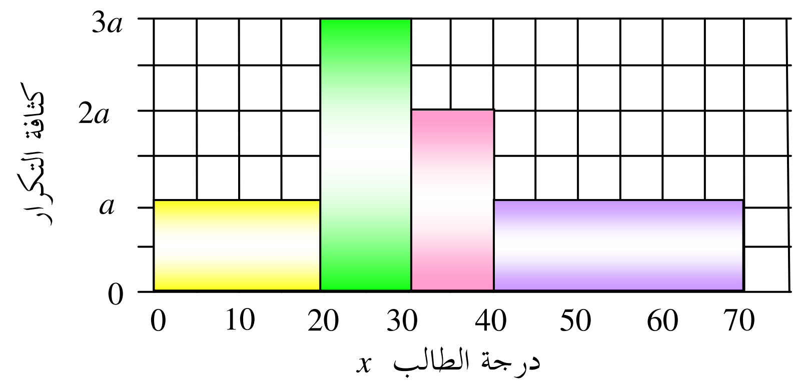
الحد الأعلى للفئة الثانية = الحد الأدنى للفئة الثالثة = 30

∴ مركز الفئة الثانية = $\dfrac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{2}$

$\dfrac{20+30}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$

تمارين محلولة على "تمثيل البيانات الكمية المتصلة"

س ٦ : في المدرج التكراري المبين للمتغير المتصل x [الذي يمثل درجة مجموعة من الطلاب في مقرر الإحصاء] :



(أ) إذا كانت $a = 0.5$ فإن العدد الكلي للطلاب يساوي :

- ● 50
- ○ 75
- ○ 100
- ○ 125

(ب) وإذا كان عدد الطلاب يساوي 150 فإن قيمة a تساوي :

- ○ 0.5
- ○ 1
- ● 1.5
- ○ 2

هامش للإجابة :

(أ) مساحة أي مستطيل تمثل تكرار الفئة ، وبالتالي مجموع المساحات = مجموع التكرارات [أي المجموع الكلي للطلاب] . مع مراعاة أن مساحة أي مستطيل تساوي حاصل ضرب **طول قاعدته × ارتفاعه** ، يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$\underbrace{20\times a}_{\text{الفئة الأولى}}+\underbrace{10\times 3a}_{\text{الفئة الثانية}}+\underbrace{10\times 2a}_{\text{الفئة الثالثة}}+\underbrace{30\times a}_{\text{الفئة الرابعة}}$$

أي :

$$20a+30a+20a+30a=100a$$

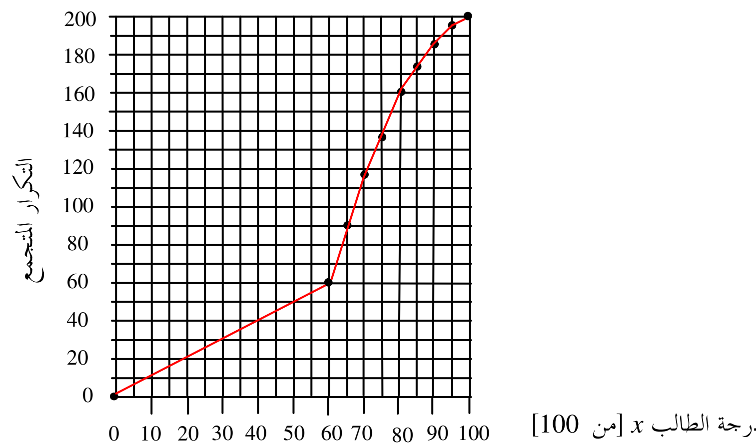
وبالتعويض عن $a = 0.5$ يكون العدد الكلي للطلاب هو :

$$100a=100\times 0.5=50$$

(ب) بنفس الأسلوب السابق ، نحسب مجموع مساحات المستطيلات [بدلالة a (وسبق حسابها فكان الناتج $100a$)] ونساوي الناتج بـــ 150 [عدد الطلاب] فنحصل على قيمة a :

$$100a = 150 \qquad \therefore \quad a=\frac{150}{100}=1.5$$

س ٧ : الشكل المرافق يبين المضلع التكراري المتجمع الصاعد لدرجات **200** طالب في مقرر الإحصاء ، بالاسترشاد بهذا المضلع أجب على الآتي :



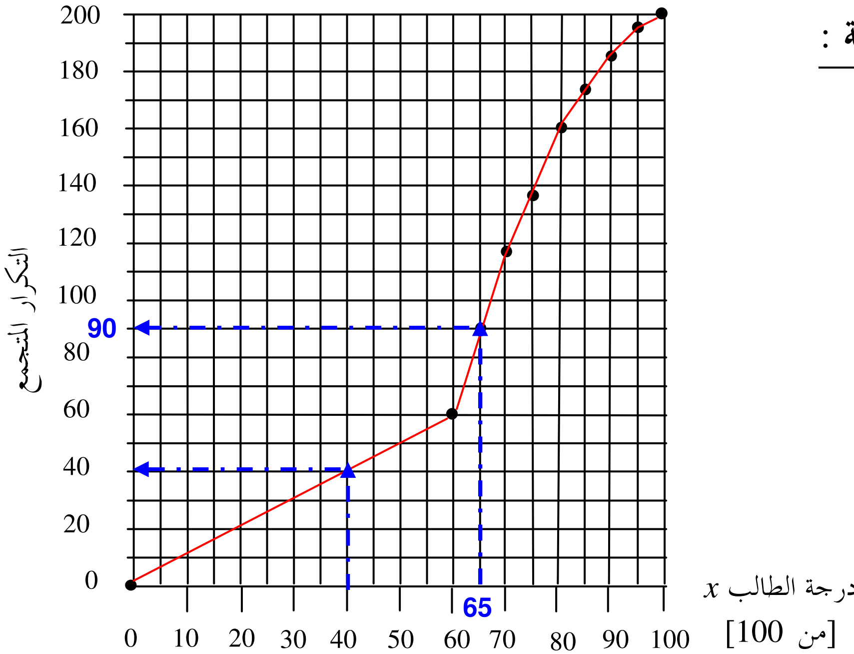
(أ) عدد الطلاب الحاصلين على درجة أقل من **40** يساوي

20% ○ — **40** ● — 160 ○ — 80% ○

(ب) نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير **D+** على الأقل هي

55% ● — 45 ○ — 40% ○ — 65% ○

هامش للإجابة :



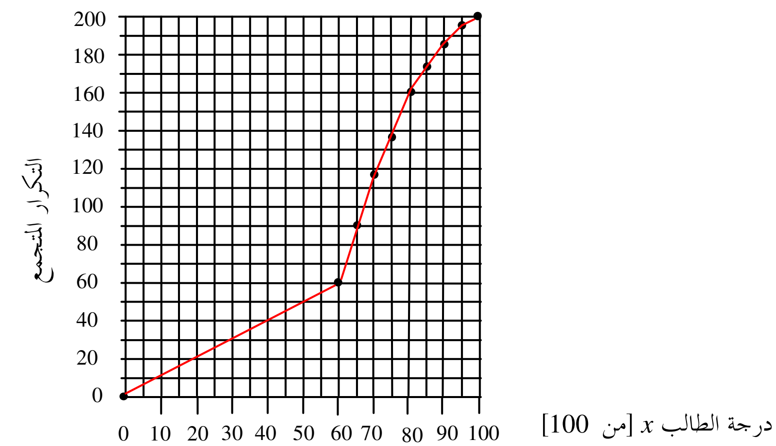
(أ) من الدرجة 40 [على المحور الأفقي] نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرار المناظر [وهو 40] . وحيث أن المضلع هو مضلع "**الأقل من**" والمطلوب "**أقل من**" يكون التكرار المرصود [**40**] هو النتيجة المطلوبة .

(ب) تقدير D+ على الأقل [أي درجة أكبر من أو تساوي 65 من 100] . من الدرجة 65 (على المحور الأفقي) نرسم خطاً رأسياً حتى المضلع ثم خطاً أفقياً ونرصد التكرار المتجمع [وهو 90] . وحيث أن المضلع هو مضلع "**الأقل من**" والمطلوب هو "**الأكبر من أو تساوي**" فيكون العدد المطلوب هو :

$200 - 90 = \mathbf{110}$ ونسبتهم المئوية $\frac{110}{200}\times 100 = 55\%$

(ج) عدد الطلاب الناجحين والحاصلين على درجة أقل من 80 هو :

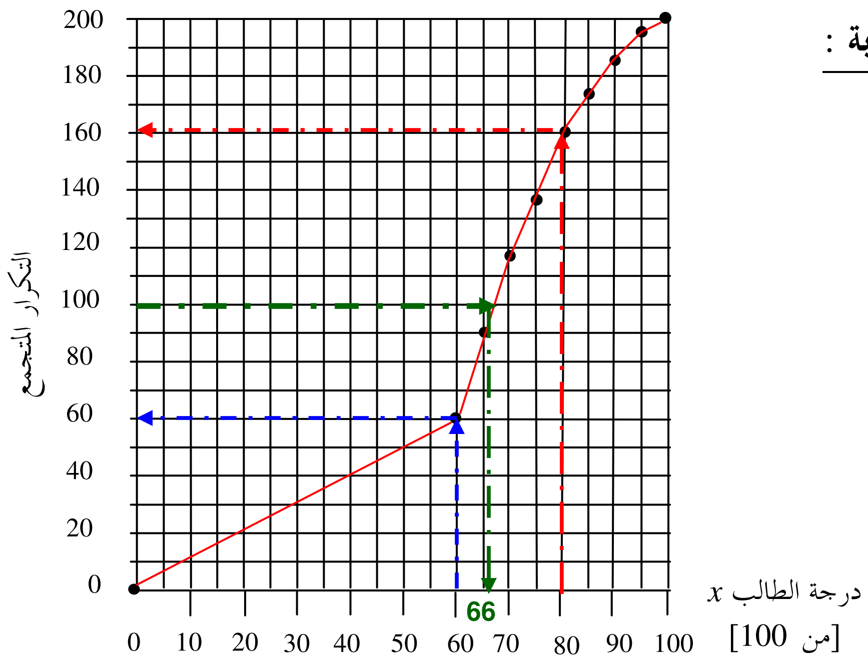
○ 60 ○ 80 ● 100 ○ 120



(د) الوسيط M لدرجات الطلاب هي (تقريباً) الدرجة :

○ 34 ○ 50 ○ 55 ● 66

هامش للإجابة :



(ج) ناجح [أي حاصل على درجة 60 فأكثر] ، إذن من الدرجتين 80 , 60 [على المحور الأفقي] نرسم خطين رأسيين حتى المضلع ثم خطين أفقيين تجاه التكرار المتجمع ونرصد التكرارين المناظرين [وهما 160 , 60] . فيكون العدد المطلوب هو : 100 = 60 – 160

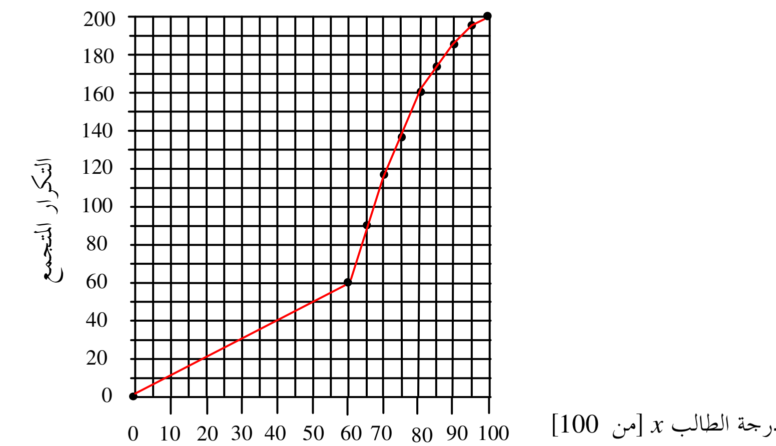
(د) الوسيط M هي قيمة المتغير x التي يناظرها تكرار متجمع قدره :

$$\frac{\sum f}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

من التكرار المتجمع 100 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي بالتقريب 66] هي وسيط الدرجات .

(هـ) الدرجة Q_1 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع درجات **25%** من الطلبة تحتها هي (تقريباً) :

○ 25　　● 50　　○ 75　　○ 77.5

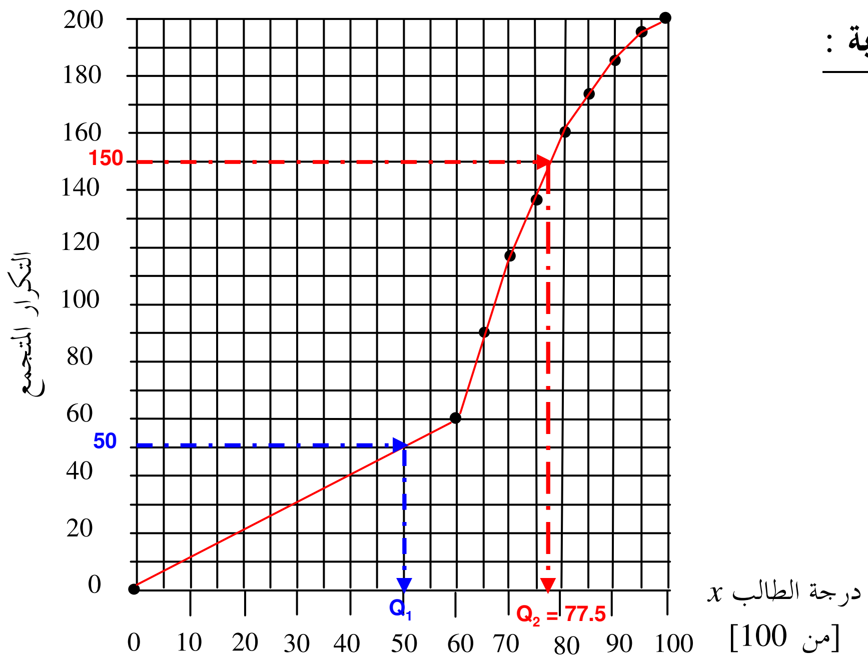


(و) أما الدرجة Q_2 التي تقسم الطلبة إلى مجموعتين بحيث تقع درجات **25%** من الطلبة فوقها فهي (تقريباً) :

○ 25　　○ 50　　○ 75　　● 77.5

ملحوظة : تُسمى القيمة Q_1 **بالربيع الأول** لمجموعة البيانات ، Q_2 **بالربيع الثالث** للبيانات ، في حين يكون الوسيط M هو **الربيع الثاني** كما سنرى في الباب القادم بإذن الله

هامش للإجابة :



(هـ) 25% من الطلبة تعني عدداً من الطلبه قدره : $\frac{25}{100} \times 200 = 50$

بنفس الطريقة التي اتبعناها مع الوسيط : من التكرار المتجمع 50 على المحور الرأسي نرسم خطاً أفقياً حتى المضلع ثم خطاً رأسياً ونرصد قيمة المتغير فتكون النتيجة المرصودة [وهي **50**] هي القيمة Q_1 المطلوبة .

(و) 25% من الطلبة [أي 50 طالب] درجاتهم **أكثر من أو تساوي** الدرجة Q_2 تعني أن 75% من الطلبة [أي 150 طالب] درجاتهم **أقل من** هذه الدرجة .

إذن بنفس الأسلوب السابق [ولكن من تكرار متجمع 150 بدلاً من 50 نحصل على : $Q_2 = \mathbf{77.5}$

المحاضرة السابعة

الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- التعريف بمقاييس النزعة المركزية
- الوسط الحسابي

(١) المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو قيمة نموذجية يمكن أن تمثل مجموعة من البيانات بحيث تعطي دلالة معينة لتلك البيانات ، بمعنى أنه عندما ينظر الباحث (أو القارئ لتلك البيانات) ويريد أن يبحث عن شيء يربط هذه البيانات فإن تلك المتوسطات يمكن أن تعطيه بعضاً مما يريده .

وحيث أن مثل هذه القيم (المتوسطات) تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة البيانات (عند ترتيبها حسب قيمها) ، فإن هذه المتوسطات تُسمى أيضاً **بمقاييس النزعة المركزية** .

وهناك صور عديدة من هذه المقاييس وإن كان الأكثر شيوعاً :

- الوسط الحسابي (أو باختصار الوسط) .
- الوسيط
- المنوال (أو الشائع)

وغيرها ، وكل منها له مميزاته وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

وإلى جانب كونه ممثلاً لمجموعة البيانات يجب أيضاً أن تتوافر في المتوسط عدة شروط ، منها :

- أن يمكن تحديد قيمته بالضبط وتكون عملية حسابه سهلة إلى حد كبير .
- أن يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .

ومن الجدير بالذكر أن بعض هذه المقاييس يمكن تحديدها حسابياً بسهولة ، وبعضها يمكن تحديدها بيانياً بسهولة ، والبعض يمكن تحديده حسابياً وبيانياً بسهولة ، لكننا في هذا المقرر سنكتفي بالطريقة الأبسط (للطالب) عند تحديد هذه المقاييس ، وهذه الطريقة الأبسط ستختلف من مقياس لآخر .

(٢) أهمية حساب مقاييس النزعة المركزية

عند معرفتنا بتلك المتوسطات (مقاييس النزعة المركزية) يصبح أمامنا فرصة كبيرة لأن :

- ننظر لمتوسط مجموعة من البيانات لنعرف الكثير عن خصائص تلك المجموعة .
- نعقد مقارنة بين عدة مجموعات من البيانات في وقت واحد وذلك من خلال مقارنة متوسطات تلك المجموعات بعضها ببعض .

الوسط الحسابي

(١) تعريف الوسط الحسابي

يُعرف الوسط الحسابي [وسنرمز له بالرمز $\bar{x}$] لمجموعة من البيانات $x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n$ [قيم المتغير x وعددها n]

كالآتي :

الوسط الحسابي = $\dfrac{\text{مجموع قيم البيانات}}{\text{عددها}}$ أي $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$

س ١ : درجات خمسة طلاب في مقرر ما [الدرجة العظمى 20] هي : **10 , 12 , 7 , 2 , 9** . أوجد الوسط الحسابي لدرجاتهم .

ج ١ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{9+2+7+12+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

من هذا المثال البسيط يمكن ملاحظة الخصائص العامة التالية للوسط الحسابي :

- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة .
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات .
- لا يتأثر بترتيب البيانات .
- لا يُشترط أن يكون الوسط الحسابي عدداً صحيحاً ولا يُشترط أن يكون إحدى قيم البيانات ولكنه قيمة تقع بين أقل قيمة في البيانات وأكبر قيمة فيها .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [كما يتضح من السؤالين التاليين] .

س ٢ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 9

ج ٢ :

$$\frac{10+15+12+13+9}{5}=\frac{59}{5}=\underline{\underline{11.8}}$$

س ٣ : احسب الوسط الحسابي للقيم :

10 , 15 , 12 , 13 , 900

ج ٣ :

$$\frac{10+15+12+13+900}{5}=\frac{950}{5}=\underline{\underline{190}}$$

- حاصل ضرب قيمة الوسط الحسابي في عدد البيانات = مجموع قيم البيانات

وهذا واضح من تعريف الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \xrightarrow[\text{أن}]{\text{تعني}} n \times \bar{x} = \sum x$$

فمثلاً

9	2	7	12	10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

$$\underbrace{5 \times 8}_{=40} = \underbrace{9 + 2 + 7 + 12 + 10}_{=40}$$

- إذا أضفنا عدد ثابت c لكل قيمة من قيم البيانات ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم + العدد الثابت c

بيانات قديمة

9	2	7	12	10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

إضافة 1 لكل قيمة →

بيانات جديدة

10	3	8	13	11

خمس درجات وسطها الحسابي 9 [= 8 + 1]

- إذا ضربنا كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت c ، فإن :

الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي القديم x العدد الثابت c

بيانات قديمة

9	2	7	12	10

خمس درجات وسطها الحسابي 8

ضرب كل قيمة → في 1.1

بيانات جديدة

9.9	2.2	7.7	13.2	11

خمس درجات وسطها الحسابي 8.8 [= 8 x 1.1]

سلي نفسك بهذا السؤال : اعتبر نفسك مدرساً للطلاب الخمسة المذكورين في س ١ [كانت درجاتهم (من 20) كالتالي : 10 , 12 , 7 , 2 , 9] وأردت أن تحسن من الوسط الحسابي لدرجاتهم ، أيهما أفضل : أن نزيد درجة كل طالب 5 درجات أم نزيد درجة كل طالب 50% من قيمتها ؟ علل إجابتك .

أضف إجابتك هنا واحتفظ بهذه الصفحة كصفحة من صفحات المحاضرة :

(٢) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متقطعة ذات تكرارت

س : أوجد الوسط الحسابي للأرقام :

5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 5 , 3 , 3 , 6 , 6 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 2 , 2 , 8 , 8 , 8

ج : بتطبيق مباشر للتعريف :

$$\bar{x} = \frac{(5+5+5+5+5+5)+(3+3)+(6+6)+(4+4+4+4+4)+(2+2)+(8+8+8)}{20} = \frac{96}{20} = 4.8$$

لاحظ أن الرقم 5 متكرر 6 مرات ، الرقم 3 مرتان ، والرقم 6 مرتان ، والرقم 4 متكرر 5 مرات ، والرقم 2 مرتان ، والرقم 8 ثلاث مرات ، وبالتالي يمكن عمل العملية الحسابية السابقة كالآتي :

$$\bar{x} = \frac{(6 \times 5) + (2 \times 3) + (2 \times 6) + (5 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 8)}{6 + 2 + 2 + 5 + 2 + 3}$$

$$= \frac{30+6+12+20+4+24}{20} = \frac{96}{20} = \underline{\underline{4.8}}$$

وهذا يمكن إنجازه بيسر من خلال الجدول التكراري للبيانات كالتالي :

$$\frac{30+6+12+20+4+24}{20}=\frac{96}{20}$$

نعمل هذا العمود : حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها

x

المتغير x	التكرار f	fx
5	6	30
3	2	6
6	2	12
4	5	20
2	2	4
8	3	24
	20	96

$\sum f=20$ $\sum fx=96$

ده الجدول التكراري بتاعنا [مُعطى أو نعمله]

$\therefore$

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}=\frac{96}{20}=4.8$$

أي أنه في حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات يمكن حساب الوسط الحسابي من العلاقة :

$$\bar{x}=\frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات

$\sum fx$ هو مجموع حاصل ضرب كل قيمة في تكرارها

س : من مائة رقم يتكرر الرقم 4 عشرون مرة ، والرقم 5 أربعون مرة ، والرقم 6 ثلاثون مرة ، والباقي كانوا الرقم 7 . احسب الوسط الحسابي للمائة رقم .

ج : بتكوين الجدول التكراري للأرقام المذكورة ، ثم بضرب كل قيمة في تكرارها والتجميع [عمود fx] يكون الوسط الحسابي للأرقام المذكورة هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$

(٣) حساب الوسط الحسابي لبيانات كمية متصلة

عندما نتعامل مع بيانات متصلة تُعطى فيها قيم المتغير على صورة فترات ، فيمكن اعتبار أن جميع القيم داخل الفترة مطابقة لمركز الفئة ، وبالتالي يمكن استخدام الصيغة السابقة لحساب الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum f\, x_0}{\sum f}$$

حيث $\sum f$ هو مجموع التكرارات ، $\sum f\, x_0$ هو مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرار الفئة

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢–٤) [شريحة ٤ – المحاضرة الرابعة] يكون الوسط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار (بوحدات السنتيمتر) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum f\, x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = \underline{\underline{31.7}}$$

الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110
		$\sum f = 50$		$\sum f\, x_0 = 1585$

وفي مثال (٢–٦) [شريحة ١٦ – المحاضرة الخامسة] يكون الوسط الحسابي للأجر السنوي للعاملين (بآلاف الريالات) هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum f\, x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = \underline{\underline{83.75}}$$

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450
		$\sum f = 60$		$\sum f\, x_0 = 5025$

من كل ما سبق يمكن استعراض مزايا وعيوب الوسط الحسابي كالتالي :

- يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي بالضبط ، كما أن طريقة تحديده سهلة [ميزة].
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات [ميزة] .
- لا يتأثر بترتيب البيانات [ميزة] .
- يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات [عيب] .
- لا يمكن حسابه بالرسم ، أي بيانياً [عيب] .

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

(١) درجات طالب في ست امتحانات هي : 78 , 87 , 68 , 72 , 91 , 84 . أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات . [الإجابة : 80]

(٢) أوجد الوسط الحسابي للقياسات : 40.6 , 39.8 , 39.2 , 40.3 , 39.5 , 40.2 , 39.7 , 39.2 , 40.9 , 38.8 . [الإجابة : 39.82]

(٣) (أ) الأجر الشهري لأربعة موظفين (بالريال) هو : 30000 , 6500 , 6000 , 5000 . أوجد الوسط الحسابي للأجور [الإجابة 11875 ريال]

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الأجر ممثل للأجور ؟ . علل إجابتك . [الإجابة : لا] . علل أنت بقى . .

(٤) مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات ، سبع سبعات ، ثماني ثمانيات ، وتسع تسعات ، وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابي للأرقام ؟
[الإجابة : 8.25]

(٥) الجدول المرافق يعطي التوزيع التكراري لأوزان 100 طالب بوحدات الكيلوجرام . أوجد الوسط الحسابي للوزن ..

الوزن x (بالكيلو)	60 -	62 -	66 -	68 -	72 - 74
عدد الطلاب f	5	18	42	27	8

[الإجابة : 67.45]

المحاضرة الثامنة

تابع الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- الوسيط

تعريف الوسيط :

(ببساطة) يُعرف الوسيط [وسنرمز له بالرمز M] لمجموعة من القيم (المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً حسب قيمها) على أنه القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد ، أو بتعبير آخر هي القيمة التي في المنتصف

فمثلاً لمجموعة القيم : 13 , 14 , 19 , 16 , 20 , 15 , 18 , 14 , 19 [عددها ٩ قيم] ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

يكون الوسيط هو العدد الخامس [رتبة الوسيط أي ترتيبه بين القيم] وقيمته 16

ترتيب تصاعدي (من الأصغر للأكبر)

13	14	14	15	16	18	19	19	20

مجموعتان متساويتان في العدد

ترتيب تنازلي (من الأكبر للأصغر)

20	19	19	18	16	15	14	14	13

مجموعتان متساويتان في العدد

هام جدا

فرق بين رتبة الوسيط وقيمته

لاحظ هنا أن عدد القيم n [هنا = ٩] فردي وبالتالي هناك قيمة واحدة في منتصف المجموعة

أما لمجموعة القيم : 12 , 13 , 14 , 19 , 16 , 20 , 15 , 18 , 14 , 19 [عددها ١٠ قيم (أي زوجي) حيث أضفنا القيمة 12 للمجموعة السابقة] ، إذا قمنا بترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

ترتيب تصاعدي
(من الأصغر للأكبر)

12 13 14 14 15 16 18 19 19 20

الوسيط هو الوسط الحسابي
للقيمتين بالمنتصف

مجموعتان متساويتان في العدد

ترتيب تنازلي
(من الأكبر للأصغر)

20 19 19 18 16 15 14 14 13 12

الوسيط هو الوسط الحسابي
للقيمتين بالمنتصف

مجموعتان متساويتان في العدد

في هذه الحالة توجد قيمتان بالمنتصف وهما القيمة الخامسة والقيمة السادسة [وهما العددان 16 , 15] ، عندئذ يكون الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين القيمتين ، أي :

$$\frac{15 + 16}{2} = 15.5$$

إذن من السابق يمكن استنتاج **طريقة حساب الوسيط لمجموعة من القيم** كالآتي :

- قم أولاً بترتيب البيانات **تصاعدياً** أو **تنازلياً** .
- حدد ما إذا كانت هناك قيمة واحدة بالمنتصف أم قيمتين ، وهذا يتوقف على قيمة n حيث n عدد القيم

فإذا كانت n فردية

كانت هناك قيمة **واحدة** في المنتصف رتبتها

$$\frac{n+1}{2}$$

وتكون هذه القيمة هي **الوسيط**

فمثلاً

$n = 5$

9	2	7	12	10

ترتيب تصاعدي

2	7	9	10	12

هناك قيمة **واحدة** في المنتصف رتبتها :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

أي القيمة **الثالثة** . وتكون تلك القيمة هي الوسيط . أي أن :

الوسيط = 9

تذكر :

الوسط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\frac{9+2+7+12+10}{5} = 8$$

وإذا كانت n زوجية

كانت هناك **قيمتان** في المنتصف رتبتهما

$$\frac{n}{2} \quad , \quad \frac{n}{2}+1$$

ويكون الوسط الحسابي لهاتين القيمتين هو **الوسيط**

فمثلاً

$n = 6$

9	2	7	12	10	500

ترتيب تصاعدي

2	7	9	10	12	500

هناك قيمتان في المنتصف رتبتهما :

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad 3+1=4$$

أي القيمتان **الثالثة والرابعة** ، وتكون قيمة **الوسيط** هي الوسط الحسابي لهاتين القيمتين ، أي :

$$\frac{9+10}{2} = 9.5$$

الوسط الحسابي لهذه القيم هو

$$\frac{9+2+7+12+10+500}{6} = 90$$

وواضح تأثره كثيراً بالقيمة المتطرفة 500

هل لاحظت أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة 500

مثال : مجموعة الأرقام 9 7 6 6 5 4 3 3 2 وسيطها هو 5 [عدد القيم $n = 9$ (فردي)]

تذكر : الوسط الحسابي لهذه القيم هو : $\bar{x} = \frac{2+3+3+4+5+6+6+7+9}{9} = 5$

مثال آخر : مجموعة الأرقام 18 15 12 11 9 7 5 5 وسيطها هو $\frac{9+11}{2} = 10$ [$n = 8$ (زوجي)]

تذكر : الوسط الحسابي لهذه القيم هو : $\bar{x} = \frac{5+5+7+9+11+12+15+18}{8} = 10.25$

في السؤال [سلي نفسك – المحاضرة السابعة – شريحة ١٤ – س١] : كانت درجات طالب في ٦ اختبارات هي :

84 , 91 , 72 , 68 , 87 , 78

وطلبنا حساب الوسط الحسابي للدرجات ، أضف لهذا حساب وسيط هذه الدرجات ، وحدد أيهما تفضل (كمتوسط) ولماذا ؟

الوسط الحسابي لدرجات الطالب هو : $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{84+91+72+68+87+78}{6} = \frac{480}{6} = 80$

ولتحديد الوسيط لابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) : 68 , 72 , 78 , 84 , 87 , 91

وحيث أن عدد القيم زوجي ، إذن هناك قيمتان في المنتصف [هما 78 , 84] وسطهما الحسابي $\frac{78+84}{2} = 81$ = الوسيط

لاحظ في السؤال السابق أن كلاً من المتوسطين : الوسط الحسابي و الوسيط من السهل حسابهما ومن الممكن أن يمثل كل منهما مقياساً للنزعة المركزية للبيانات ، لكن الأفضل (نسبياً هنا) أن نستخدم الوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية للبيانات حيث أنه يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات ، بينما يهتم الوسيط بقيم البيانات في المنتصف (وذلك بعد ترتيبها) .

مثال : الأجر (بالريال) في الساعة لخمسة عاملين في مكتب هو : 37 , 92 , 32 , 39 , 25 . احسب الوسط الحسابي للأجور ووسيط هذه الأجور . أيهما تفضل كمقياس لمتوسط أجر الساعة ؟ ولماذا ؟

الوسط الحسابي للأجور هو : $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25+39+32+92+37}{5} = \frac{225}{5} = 45$

أما لتحديد الوسيط ، فلابد أولاً من ترتيب القيم (تصاعدياً مثلاً) : 92 , 39 , 37 , 32 , 25

وحيث أن عدد القيم فردي ، إذن هناك قيمة واحدة في المنتصف [هي 37] وهي الوسيط

لاحظ في السؤال السابق أن الوسط الحسابي (بالرغم من عدم احتياجه لترتيب القيم وفي نفس الوقت يأخذ في الاعتبار جميع قيم البيانات) إلا أنه تأثر جداً بالقيمة المتطرفة 92 ، في حين لم يتأثر بها الوسيط لأنه يعتمد على البيانات في المنتصف . لذا يُفضل هنا استخدام الوسيط كمقياس للنزعة المركزية حيث يعطي دلالة أفضل لمتوسط الأجور من الوسط الحسابي .

والآن ماذا عن الوسيط لبيانات كمية متصلة

أعتقد أننا نستطيع تحديده بسهولة [حيث نوهنا لذلك في الباب الثاني] فهو :

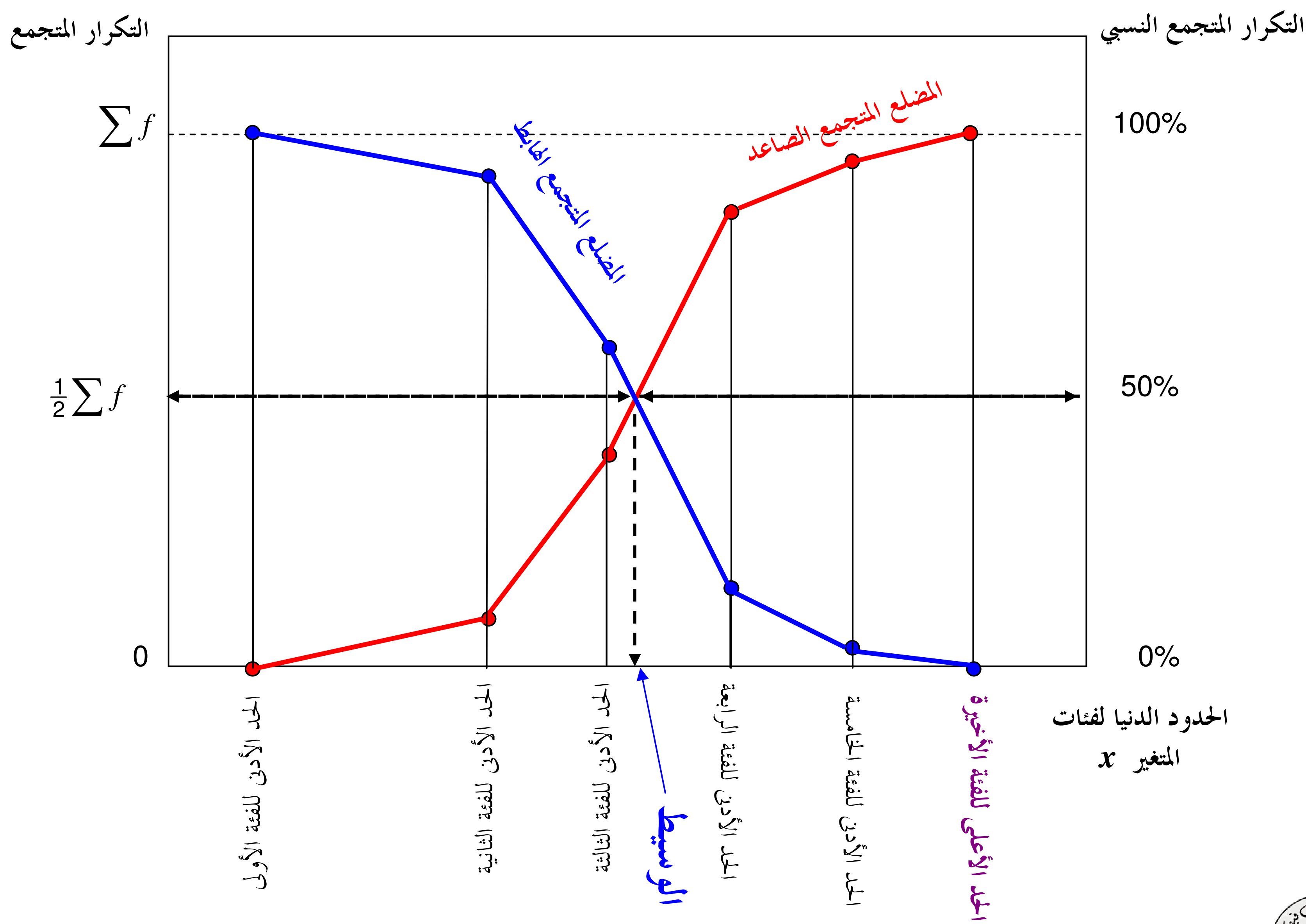
- قيمة المتغير المناظرة لنقطة تقاطع المضلعين : المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط للبيانات .

أو
- القيمة التي يناظرها تكرار متجمع = نصف مجموع التكرارات

أو
- القيمة التي يناظرها تكرار نسبي متجمع = 50%

طريقة تحديد الوسيط من :

* من المضلع المتجمع الصاعد فقط
* من المضلع المتجمع الهابط فقط .
* من المضلعين معاً



مثال : في دراسة جغرافية لعدد من مساحات مجموعة من الأراضي لمنطقة سكنية بالرياض تبين أن التوزيع التكراري لها كما هو مبين .

المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط لمساحة الأراضي .

المساحة (بالفدان)	عدد قطع الأراضي
1 -	14
3 -	29
5 -	18
7 - 10	9

المتغير x هنا هو مساحة الأرض (بالفدان) ، في حين يمثل عدد قطع الأراضي **التكرار** f .

أولاً : الوسط الحسابي : نستكمل الجدول التكراري كما هو مبين :

الجدول التكراري

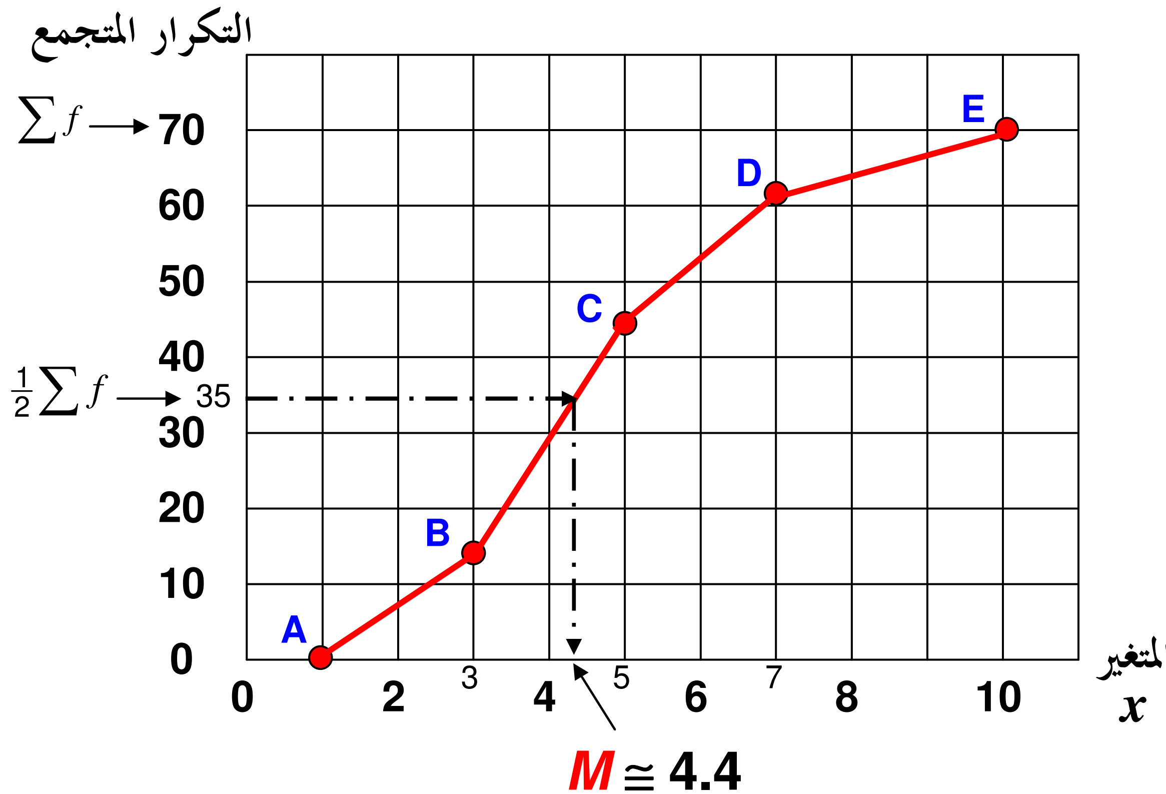
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f	المركز x_0	$f\,x_0$
الأولى	$1 \le x < 3$	14	2	28
الثانية	$3 \le x < 5$	29	4	116
الثالثة	$5 \le x < 7$	18	6	108
الرابعة	$7 \le x < 10$	9	8.5	76.5
		$\sum f = 70$		$\sum f\,x_0 = 328.5$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum f\,x_0}{\sum f} = \frac{328.5}{70} = 4.692857143 \cong \underline{\underline{4.7}}$$

ثانياً : الوسيط : نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد [أو الهابط]

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

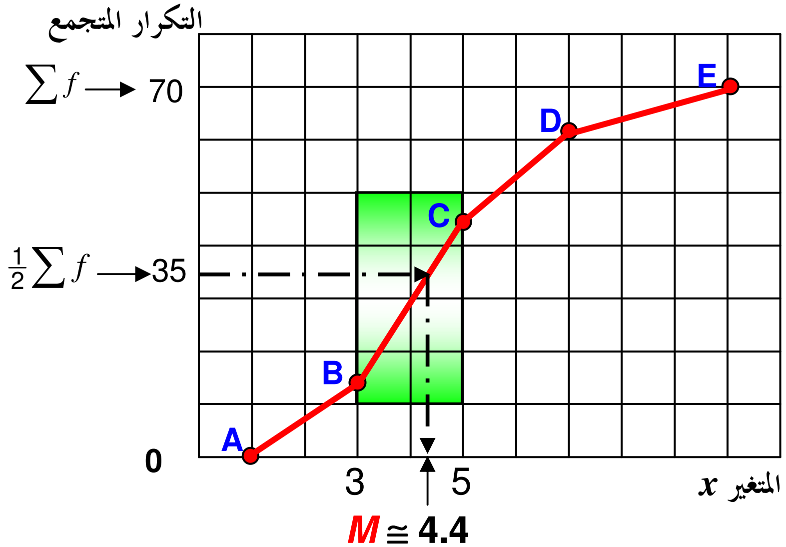
الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)



كده انتهى السؤال ، أي أن الوسط الحسابي للمساحة $\cong$ 4.7

والوسيط $\cong$ 4.4

لكن هناك ملحوظة هامة جداً مش عارف أنت لاحظتها أم لا



الوسيط يقع بين النقطتين B(3 , 14) , C(5 , 43) [أي داخل الفئة $[3 \le x < 5$ هذه الفئة تُسمى بـــ **الفئة الوسيطية**

أي أن الفئة الوسيطية هي تلك الفئة التي يقع داخلها الوسيط

وهنا يتبادر إلى الذهن سؤالان هامان :

السؤال الأول : هل من الممكن تحديد الفئة الوسيطية من الجدول التكراري مباشرةً أم لازم نعمل الجدول التكراري المتجمع الصاعد ونرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

السؤال الثاني : هل من الممكن [بعد تحديد الفئة الوسيطية] تحديد الوسيط من الجدول التكراري مباشرة دون الحاجة للجدول التكراري المتجمع الصاعد أو المضلع التكراري المتجمع الصاعد ؟ .

والإجابة على السؤالين : نعم يمكن تحديد الفئة الوسيطية من الجدول التكراري مباشرةً ، ثم بعد ذلك يمكن أيضاً من هذا الجدول التكراري تحديد قيمة الوسيط دون أن نحتاج لعمل جدول تكراري متجمع صاعد ورسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ، **وتعالي نشوف إزاي**

بالنسبة للسؤال الأول [تحديد الفئة الوسيطة]

(١) احسب أولاً نصف مجموع التكرارات .

(٢) ابدأ بالرقم صفر في ذهنك وزود تكرارات الفئات على التوالي وكل مرة قارن بنصف مجموع التكرارات السابق . أول ما يزيد الناتج عن نصف المجموع السابق أو يساويه يبقى آخر فئة زودنا تكرارها تكون هي الفئة الوسيطة .

يالله نشوف

- احسب $\frac{1}{2}\sum f$: $\xleftarrow[\text{طلع ..}]{\text{ماشي يا عم}}$ $\frac{1}{2}\sum f = \frac{70}{2} = 35$
- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر السابق تكرار الفئة الأولى [14] ينتج 14

14 أقل من 35 ، يبقى الفئة الأولى ليست الفئة الوسيطة

- نزود على الـــ 14 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [29] ينتج 43

43 أكبر من 35 ، يبقى الفئة الثانية هي الفئة الوسيطة

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

وبالنسبة للسؤال الثاني [تحديد الوسيط (بعد ما حددنا الفئة الوسيطية)]

(١) حدد الحد الأدنى للفئة الوسيطية وأيضاً طولها .

(٢) احسب ما يُسمى بــ "التكرار المتجمع السابق" = مجموع تكرار الفئات السابقة للفئة الوسيطية

(٣) احسب الوسيط من العلاقة :

الوسيط M = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + [(نصف مجموع التكرارات − التكرار المتجمع السابق) / تكرار الفئة الوسيطية × طول الفئة الوسيطية]

يالله نشوف

الجدول التكراري		
الفئة	المتغير (المساحة) x	التكرار f
الأولى	$1 \le x < 3$	14
الثانية	$3 \le x < 5$	29
الثالثة	$5 \le x < 7$	18
الرابعة	$7 \le x < 10$	9
		$\sum f = 70$

الفئة الوسيطية

- الفئة الوسيطية هي الفئة الثانية :

حدها الأدنى 3 وطولها 2 [= 3 − 5] وتكرارها 29

- التكرار المتجمع السابق :

يساوي مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطية [أي تكرار الفئة الأولى فقط] = 14

- بالتعويض في القانون السابق : [ونعمل الحسابات واحدة واحدة الله يسترها معاكم]

$$M = 3 + \left[\frac{35 - 14}{29} \times 2\right] = 3 + \left[\frac{21}{29} \times 2\right] = 3 + 1.44827 = 4.44827 \cong 4.4$$

تُسمى الطريقة الحسابية السابقة (لحساب الوسيط) بـــ "طريقة الاستكمال"

مثال جميل : طُلب من ٣ مشرفين بإحدى المدارس تقسيم طلبة المدرسة إلى ٣ مجموعات متساوية على أن يقوم كل مشرف بتقديم بيان عن فئات العمر المَختلفة لطلبة مجموعته وعدد الطلبة في كل فئة من فئات العمر ، فكانت الجداول التكرارية المبينة :

المجموعة (١)

الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٢)

الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٣)

الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

هل يمكن من خلال البيانات السابقة حساب الوسط الحسابي لعمر الطلبة في كل مجموعة ؟ علل إجابتك . وإذا كانت الإجابة بـــ "لا" احسب مقياساً مناسباً يُعطي دلالة لمتوسط العمر في كل مجموعة .

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

الإجابة هي " لا " للمجموعات الثلاث [أي لا يمكن حساب الوسط الحسابي للعمر] ، وها هي الأسباب :

- في المجموعة الأولى : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من أسفل]
- في المجموعة الثانية : الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من أعلى]
- في المجموعة الثالثة : الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف وأيضاً الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف [يُقال للجدول عندئذٍ أنه مفتوح من الطرفين]

مثل هذه الجداول تُسمى جداول تكرارية مفتوحة :

- من أسفل [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف]
- من أعلى [إذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف]
- من الطرفين [إذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروفين]

وحيث أن الوسيط لأي مجموعة من البيانات يعتمد في حسابه على البيانات الموجودة في المنتصف ، إذن يمكن استخدام الوسيط كمتوسط للدلالة على متوسط العمر في كل مجموعة :

بالنسبة للمجموعة الأولى من الطلبة :

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$15 \le x < 18$	18
		$\sum f = 98$

تحديد الفئة الوسيطة :

- احسب $\frac{1}{2}\sum f$: $\frac{1}{2}\sum f = \frac{98}{2} = 49$
- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر تكرار الفئة الأولى [20] ينتج 20 [أقل من 49]
- نزود على الــ 20 الأخيرة تكرار الفئة الثانية [25] ينتج 45 [أيضاً أقل من 49]
- نزود على الــ 45 الأخيرة تكرار الفئة الثالثة [35] ينتج 80 [أكبر من 49]

إذن الفئة الثالثة هي الفئة الوسيطة

تحديد الوسيط :

- الحد الأدنى للفئة الوسيطية = 12
- طول الفئة الوسيطية = 3 [15 – 12 =]
- تكرار الفئة الوسيطية = 35
- التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات السابقة للفئة الوسيطية

[أي الفئتين الأولى والثانية] = 25 + 20 = 45 . إذن

المجموعة (١)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	x < 6	20
الثانية	6 ≤ x < 12	25
الثالثة	12 ≤ x < 15	35
الرابعة	15 ≤ x < 18	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطية ← (الثالثة)

$$M = 12 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] = 12 + \left[\frac{4}{35} \times 3\right] = 12 + 0.342857 = 12.342857 \cong \underline{\underline{12.3}}$$

وبنفس الطريقة يمكن التعامل مع المجموعتين (٢) ، (٣) ، وعليك التأكد من صحة الحل

المجموعة (٢)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$6 \le x < 12$	20
الثانية	$12 \le x < 15$	25
الثالثة	$15 \le x < 18$	35
الرابعة	$x \ge 18$	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطية ← (الثالثة)

$$M = 15 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] \cong \underline{\underline{15.3}}$$

المجموعة (٣)		
الفئة	العمر x	العدد f
الأولى	$x < 6$	20
الثانية	$6 \le x < 12$	25
الثالثة	$12 \le x < 15$	35
الرابعة	$x \ge 15$	18
		$\sum f = 98$

الفئة الوسيطية ← (الثالثة)

$$M = 12 + \left[\frac{(49-45)}{35} \times 3\right] \cong \underline{\underline{12.3}}$$

سلي نفسك بهذا السؤال : سبق وحسبنا الوسط الحسابي لأطوال سيقان الأزهار [مثال (٢-٤)/محاضرة ٧/ص١٣] وكان 31.7 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأطوال وكان 32 تقريباً . أيضاً سبق وحسبنا الوسط الحسابي للأجر السنوي لمجموعة من العمال [مثال (٢-٦)/محاضرة ٧/ص١٣] وكان 83.75 تقريباً وحسبنا الوسيط (بيانياً) للأجور وكان 80 تقريباً . والآن مطلوب من سعادتك حساب الوسيط للمثالين بطريقة الاستكمال السابقة ومقارنة الحلول ببعضها .

لمساعدتك على الحل وتنظيم تفكيرك قم باستكمال البيانات الناقصة في المثالين

مثال (٢-٤)

الجدول التكراري

الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \le x < 20$	4
الثانية	$20 \le x < 30$	16
الثالثة	$30 \le x < 35$	12
الرابعة	$35 \le x < 40$	10
الخامسة	$40 \le x < 50$	6
السادسة	$50 \le x < 60$	2
		$\sum f = 50$

الفئة الوسيطية هي : ....

حدها الأدنى .... وطولها هو .... وتكرارها ....

التكرار المتجمع السابق = ...

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 32.1 تقريباً

مثال (٢-٦)

الجدول التكراري

الفئة	المتغير (الأجر) x	التكرار f
الأولى	$50 \le x < 60$	6
الثانية	$60 \le x < 70$	9
الثالثة	$70 \le x < 80$	15
الرابعة	$80 \le x < 90$	12
الخامسة	$90 \le x < 100$	9
السادسة	$100 \le x < 120$	6
السابعة	$120 \le x < 180$	3
		$\sum f = 60$

الفئة الوسيطية هي : ....

حدها الأدنى .... وطولها هو .... وتكرارها ....

التكرار المتجمع السابق = ...

إذن الوسيط M [وتحسبه] يطلع 80 بالضبط

المحاضرة التاسعة

تابع الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- المنوال
- العلاقة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، الوسيط ، المنوال
- مقارنة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، الوسيط ، المنوال
- مراجعة على كل ما تقدم من المحاضرة السابعة حتى المنوال

من خلال مسائل "سلي نفسك" المتروكة لسعادتك

تعريف المنوال [الشائع] :

يُعرف المنوال لمجموعة من القيم على أنه القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعاً [لذا يُسمى في بعض الأحيان بالــــ "الشائع"] . وأحياناً يُرمز للمنوال بالرمز $\hat{X}$

فمثلاً :

مجموعة القيم 18 12 11 10 10 9 9 9 7 5 2 2 لها منوال 9

ومجموعة القيم 16 15 12 10 8 5 3 9 ليس لها منوال [أو عديمة المنوال]

ومجموعة القيم 9 7 7 7 5 5 4 4 4 3 2 لها منوالان 7 , 4

أي أن مجموعة القيم قد تكون وحيدة المنوال [لها منوال واحد] ، وقد تكون عديدة المنوال [منوالان أو أكثر] وقد تكون عديمة المنوال [لا يوجد لها منوال]

أما مجموعة القيم 7 7 6 6 5 5 4 4 فقد تتسرع وتقول أنها رباعية المنوال ومناولها : 7 , 6 , 5 , 4

لكن [حيث أن جميع القيم لها نفس التكرار] هذه المجموعة الأخيرة عديمة المنوال

والمنوال [مقارنةً بالوسط الحسابي والوسيط] به العديد من العيوب منها :

- أنه لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات ولكنه يهتم فقط بالقيم الأكثر تكراراً .
- أنه قد لا يتواجد أو قد يكون هناك أكثر من منوال للبيانات .

إلا أنه أيضاً يتميز ببعض المزايا منها :

- أنه أسرع في تحديده من الوسط والوسيط
- من الممكن تحديده للتوزيعات التكرارية للبيانات المنفصلة سواء كانت تلك البيانات كمية متقطعة أو نوعية [والبيانات الأخيرة (النوعية) لا يمكن حساب الوسط الحسابي لها أو الوسيط]

بيانات منفصلة

درجات طلاب في مقرر الإحصاء	
عدد الطلاب	درجة الطالب
28	12
24	14
39	16
9	18

بيانات كمية متقطعة

لها منوال وحيد وهو "الدرجة 16"

درجات طلاب في مقرر الإنجليزي	
عدد الطلاب	درجة الطالب
23	12
30	14
30	16
17	18

بيانات كمية متقطعة

لها منوالان وهما "14 , 16"

درجات طلاب في مقرر الفقه	
عدد الطلاب	درجة الطالب
25	12
25	14
25	16
25	18

بيانات كمية متقطعة

ليس لها منوال

سيارات في أحد المواقف	
عدد السيارات	لون السيارة
10	أحمر R
23	أزرق B
12	أبيض W
5	أصفر Y

بيانات نوعية

لها منوال وهو "اللون الأزرق"

وماذا عن التوزيعات التكرارية للبيانات الكمية المتصلة

الموضوع في غاية البساطة :

• حدد الفئة المنوالية [وهي الفئة التي يناظرها أكبر كثافة تكرار]
• حدد المنوال [وهو (تقريباً) مركز الفئة المنوالية]

فمثلاً في التوزيع التكراري المبين [مثال (٢-٤)/المحاضرة ٤/شريحة ٤]

	الجدول التكراري				
	المتغير x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
الفئة الثانية	$20 \le x < 30$	16	10	25	1.6
الفئة الثالثة	$30 \le x < 35$	12	5	32.5	2.4
الفئة الرابعة	$35 \le x < 40$	10	5	37.5	2
الفئة الخامسة	$40 \le x < 50$	6	10	45	0.6
الفئة السادسة	$50 \le x < 60$	2	10	55	0.2
		$\sum f = 50$			

أكبر كثافة تكرار

إذن الفئة المنوالية هي الفئة الثالثة

والمنوال = 32.5

وبالرغم من هذه البساطة إلا أن هناك تنبيه و تحذير

بالنسبة للتنبيه : فالطريقة السابقة [اعتبار أن مركز الفئة المنوالية هو المنوال] هي طريقة تقريبية ، لكن هناك طرق أخرى حسابية وبيانية تعطي تقريباً أكثر دقة ، لكننا لن نتطرق لهذه الطرق في هذا المكان وذلك للتبسيط

وبالنسبة للتحذير : فالفئة المنوالية هي الفئة التي يناظرها أكبر كثافة تكرار وليس أكبر تكرار ، ويتفق اللفظان "أكبر كثافة تكرار" و "أكبر تكرار" فقط إذا كانت أطوال الفئات واحدة .

فمثلاً في المثال السابق ، إذا قلنا أن الفئة المنوالية هي الفئة المناظرة لأكبر تكرار فستكون تلك الفئة هي الفئة الثانية [وهذا خطأ جسيم]

في حين أن الفئة المنوالية هي الفئة الثالثة [كما سبق وبينا] .

	الجدول التكراري				
	المتغير x	التكرار f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
الفئة المنوالية [خطأ جسيم] ← الفئة الثانية	$20 \le x < 30$	16	10	25	1.6
الفئة المنوالية [كده صح] ← الفئة الثالثة	$30 \le x < 35$	12	5	32.5	2.4
الفئة الرابعة	$35 \le x < 40$	10	5	37.5	2
الفئة الخامسة	$40 \le x < 50$	6	10	45	0.6
الفئة السادسة	$50 \le x < 60$	2	10	55	0.2
		$\sum f = 50$			

وإليك بعض الحالات التي قد تخدعك

س : في كل حالة من الحالات التالية حدد المنوال

حالة (١) [أنظر الجدول التكراري (١)] :

الجدول التكراري (١)

	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
الفئة الثانية	$20 \le x < 30$	18	10	25	1.8
الفئة الثالثة	$30 \le x < 45$	18	15	37.5	1.2
الفئة الرابعة	$45 \le x < 55$	8	10	50	0.8

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :

التوزيع : ثنائي المنوال ، والفئات المنوالية هي الثانية والثالثة ، والمنوالان هما 25 و 37.5 [مراكز فئات المنوال] . خطأ

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار :

التوزيع : وحيد المنوال ، والفئة المنوالية هي الثانية ، والمنوال هو 25 [مركز الفئة المنوالية] . كده صح [يحميك يا بني]

حالة (٢) [أنظر الجدول التكراري (٢)] :

الجدول التكراري (٢)

	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
الفئة الثانية	$20 \le x < 60$	8	40	40	0.2
الفئة الثالثة	$60 \le x < 70$	2	10	75	0.2
الفئة الرابعة	$70 \le x < 75$	1	5	72.5	0.2

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :

التوزيع : وحيد المنوال ، والفئة المنوالية هي الثانية ، والمنوال هو 40 [مركز الفئة المنوالية] . خطأ

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار :

التوزيع : عديم المنوال [أي ليس هناك منوال] كده صح [يحميك يا بنتي]

حالة (٣) [أنظر الجدول التكراري (٣)] :

	الجدول التكراري (٣)				
	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 5$	4	5	2.5	0.8
الفئة الثانية	$5 \le x < 15$	16	10	10	1.6
الفئة الثالثة	$15 \le x < 20$	8	5	17.5	1.6
الفئة الرابعة	$20 \le x < 60$	20	40	40	0.5

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :

التوزيع : وحيد المنوال ، والفئة المنوالية هي الرابعة ، والمنوال هو 40 [مركز الفئة المنوالية] . خطأ

أما الإجابة الصحيحة فهي التي تعتمد على كثافة التكرار وليس التكرار :

التوزيع : ثنائي المنوال ، والفئات المنوالية هي الثانية و الثالثة ، والمنوالان هما 10 و 17.5 [مراكز الفئات المنوالية] .

كده صح [برافو عليك يا بنتي]

حالة (٤) [أنظر الجدول التكراري (٤)] :

	الجدول التكراري (٤)				
	x	f	طول الفئة	مركز الفئة	كثافة التكرار
الفئة لأولى	$0 \le x < 10$	18	10	5	1.8
الفئة الثانية	$10 \le x < 20$	20	10	15	2
الفئة الثالثة	$20 \le x < 30$	25	10	25	2.5
الفئة الرابعة	$30 \le x < 40$	12	10	35	1.2

إذا اعتمدنا في ردنا على التكرار فستكون الإجابة :

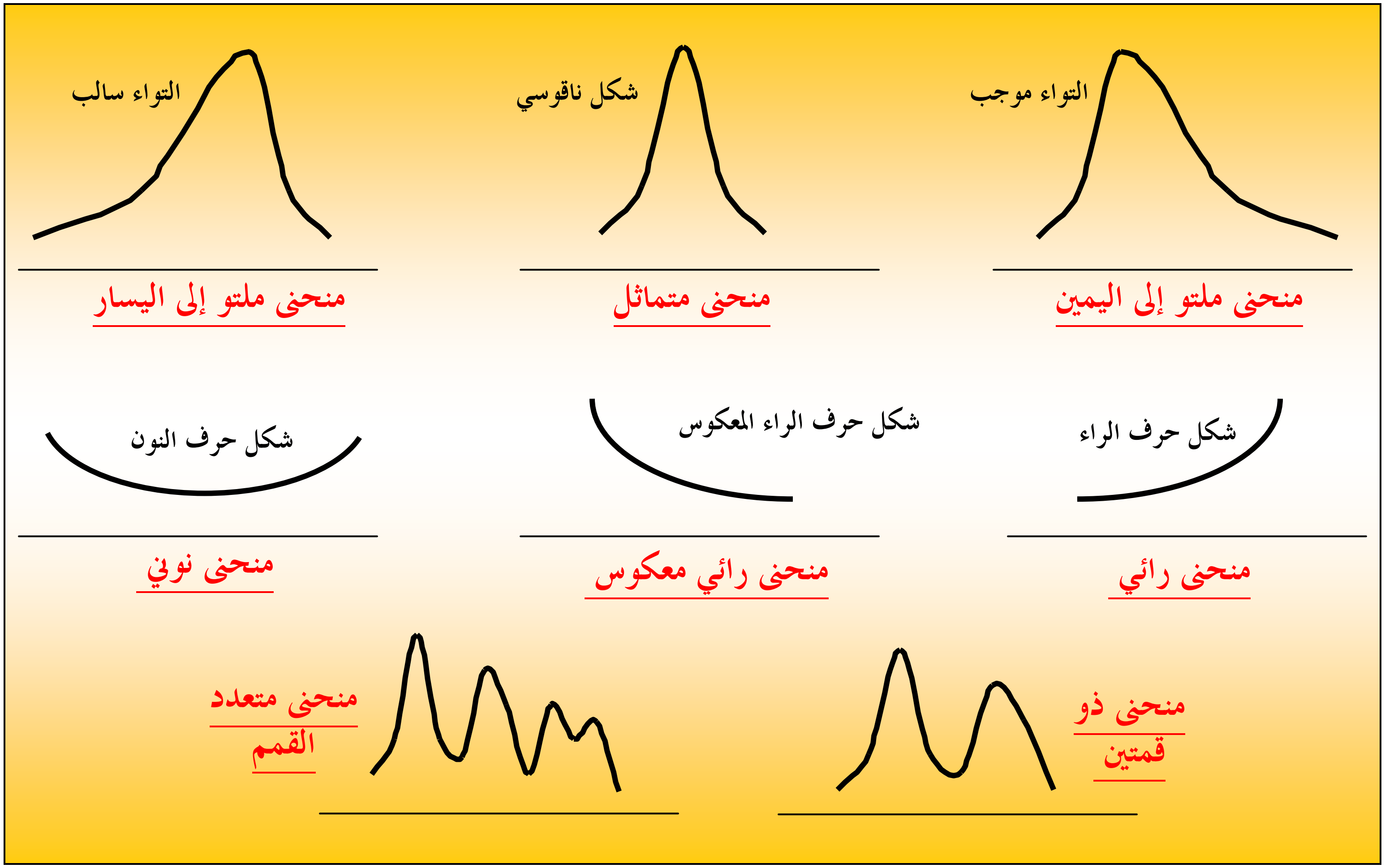
التوزيع : وحيد المنوال ، والفئة المنوالية هي الثالثة ، والمنوال هو 25 [مركز الفئة المنوالية] . صح

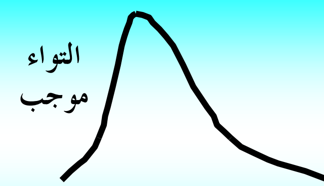
طيب ليه هنا صح ؟ لأن الفئات متساوية الأطوال ، وبالتالي الفئة ذات أكبر كثافة تكرار هي نفسها الفئة ذات أكبر تكرار

تأكد من ذلك بنفسك يا بني

علاقة اعتبارية (تقريبية) بين المتوسطات الثلاثة : الوسط والوسيط والمنوال

المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالاً مميزة كالأشكال التالية :





منحنى ملتو إلى اليمين

منحنى ملتو إلى اليسار

منحنى متماثل

منحنى رائي

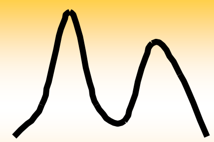
منحنى رائي معكوس

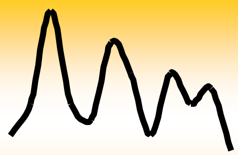
قد يكون المنحنى قريباً من التماثل لكن أحد طرفيه يمتد أكثر من الآخر على جانبي مركز النهاية العظمي . فإذا كان الطرف الأيمن أطول يكون المنحنى في هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين ، بينما لو كان العكس صحيحاً يكون ملتوياً إلى اليسار

في المنحنى التكراري المتماثل تكون النهاية العظمى في المنتصف وتكون المشاهدات المتساوية البعد عن مركز النهاية العظمى لها نفس التكرارات

في المنحنيات ذات الشكل الرائي أو الرائي المعكوس فإن نقطة النهاية العظمى للمنحنى تقع عند أحد طرفي المنحنى

منحنى نوني


منحنى ذو قمتين


منحنى متعدد القمم

والمنحنى النوني له نهاية عظمى عند كلٍ من طرفيه

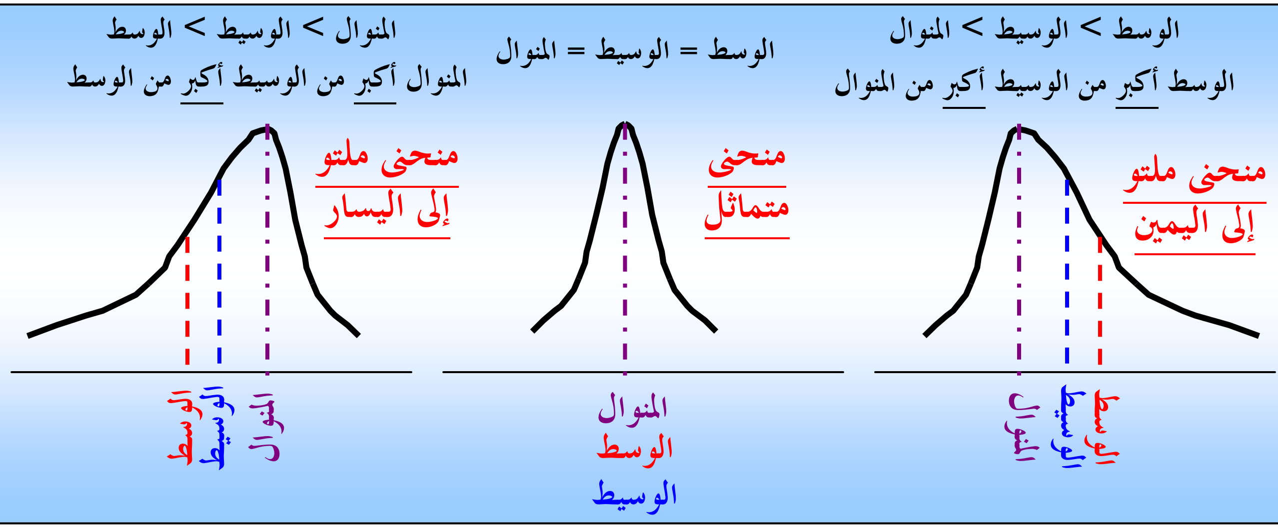
والمنحنى ذو القمتين له نهايتان عظمتان

والمنحنى متعدد القمم له أكثر من نهايتين عظمتين

في جميع المنحنيات المبينة ، لاحظ الآتي

المنوال هو القيمة المناظرة لأعلى نقطة في المنحنى

الوسيط يقع دائماً بين الوسط و المنوال



والمنحنيات التكرارية **وحيدة المنوال والبسيطة الالتواء** تحقق العلاقة الاعتبارية التالية :

$$\text{الوسط} - \text{المنوال} = \text{٣} \times (\text{الوسط} - \text{الوسيط})$$

وهذه العلاقة يمكن وضعها على أي صورة من الصور التالية

$$\text{الوسط} = \frac{(\text{٣} \times \text{الوسيط}) - \text{المنوال}}{\text{٢}}$$

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون الوسيط و المنوال معلومان ونريد معرفة الوسط الحسابي

$$\text{المنوال} = (\text{٣} \times \text{الوسيط}) - (\text{٢} \times \text{الوسط})$$

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون الوسط الحسابي و الوسيط معلومان ونريد معرفة المنوال

$$\text{الوسيط} = \frac{(\text{٢} \times \text{الوسط}) + \text{المنوال}}{\text{٣}}$$

وهذه الصورة مفيدة عندما يكون الوسط الحسابي و المنوال معلومان ونريد معرفة الوسيط

- فمثلاً إذا كان المنوال لمجموعة من القيم = 95 ، والوسيط لها = 85 ، فإن :

$$\text{الوسط} = \frac{(٣ \times \text{الوسيط}) - \text{المنوال}}{٢} = \frac{(٣ \times ٨٥) - ٩٥}{٢} = \frac{٢٢٥ - ٩٥}{٢} = \frac{١٦٠}{٢} = ٨٠$$

- وإذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = 80 ، والوسيط لها = 85 ، فإن :

$$\text{المنوال} = (٣ \times \text{الوسيط}) - (٢ \times \text{الوسط}) = (٣ \times ٨٥) - (٢ \times ٨٠) = ٢٥٥ - ١٦٠ = ٩٥$$

- وإذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = 80 ، والمنوال لها = 95 ، فإن :

$$\text{الوسيط} = \frac{(٢ \times \text{الوسط}) + \text{المنوال}}{٣} = \frac{(٢ \times ٨٠) + ٩٥}{٣} = \frac{١٦٠ + ٩٥}{٣} = \frac{٢٥٥}{٣} = ٨٥$$

سؤال متروك إجابته لك : المنحنى التكراري للبيانات المذكورة في أيٍ من الأمثلة السابقة :

○ ملتو لليمين ○ ملتو لليسار ○ متماثل

الإجابة موجودة في الصفحة السابقة [على وجه التحديد] وعليك استخراجها

مقارنة بين المتوسطات الثلاثة : الوسط ، الوسيط ، المنوال

الوسط الحسابي

مزاياه :

- سهولة حسابه
- يأخذ في الاعتبار جميع البيانات
- لا يحتاج إلى ترتيب معين للبيانات

عيوبه :

- يتأثر بشدة بالقيم المتطرفة
- لا يمكن إيجاده بالرسم [بيانياً]
- لا يمكن حسابه في حالات التوزيعات التكرارية المفتوحة

الأكثر استخداماً

الوسيط

مزاياه :

- سهولة حسابه حسابياً أو بيانياً
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة
- يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة

عيوبه :

- يحتاج إلى ترتيب للبيانات أولاً
- لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات

يفضل استخدامه في الحالات التي لا نستطيع فيها حساب الوسط الحسابي

المنوال

مزاياه :

- سهولة حسابه
- لا يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة
- لا يحتاج لترتيب البيانات

عيوبه :

- قد لا يتواجد وقد يكون له أكثر من قيمة

أقل مقاييس النزعة المركزية استخداماً

يمكن حسابها للبيانات الكمية

في بعض الحالات يمكن تحديده للبيانات النوعية

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

في كلٍ من المسائل من (١) حتى (٥) أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الوسيط M ، المنوال $\hat{X}$.

(١) 3 , 5 , 2 , 6 , 5 , 9 , 5 , 2 , 8 , 6 الإجابة : $\bar{x}=5.1, M=5, \hat{X}=5$

(٢) 5 , 4 , 8 , 3 , 7 , 2 , 9 الإجابة : $\bar{x}=5.4, M=5, \hat{X}=-$ [الـ "–" تعني "غير موجود"]

(٣) 18.3 , 20.6 , 19.3 , 22.4 , 20.2 , 18.8 , 19.7 , 20.0 الإجابة : $\bar{x}=19.2, M=19.9, \hat{X}=-$

(٤) 85 , 76 , 93 , 82 , 94 الإجابة : $\bar{x}=86, M=85, \hat{X}=-$

(٥) 6 [ست مرات] ، 7 [سبع مرات] ، 8 [ثماني مرات] ، 9 [تسع مرات] ، 10 [عشر مرات] الإجابة : $\bar{x}=8.25, M=8, \hat{X}=10$

---

(٦) الجدول التكراري المرافق يبين توزيع أقطار رؤوس مسامير x [بالمليمتر] منتجة بواسطة شركة ما . احسب الوسط الحسابي ، الوسيط ، والمنوال للأقطار

الإجابة : $\bar{x}=26.20, M=85, \hat{X}=22.50$

الجدول التكراري

	x	f
الفئة لأولى	$10 \le x < 15$	3
الفئة الثانية	$15 \le x < 20$	7
الفئة الثالثة	$20 \le x < 25$	16
الفئة الرابعة	$25 \le x < 30$	12
الفئة الخامسة	$30 \le x < 35$	9
الفئة السادسة	$35 \le x < 40$	5
الفئة السابعة	$40 \le x < 45$	2
		54

مراجعة على الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية [المحاضرات ٧ ، ٨ ، ٩]

من خلال مسائل "سلي نفسك" المتروكة لسعادتك في المحاضرات ٧ ، ٨ ، ٩

يُرجى قبل الانتقال للشريحة التالية أن يكون الطالب/الطالبة قد راجع المحاضرات من السابعة حتى الشريحة الحالية حتى تكون المراجعة القادمة مجدية . وبالله التوفيق

سؤال [سلي نفسك] – المحاضرة ٧ – شريحة ٩ : اعتبر نفسك مدرساً للطلاب الخمسة المذكورين في س ١ [كانت درجاتهم (من 20) كالتالي : 10 , 12 , 7 , 2 , 9] وأردت أن تحسن من الوسط الحسابي لدرجاتهم ، أيهما أفضل : أن نزيد درجة كل طالب 5 درجات أم نزيد درجة كل طالب 50% من قيمتها ؟ علل إجابتك .

إضافة 5 لكل قيمة

الدرجات القديمة:

10	12	7	2	9

خمس درجات وسطها الحسابي 8

الدرجات الجديدة:

15	17	12	7	14

خمس درجات وسطها الحسابي :

$$\frac{14+7+12+17+15}{5}=\frac{65}{5}=13$$

أبو وليد مذاكر كويس بس بيشك في نفسه كثير : حا يحل إزاي ؟

حا يحل كده

بضرب كل قيمة في 1.5

الدرجات القديمة:

10	12	7	2	9

خمس درجات وسطها الحسابي 8

الدرجات الجديدة:

15	18	10.5	3	13.5

خمس درجات وسطها الحسابي :

$$\frac{13.5+3+10.5+18+15}{5}=\frac{60}{5}=12$$

بالمقارنة : فإن إضافة 5 درجات لكل طالب ستحسن الوسط الحسابي للدرجات بصورة أفضل من زيادة كل درجة من الدرجات بنسبة 50% من قيمتها

الوسط الحسابي لدرجات الطلاب هو : $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{9+2+7+12+10}{5}=\frac{40}{5}=8$

وعند إضافة 5 لكل درجة يصبح الوسط الجديد : 8 + 5 = 13

أما إذا أضفنا لكل درجة 50% من قيمتها ، أي ضربنا كل قيمة في $1.5=\frac{150}{100}$

يصبح الوسط الجديد : 8 x 1.5 = 12 . إذن الأسلوب الأول أفضل لتحسين الوسط الحسابي .

أم وليد بقى واحدة متمكنة حا تحل إزاي

حا تحل كده

تصفيق حاد من أبو وليد

سلي نفسك : المحاضرة ٧ – شريحة ١٤ – س ٢ : ما هو الوسط الحسابي للقياسات

38.8 , 40.9 , 39.2 , 39.7 , 40.2 , 39.5 , 40.3 , 39.2 , 39.8 , 40.6

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{38.8+40.9+39.2+39.7+40.2+39.5+40.3+39.2+39.8+40.6}{10}=\frac{398.2}{10}=\underline{\underline{39.82}}$$

سلي نفسك : المحاضرة ٧ – شريحة ١٤ – س ٣ : الوسط الحسابي للأجور : **5000 , 6000 , 6500 , 30000** هو :

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{5000+6000+6500+30000}{4}=\frac{47500}{4}=\underline{\underline{11875}}$$

وهو لا يمكن أن يكون ممثلاً للأجور نظراً لتأثره بالقيمة (المتطرفة) **30000**

سلي نفسك : المحاضرة ٧ – شريحة ١٤ – س ٤ : الوسط الحسابي لــ **6** ستات ، **7** سبعات ، **8** ثمانيات ، **9** تسعات ، **10** عشرات

هو :

$$\bar{x}=\frac{\sum f\,x}{\sum f}=\frac{(6\times6)+(7\times7)+(8\times8)+(9\times9)+(10\times10)}{6+7+8+9+10}=\frac{36+49+64+81+100}{40}=\frac{330}{40}=\underline{\underline{8.25}}$$

ويمكنك الحل بعمل جدول تكراري [لكن لا يستدعي الأمر ذلك] .

x	f	fx
6	6	36
7	7	49
8	8	64
9	9	81
10	10	100
	40	330

$\sum f=40$ $\sum fx=330$

$$\bar{x}=\frac{\sum f\,x}{\sum f}=\frac{330}{40}=\underline{\underline{8.25}}$$

سلي نفسك : المحاضرة ٧ – شريحة ١٤ – س ٥ :

للبيانات المجمعة (بيانات كمية متصلة) المعطاة [والمبينة أمامك] يمكن حساب الوسط الحسابي كالتالي :

الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	مركز الفئة x_0	fx_0
الأولى	$60 \le x < 62$	5	61	305
الثانية	$62 \le x < 66$	18	64	1152
الثالثة	$66 \le x < 68$	42	67	2814
الرابعة	$68 \le x < 72$	27	70	1890
الخامسة	$72 \le x < 74$	8	73	584
		$\sum f = 100$		$\sum f\, x_0 = 6745$

$$\bar{x} = \frac{\sum f\, x_0}{\sum f} = \frac{6745}{100} = \underline{\underline{67.45}}$$

سلي نفسك : المحاضرة ٩ – شريحة ١٥ : أوجد الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الوسيط M ، المنوال $\hat{X}$ للبيانات التالية :

(١) 3 , 5 , 2 , 6 , 5 , 9 , 5 , 2 , 8 , 6

(٢) 5 , 4 , 8 , 3 , 7 , 2 , 9

(٣) 18.3 , 20.6 , 19.3 , 22.4 , 20.2 , 18.8 , 19.7 , 20.0

(٤) 85 , 76 , 93 , 82 , 94

(٥) 6 [ست مرات] ، 7 [سبع مرات] ، 8 [ثماني مرات] ، 9 [تسع مرات] ، 10 [عشر مرات]

(١) 3 , 5 , 2 , 6 , 5 , 9 , 5 , 2 , 8 , 6

الوسط : $\bar{x} = \frac{3+5+2+6+5+9+5+2+8+6}{10} = 5.1$

الوسيط : البيانات الأصلية : 3 , 5 , 2 , 6 , 5 , 9 , 5 , 2 , 8 , 6

البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً : 2 , 2 , 3 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6 , 8 , 9 [عددها 10 (زوجي) ، إذن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الخامسة و السادسة]

$\therefore \quad M = \frac{5+5}{2} = 5$

المنوال : القيمة الأكثر تكراراً : 3 , 5 , 2 , 6 , 5 , 9 , 5 , 2 , 8 , 6 $\leftarrow \quad \hat{X} = 5$

---

(٢) 5 , 4 , 8 , 3 , 7 , 2 , 9

الوسط : $\bar{x} = \frac{5+4+8+3+7+2+9}{7} = 5.42857 \cong 5.43$

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 8 , 9 [عددها 7 (فردي) ، إذن الوسيط هو القيمة الرابعة] $\therefore \quad M = 5$

المنوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد

---

(٣) 18.3 , 20.6 , 19.3 , 22.4 , 20.2 , 18.8 , 19.7 , 20.0

الوسط : $\bar{x} = \frac{18.3+20.6+19.3+22.4+20.2+18.8+19.7+20}{8} = 19.9125 \cong 19.91$

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 18.3 , 18.8 , 19.3 , 19.7 , 20 , 20.2 , 20.6 , 22.4 [عددها 8 (زوجي) ، إذن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الرابعة و الخامسة]

$\therefore \quad M = \frac{19.7+20}{2} = 19.85$

المنوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد

(٤) 85 , 76 , 93 , 82 , 94

الوسط : $\bar{x} = \frac{85+76+93+82+94}{5} = \underline{\underline{86}}$

الوسيط : البيانات بعد الترتيب : 76 , 82 , 85 , 93 , 94 [عددها 5 (فردي) ، إذن الوسيط هو القيمة الثالثة] $\therefore \; M = \underline{\underline{85}}$

المنوال : القيمة الأكثر تكراراً : لا يوجد

---

(٥) 6 [ست مرات] ، 7 [سبع مرات] ، 8 [ثماني مرات] ، 9 [تسع مرات] ، 10 [عشر مرات]

الوسط = 8.25

x	f
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
	40

$\sum f = 40$

[سبق حله/شريحة ١٨/هذه المحاضرة]

الوسيط : عدد القيم n هنا هو مجموع التكرارات [أي $\sum f = 40$] زوجي ، وبالتالي هناك قيمتان في المنتصف ترتيبهما 20 , 21 ، وبالتالي يكون الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين العشرين و الواحد وعشرين

وهاتان القيمتان هما 8 , 8 [كيف عرفتهما] ؟ $\therefore \; M = \frac{8+8}{2} = \underline{\underline{8}}$

عرفتهما كده :

القيم مرتبة ←	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	....
رتبتها ←	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	....

+7 +8

لأن أصغر القيم هو 6 ومتكررة ست مرات ، إذن سيتم ترتيبهم من الأول إلى السادس ، يلي القيم 6 القيمة 7 وتكرارها سبع ، إذن سيتم ترتيبهم من السابع حتى الثالث عشر ، يلي القيم 7 القيمة 8 وتكرارها ثمانية ، إذن سيتم ترتيبهم من الرابع عشر حتى الواحد والعشرون ، إذن القيم ذات الترتيب 20 , 21 ستكون 8 , 8 .

المنوال : هو القيمة الأكثر تكراراً : $\hat{X} = \underline{\underline{10}}$

سلي نفسك : المحاضرة ٩ – شريحة ١٥ : الجدول التكراري المرافق يبين توزيع أقطار رؤوس مسامير x (بالمليمتر) منتجة بواسطة إحدى الشركات . المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للأقطار .

الوسط : لتحديد الوسط ، لابد من تحديد مراكز الفئات أولاً ثم اتباع نفس الخطوات السابق اتباعها في الشريحة (١٩) من هذه المحاضرة ، فيكون :

$$\bar{x} = \frac{\sum f\, x_0}{\sum f} = \frac{1415}{54} = 26.2037037 \cong \underline{\underline{26.20}}$$

	x	f	x_0	fx_0
الفئة لأولى	$10 \le x < 15$	3	12.5	37.5
الفئة الثانية	$15 \le x < 20$	7	17.5	122.5
الفئة الثالثة	$20 \le x < 25$	16	22.5	360
الفئة الرابعة	$25 \le x < 30$	12	27.5	330
الفئة الخامسة	$30 \le x < 35$	9	32.5	292.5
الفئة السادسة	$35 \le x < 40$	5	37.5	187.5
الفئة السابعة	$40 \le x < 45$	2	42.5	85
		54		1415

المنوال : هنا الفئات متساوية الطول وبالتالي تكون الفئة المنوالية هي الفئة التي يناظرها أكبر تكرار [لأن "أكبر تكرار" يناظره في هذا السؤال "أكبر كثافة تكرار"]

واخد بالك وواخدة بالك

	x	f	
الفئة لأولى	$10 \le x < 15$	3	
الفئة الثانية	$15 \le x < 20$	7	
الفئة الثالثة	$20 \le x < 25$	16	← الفئة المنوالية
الفئة الرابعة	$25 \le x < 30$	12	
الفئة الخامسة	$30 \le x < 35$	9	
الفئة السادسة	$35 \le x < 40$	5	
الفئة السابعة	$40 \le x < 45$	2	
		54	

إذن الفئة المنوالية هنا هي الفئة الثالثة ومركزها [22.5] هو تقريباً المنوال

الوسيط : حسابياً [طريقة الاستكمال]

- احسب $\frac{1}{2}\sum f$: $\frac{1}{2}\sum f = \frac{54}{2} = 27$
- نبدأ بالصفر [في ذهننا]
- نزود على الصفر السابق تكرار الفئة الأولى [3] ينتج 3 [وهي أقل من 27]
- نزود على الـــ 3 السابقة تكرار الفئة الثانية [7] ينتج 10 [ما زال أقل من 27]

الفئة	x	f
لأولى	$10 \le x < 15$	3
الثانية	$15 \le x < 20$	7
الثالثة	$20 \le x < 25$	16
الرابعة	$25 \le x < 30$	12
الخامسة	$30 \le x < 35$	9
السادسة	$35 \le x < 40$	5
السابعة	$40 \le x < 45$	2
		54

- نزود على الـــ 10 السابقة تكرار الفئة الثالثة [16] ينتج 26 [ما زال أقل من 27]
- نزود على الـــ 26 السابقة تكرار الفئة الرابعة [12] ينتج 38 [أكبر من 27]

إذن الفئة الرابعة هي الفئة الوسيطية

حدها الأدنى 25 وطولها 5 [= 25 – 30] ، وتكرارها 12

- التكرار المتجمع السابق = مجموع تكرارات الفئات الأولى والثانية والثالثة = 3 + 7 + 16 = 26

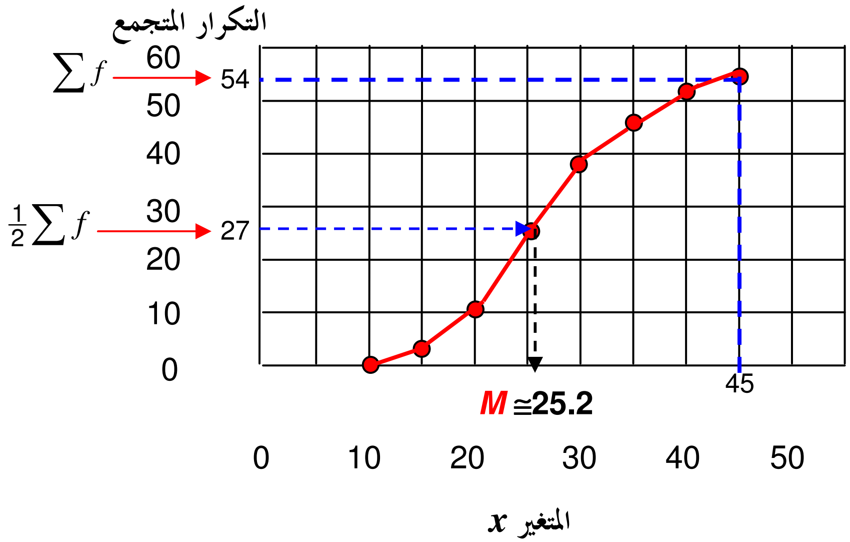
$$M = 25 + \left[\frac{(27-26)}{12} \times 5\right] = 25 + \left[\frac{1}{12} \times 5\right] = 25 + 0.41666$$

$$= 25.416666 \cong 25.42$$

الوسيط : بيانياً [المضلع التكراري المتجمع الصاعد]

- نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد .
- ومنه نرسم المضلع المتجمع الصاعد.
- تكون قيمة الوسيط هي قيمة المتغير x المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{2}\sum f = 27$

x	f متجمع	النقطة
$x < 10$	0	(10 , 0)
$x < 15$	3	(15 , 3)
$x < 20$	10	(20 , 10)
$x < 25$	26	(25 , 26)
$x < 30$	38	(30 , 38)
$x < 35$	47	(35 , 47)
$x < 40$	52	(40 , 52)
$x < 45$	54	(45 , 54)



المحاضرة العاشرة

الباب الرابع
مقاييس التشتت

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

تعريف التشتت

مقاييس التشتت

- المدى
- الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات)
- الانحراف المعياري

تعريف التشتت

الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للانتشار حول قيمة متوسطة (أحد مقاييس النزعة المركزية) تُسمى تشتت أو تغير البيانات

فمثلاً إذا كان لدينا ٣ مجموعات من الطلاب ، كل مجموعة مكونة من خمسة طلاب ، وكانت لها الدرجات التالية (من ١٠ درجات) في أحد المقررات

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة
5 , 5 , 5 , 5 , 5	3 , 4 , 5 , 6 , 7	1 , 2 , 5 , 8 , 9
وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5

المجموعات الثلاثة لها وسط حسابي 5 ، لكن في المجموعة الأولى : جميع القيم متساوية وتساوي الوسط 5 ، في حين تنتشر البيانات في المجموعة الثانية حول هذا الوسط بقدرٍ ما ، وفي المجموعة الثالثة تنتشر البيانات حول الوسط بقدرٍ آخر .

أي أن الوسط الحسابي وحده [وهو ممثل لمقياس نزعة مركزية ، أي قيمة نموذجية ممثلة للبيانات] ليس كافياً وحده لوصف البيانات ، ولكن لابد من وجود نوع آخر من المقاييس لرصد مدى تشتت البيانات عن تلك القيمة المتوسطة الممثلة للبيانات .

هذا النوع من المقاييس هو ما نسميه بـــ **مقاييس التشتت** .

وهناك العديد من المقاييس التي يمكن استخدامها لقياس هذا التشتت ولكن أكثرها شيوعاً :

المدى – الانحراف المتوسط – الانحراف المعياري – الانحراف الربيعي

ولنتعرف على كلٍ منها الآن

أولاً : المدى R :

مدى مجموعة من البيانات الكمية هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأقل قيمة فيها

فمثلاً لمجموعة القيم : 15 3 7 6 12 18 5 3 13 15 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$

ولمجموعة القيم : 16 3 14 15 17 18 17 13 14 16 يكون المدى : $R = 18 - 3 = 15$

أي أن المدى واحد للمجموعتين في حين يبدو للعين المجردة أن هناك تشتت للبيانات أكبر في المجموعة الأولى عنه في المجموعة الثانية ، مما يعني أن المدى هنا لا يظهر هذا الفارق . لذا يُعد المدى **مقياساً للتشتت** لكنه **غير جيد** في كثير من الأحيان .

وبالرغم من بساطة تحديده إلا أن بعض العيوب [مثل تأثره بالقيم المتطرفة كما اتضح من المثال السابق عند حسابه للمجموعة الثانية حيث تأثر بالقيمة المتطرفة 3] ، فإذا استبعدنا تلك القيمة يكون المدى مساوياً لــ : $R = 18 - 13 = 5$.

أيضاً من بين عيوبه أنه لا يمكن تحديده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

الفئة	العمر x
الأولى	$2 \le x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

$R = 18 - 2 = 16$

الحد الأعلى للفئة الأخيرة — الحد الأدنى للفئة الأولى

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

مفتوح من أسفل

الفئة	العمر x
الأولى	$6 \le x < 12$
الثانية	$12 \le x < 15$
الثالثة	$15 \le x < 18$
الرابعة	$x \ge 18$

مفتوح من أعلى

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$x \ge 15$

مفتوح من الطرفين

لا يمكن تحديد مدى البيانات

ثانياً : الانحراف المتوسط [أو متوسط الانحرافات] M.D

يُعرف الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) [وسنرمز له بالرمز M.D] على أنه متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن قيمة متوسطة للبيانات [عادةً تكون الوسط الحسابي أو الوسيط] .

فإذا اعتبرنا أن القيمة المتوسطة للبيانات هي الوسط الحسابي ، فإن الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات عددها n يُعطى بـــ

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad \text{أو} \quad M.D = \frac{\sum |d|}{n}$$

الانحراف عن الوسط $d = x - \bar{x}$ ، عدد القيم n

ملحوظة هامة : القيمة المطلقة لأي عدد y هي القيمة العددية له دون إشارة ، ونرمز له بنفس الرمز y لكن بين خطين رأسيين | | ، أي نكتب القيمة المطلقة لــ y على الصورة $|y|$. فمثلاً :

$|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|2.5| = 2.5$, $|-3.25| = 3.25$

وهكذا .

حيث $d = x - \bar{x}$ هي انحراف القيمة x عن الوسط الحسابي ، $|d|$ هي القيمة المطلقة للانحراف d .

إذن لحساب الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) M.D لمجموعة من القيم يلزم حساب الوسط الحسابي أولاً ، ثم نحسب انحرافات كل قيمة من هذه القيم عن الوسط الحسابي ، ثم القيم المطلقة لهذه الانحرافات ، ثم متوسط هذه القيم المطلقة كما هو مبين :

احسب الوسط الحسابي ← ثم ← احسب الانحرافات عن الوسط ← ثم ← احسب القيم المطلقة للانحرافات ← ثم ← احسب متوسط القيم المطلقة

فمثلاً : لمجموعتي القيم التي تعاملنا معها في الشريحة (٥) من هذه المحاضرة [عندما تعرفنا على "المدى"] :

لمجموعة القيم الأولى :

	15	3	7	6	12	18	5	3	13	15
	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7	- 9.7
الانحرافات عن الوسط	5.3	-6.7	-2.7	-3.7	2.3	8.3	-4.7	-6.7	3.3	5.3
القيم المطلقة للانحرافات	5.3	6.7	2.7	3.7	2.3	8.3	4.7	6.7	3.3	5.3

وسطها الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{15+13+3+5+18+12+6+7+3+15}{10} = 9.7$$

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات :

$$M.D = \frac{5.3+3.3+6.7+4.7+8.3+2.3+3.7+2.7+6.7+5.3}{10} = \underline{\underline{4.9}}$$

ولمجموعة القيم الثانية :

	16	3	14	15	17	18	17	13	14	16
	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3	-14.3
الانحرافات عن الوسط	1.7	-11.3	-0.3	0.7	2.7	3.7	2.7	-1.3	-0.3	1.7
القيم المطلقة للانحرافات	1.7	11.3	0.3	0.7	2.7	3.7	2.7	1.3	0.3	1.7

وسطها الحسابي :

$$\frac{16+14+13+17+18+17+15+14+3+16}{10} = 14.3$$

لاحظ أن مجموع الانحرافات = صفر

إذن الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات :

$$M.D = \frac{1.7+0.3+1.3+2.7+3.7+2.7+0.7+0.3+11.3+1.7}{10} = \underline{\underline{2.64}}$$

أي أن الانحراف المتوسط للمجموعة الثانية من القيم أقل من الانحراف المتوسط للمجموعة الأولى من القيم مما يعني أن المجموعة الثانية أقل تشتتاً من المجموعة الأولى وهذا ما لم يمكن ملاحظته عند استخدام المدى كمقياس للتشتت

ويمكن أن يتم حل السؤال السابق وذلك بتنظيم خطواتنا من خلال جداول كالتالي :

المجموعة الأولى [n = 10]			
x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$
15	9.7	15 – 9.7 = 5.3	5.3
13	9.7	13 – 9.7 = 3.3	3.3
3	9.7	3 – 9.7 = -6.7	6.7
5	9.7	5 – 9.7 = -4.7	4.7
18	9.7	18 – 9.7 = 8.3	8.3
12	9.7	12 – 9.7 = 2.3	2.3
6	9.7	6 – 9.7 = -3.7	3.7
7	9.7	7 – 9.7 = -2.7	2.7
3	9.7	3 – 9.7 = -6.7	6.7
15	9.7	15 – 9.7 = 5.3	5.3
97	97	0	49
$\sum x$ =	$n\bar{x}$	$\sum d$	$\sum \lvert d \rvert$

مجموع الأعمدة

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{97}{10} = 9.7$$

$$M.D = \frac{\sum \lvert d \rvert}{n} = \frac{49}{10} = 4.9$$

المجموعة الثانية [n = 10]			
x	$\bar{x}$	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$
16	14.3	16 – 14.3 = 1.7	1.7
14	14.3	14 – 14.3 = -0.3	0.3
13	14.3	13 – 14.3 = -1.3	1.3
17	14.3	17 – 14.3 = 2.7	2.7
18	14.3	18 – 14.3 = 3.7	3.7
17	14.3	17 – 14.3 = 2.7	2.7
15	14.3	15 – 14.3 = 0.7	0.7
14	14.3	14 – 14.3 = -0.3	0.3
3	14.3	3 – 14.3 = -11.3	11.3
16	14.3	16 – 14.3 = 1.7	1.7
143	143	0	26.4
$\sum x$ =	$n\bar{x}$	$\sum d$	$\sum \lvert d \rvert$

مجموع الأعمدة

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{143}{10} = 14.3$$

$$M.D = \frac{\sum \lvert d \rvert}{n} = \frac{26.4}{10} = 2.64$$

ويمكن الاستغناء
عن هذا العمود

• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد الانحراف المتوسط $M.D$ من العلاقة :

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f}$$

أي نضرب القيمة المطلقة لانحراف كل قيمة [عن الوسط] في تكرارها ، ثم نقسم الناتج على مجموع التكرارات

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المتوسط للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f
4	20
5	40
6	30
7	10

هذا هو السؤال

وإليك الجواب

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

من هنا بداية الحل

خاص بحساب الوسط الحسابي

$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$	$f \times \|d\|$
4 – 5.3 = -1.3	1.3	20 × 1.3 = 26
5 – 5.3 = -0.3	0.3	40 × 0.3 = 12
6 – 5.3 = 0.7	0.7	30 × 0.7 = 21
7 – 5.3 = 1.7	1.7	10 × 1.7 = 17
		$\sum f\|d\| = 76$

$$M.D = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

انتبه :

مجموع الانحرافات هنا [والذي يجب أن يساوي صفراً] هو $\sum fd$ وليس $\sum d$ [حقق ذلك بنفسك]

وهذا الجزء يُضاف إذا كان مطلوباً حساب الانحراف المتوسط

وبالتالي يكون الحل [بصورة ملخصة] كالتالي :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f \times \lvert d \rvert$
4	20	80	4 – 5.3 = -1.3	1.3	20 × 1.3 = 26
5	40	200	5 – 5.3 = -0.3	0.3	40 × 0.3 = 12
6	30	180	6 – 5.3 = 0.7	0.7	30 × 0.7 = 21
7	10	70	7 – 5.3 = 1.7	1.7	10 × 1.7 = 17
	100	530			76
	$\sum f = 100$	$\sum fx = 530$			$\sum f \lvert d \rvert$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

$$M.D = \frac{\sum f \lvert d \rvert}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

• وفي حالة البيانات الكمية المتصلة : تُستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المتوسط ***M.D*** ، أي يكون

$$\boxed{M.D = \frac{\sum f \times \lvert d \rvert}{\sum f}}$$ حيث $\boxed{d = x_0 - \bar{x}}$ ، x_0 تمثل مراكز الفئات

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثالين التوضيحيين (٢–٤) ، (٢–٦) بالباب الثاني [المحاضرة ٤/شريحة ٤ ، المحاضرة ٥/شريحة ١٦] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي لهما [المحاضرة ٧/شريحة ١٣] ، نقوم بعمل أعمدة إضافية للجداول تمكننا من حساب الانحراف المتوسط للبيانات كالتالي :

مثال (٢–٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d\rvert$	$f \times \lvert d\rvert$
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40	10 – 31.7 = -21.7	21.7	86.8
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400	25 – 31.7 = -6.7	6.7	107.2
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390	32.5 – 31.7 = 0.8	0.8	9.6
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375	37.5 – 31.7 = 5.8	5.8	58
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270	45 – 31.7 = 13.3	13.3	79.8
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110	55 – 31.7 = 23.3	23.3	46.6
		50		1585			388
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d\rvert$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = 31.7$$

$$M.D = \frac{\sum f\lvert d\rvert}{\sum f} = \frac{388}{50} = 7.76$$

وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢–٦)

مثال (٢–٦) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d\rvert$	$f \times \lvert d\rvert$
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330	55 – 83.75 = -28.25	28.25	169.5
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585	65 – 83.75 = -18.75	18.75	168.75
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125	75 – 83.75 = -8.75	8.75	131.25
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020	85 – 83.75 = 1.25	1.25	15
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855	95 – 83.75 = 11.25	11.25	101.25
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660	110 – 83.75 = 26.25	26.25	157.5
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450	150 – 83.75 = 66.25	66.25	198.75
		60		5025			942
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d\rvert$

مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = 83.75$$

$$M.D = \frac{\sum f\lvert d\rvert}{\sum f} = \frac{942}{60} = 15.7$$

ثالثاً : الانحراف المعياري s

يُعرف متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي على أنه تباين مجموعة البيانات [ويُرمز له بالرمز s^2] ، ويُعرف الجذر التربيعي للتباين على أنه الانحراف المعياري للبيانات [ويُرمز له بالرمز s] ، أي أن :

التباين $= \frac{\sum d^2}{n} = s^2$ ومنه يكون ← الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{s^2} = s$

فمثلاً في المثال المذكور في الشريحة ٥ [والذي سبق حساب كلٍ من المدى والانحراف المتوسط للبيانات المعطاة] يكون "

المجموعة الأولى [$n = 10$]

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
15	15 – 9.7 = 5.3	28.09
13	13 – 9.7 = 3.3	10.89
3	3 – 9.7 = -6.7	44.89
5	5 – 9.7 = -4.7	22.09
18	18 – 9.7 = 8.3	68.89
12	12 – 9.7 = 2.3	5.29
6	6 – 9.7 = -3.7	13.69
7	7 – 9.7 = -2.7	7.29
3	3 – 9.7 = -6.7	44.89
15	15 – 9.7 = 5.3	28.09
$\sum x$ = 97		$\sum d^2$ = 274.1

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 9.7$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{274.1}{10} = 27.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{27.41} \cong \underline{\underline{5.24}}$$

المجموعة الثانية [$n = 10$]

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
16	16 – 14.3 = 1.7	2.89
14	14 – 14.3 = -0.3	0.09
13	13 – 14.3 = -1.3	1.69
17	17 – 14.3 = 2.7	7.29
18	18 – 14.3 = 3.7	13.69
17	17 – 14.3 = 2.7	7.29
15	15 – 14.3 = 0.7	0.49
14	14 – 14.3 = -0.3	0.09
3	3 – 14.3 = -11.3	127.69
16	16 – 14.3 = 1.7	2.89
$\sum x$ = 143		$\sum d^2$ = 164.1

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 14.3$$

$$s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{164.1}{10} = 16.41$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16.41} \cong \underline{\underline{4.05}}$$

• وفي حالة البيانات الكمية المتقطعة ذات التكرارات :

يمكن تحديد التباين s^2 والانحراف المعياري s من :

التباين $= s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f}$

ومنه يكون

الانحراف المعياري $= \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}} = \sqrt{s^2} = s$

فمثلاً : إذا كان المطلوب حساب الانحراف المعياري للبيانات المبينة بالجدول التكراري :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f
4	20
5	40
6	30
7	10

هذا هو السؤال

وإليك الجواب

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	d^2	fd^2
4	20	80	4 – 5.3 = -1.3	1.69	20 × 1.69 = 33.8
5	40	200	5 – 5.3 = -0.3	0.09	40 × 0.09 = 3.6
6	30	180	6 – 5.3 = 0.7	0.49	30 × 0.49 = 14.7
7	10	70	7 – 5.3 = 1.7	2.89	10 × 2.89 = 28.9
	100	530			81

$\sum f = 100$ $\quad \sum fx = 530$ $\quad \sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{81}{100} = 0.81$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.81} = \underline{\underline{0.9}}$$

• **وفي حالة البيانات الكمية المتصلة :** تُستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المعياري s ، أي يكون :

التباين $= s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f}$ ومنه يكون ← الانحراف المعياري $= s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$ حيث $d = x_0 - \bar{x}$

أي أنه عند حساب الانحرافات نعتبر أن مركز أي فئة يمثل جميع القيم الموجودة في تلك الفئة

فمثلاً في المثال التوضيحي (٢-٤) بالباب الثاني [المحاضرة ٤/شريحة ٤] والذي قمنا بحساب الوسط الحسابي والانحراف المتوسط لبياناته ، يمكن حساب الانحراف المعياري لهذه البيانات كالتالي :

مثال (٢-٤) الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40	10 – 31.7 = -21.7	470.89	4 × 470.89 = 1883.56
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400	25 – 31.7 = -6.7	44.89	16 × 44.89 = 718.24
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390	32.5 – 31.7 = 0.8	0.64	12 × 0.64 = 7.68
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375	37.5 – 31.7 = 5.8	33.64	10 × 33.64 = 336.4
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270	45 – 31.7 = 13.3	176.89	6 × 176.89 = 1061.34
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110	55 – 31.7 = 23.3	542.89	2 × 542.89 = 1085.78
		50		1585			5093
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{1585}{50} = \underline{\underline{31.7}}$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{5093}{50} = 101.86$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{101.86} \cong \underline{\underline{10.09}}$$

وبنفس الأسلوب يمكن التعامل مع مثال (٢-٦) [المحاضرة ٥/شريحة ١٦]

مطلوب من سعادتك التحقق من صحة النتائج

مثال (٢-٦)

الفئة	المتغير x (الطول)	التكرار f	المركز x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	$f \times d^2$
الأولى	$50 \le x < 60$	6	55	330	55 – 83.75 = -28.25	798.06	4788.36
الثانية	$60 \le x < 70$	9	65	585	65 – 83.75 = -18.75	351.56	3164.04
الثالثة	$70 \le x < 80$	15	75	1125	75 – 83.75 = -8.75	76.56	1148.4
الرابعة	$80 \le x < 90$	12	85	1020	85 – 83.75 = 1.25	1.56	18.72
الخامسة	$90 \le x < 100$	9	95	855	95 – 83.75 = 11.25	126.56	1139.04
السادسة	$100 \le x < 120$	6	110	660	110 – 83.75 = 26.25	689.06	4134.36
السابعة	$120 \le x < 180$	3	150	450	150 – 83.75 = 66.25	4389.06	13167.18
		60		5025			27560.1
		$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum f x_0}{\sum f} = \frac{5025}{60} = \underline{\underline{83.75}}$$

$$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{27560.1}{60} \cong 459.34$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{459.34} \cong \underline{\underline{21.43}}$$

من السابق يتضح أن كلاً من الانحراف المتوسط والانحراف المعياري يعتمدا تماماً في حساباتهما على الوسط الحسابي ، وبالتالي فلهما نفس مزايا وعيوب الوسط الحسابي . أي :

المزايا : من السهل حسابهما – يأخذا في الاعتبار جميع البيانات – لا يحتاجا لترتيب معين للبيانات

العيوب : يتأثرا بشدة بالقيم المتطرفة – لا يمكن إيجادهما بالرسم (بيانياً) – لا يمكن حسابهما للتوزيعات التكرارية المفتوحة

ويمكن تلخيص كل ما يخص الوسط الحسابي والانحراف المتوسط والانحراف المعياري في الآتي :

• **للقيم المفردة :**

الوسط الحسابي = $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

الانحراف المتوسط = $M.D = \frac{\sum |d|}{n}$

التباين= $s^2 = \frac{\sum d^2}{n}$ ⟶ الانحراف المعياري = $s = \sqrt{s^2}$

قيم عددها n	الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات
x	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2
...	...	...	...
...	...	...	...
$\sum x$		$\sum \lvert d \rvert$	$\sum d^2$

• **ولتوزيع تكراري :**

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

$M.D = \frac{\sum f |d|}{\sum f}$

$s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f}$ ⟶ $s = \sqrt{s^2}$

القيم	التكرار		الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2	$f\lvert d \rvert$	fd^2
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$	$\sum fx$				$\sum f \lvert d \rvert$	$\sum fd^2$

• **وللبيانات المتصلة :**

مثل التوزيع التكراري السابق فيما عدا أن كل فئة تُمثل بمركزها

الفئات	التكرار			الانحرافات عن الوسط	القيم المطلقة للانحرافات	مربع الانحرافات		
x	f	مراكز الفئات	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2	$f\lvert d \rvert$	fd^2
...	...	x_0	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$\sum f$	...	$\sum fx$				$\sum f \lvert d \rvert$	$\sum fd^2$

خاصتان هامتان للانحراف المتوسط والانحراف المعياري :

الخاصية الأولى : إضافة عدد ثابت c لكل قيمة من قيم البيانات لا يؤثر على قيمة الانحرافين المتوسط والمعياري .

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم

الخاصية الثانية : ضرب كل قيمة من قيم البيانات في عدد ثابت c يجعل :

الانحراف المتوسط (أو المعياري) الجديد = الانحراف المتوسط (أو المعياري) القديم × القيمة المطلقة للثابت c

فمثلاً في سؤال "سلي نفسك" [المحاضرة ٧/شريحة ٩ – سؤال أم وليد وأبو وليد] ، كانت البيانات عن درجات الطلاب كالتالي :

بعد ضرب كل درجة في 1.5

x	d	$\|d\|$	d^2
13.5	1.5	1.5	2.25
3	-9	9	81
10.5	-1.5	1.5	2.25
18	6	6	36
15	3	3	9
60		21	130.5

بعد إضافة 5 لكل درجة

x	d	$\|d\|$	d^2
14	1	1	1
7	-6	6	36
12	-1	1	1
17	4	4	16
15	2	2	4
65		14	58

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{65}{5}=\underline{\underline{13}}$$

$$M.D=\frac{\sum |d|}{n}=\frac{14}{5}=\underline{\underline{2.8}}$$

$$s^2=\frac{\sum d^2}{n}=\frac{58}{5}=11.6$$

$$s=\sqrt{11.6}\cong\underline{\underline{3.4}}$$

الدرجات الأصلية

x	d	$\|d\|$	d^2
9	1	1	1
2	-6	6	36
7	-1	1	1
12	4	4	16
10	2	2	4
40		14	58

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{40}{5}=\underline{\underline{8}}$$

$$M.D=\frac{\sum |d|}{n}=\frac{14}{5}=\underline{\underline{2.8}}$$

$$s^2=\frac{\sum d^2}{n}=\frac{58}{5}=11.6$$

$$s=\sqrt{11.6}\cong\underline{\underline{3.4}}$$

التكملة هنا

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{60}{5}=\underline{\underline{12}}$$

$$s^2=\frac{\sum d^2}{n}=\frac{130.5}{5}=26.1 \longrightarrow s=\sqrt{26.1}\cong\underline{\underline{5.1}} \longleftarrow (3.4\times1.5)$$

$$M.D=\frac{\sum |d|}{n}=\frac{21}{5}=\underline{\underline{4.2}} \longleftarrow (2.8\times1.5)$$

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله [حل الأسئلة التالية يُعد بمثابة ملخص لكل ما تقدم ، وللمساعدة أكمل الجداول المعطاة كنوع من تنظيم حلك]

(١) أوجد المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم :

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل :

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = ... – ...... = ...
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{..........}{..........} = ...$
- التباين $s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{..........} = ...$

x	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	d^2
5			
3			
8			
4			
7			
6			
12			
4			
3			
8			
$\sum x$		$\sum \lvert d \rvert$	$\sum d^2$

الإجابة :

$R = 9$, $\bar{x} = 6$, $M.D = 2.2$, $s^2 = 7.2$, $s \cong 2.68$

(٢) أوجدى المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	8	2	4	6
التكرار f	20	30	35	15

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
8	20						
2	30						
4	35						
6	15						
	$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f\lvert d\rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = ... – ...... = ...
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\lvert d\rvert}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{..........} = ...$

الإجابة: $s \cong 2.18$, $s^2 = 4.75$, $M.D = 1.85$, $\bar{x} = 4.5$, $R = 6$

(٣) أوجدي R، $\bar{x}$، $M.D$ ، s^2 ، s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	$5 \le x < 15$	$15 \le x < 25$	$25 \le x < 45$	$45 \le x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

الحل :

الجدول التكراري								
المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
$5 \le x < 15$	20							
$15 \le x < 25$	30							
$25 \le x < 45$	40							
$45 \le x < 55$	10							
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d \rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = ... – ...... = ...

- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx_0}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$

- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\lvert d \rvert}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$

- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{..........}{..........} = ...$

- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{..........} = ...$

الإجابة : $R = 50$, $\bar{x} = 27$, $M.D = 11$, $s^2 = 151$, $s \cong 12.29$

المحاضرة الحادية عشرة

تابع الباب الرابع
[مقاييس التشتت]

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- حل مسائل "سلي نفسك" الموجودة بالمحاضرة العاشرة
- تابع مقاييس التشتت
  - الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]
  - المدى المئيني
- علاقات اعتبارية بين مقاييس التشتت
- التشتت النسبي ومقاييسه
- الدرجات المعيارية

(١) أوجد المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم :

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل :

عدد القيم n يساوي 10

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = 12 – 3 = 9
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{10} = 6$
- الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{22}{10} = 2.2$
- التباين $s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{76}{10} = 7.6$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7.6} \cong 2.76$

x	d	$\lvert d\rvert$	d^2
5	-1	1	1
3	-3	3	9
8	2	2	4
4	-2	2	4
7	1	1	1
6	0	0	0
12	6	6	36
4	-2	2	4
3	-3	3	9
8	2	2	4
60		22	76
$\sum x$		$\sum \lvert d\rvert$	$\sum d^2$

(٢) أوجدى المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	8	2	4	6
التكرار f	20	30	35	15

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
8	20	160	8 – 4.5 = 3.5	3.5	20 × 3.5 = 70	12.25	245
2	30	60	2 – 4.5 = -2.5	2.5	30 × 2.5 = 75	6.25	187.5
4	35	140	4 – 4.5 = -0.5	0.5	35 × 0.5 = 17.5	0.25	8.75
6	15	90	6 – 4.5 = 1.5	1.5	15 × 1.5 = 22.5	2.25	33.75
	100	450			185		475
	$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f\lvert d \rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = 8 – 2 = 6
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{450}{100} = 4.5$
- الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f\lvert d \rvert}{\sum f} = \frac{185}{100} = 1.85$
- التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{475}{100} = 4.75$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.75} \cong 2.18$

(٣) أوجدي R، $\bar{x}$، $M.D$ ، s^2 ، s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	$5 \le x < 15$	$15 \le x < 25$	$25 \le x < 45$	$45 \le x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d \rvert$	$f\lvert d \rvert$	d^2	fd^2
$5 \le x < 15$	20	10	200	10 – 27 = -17	17	20 × 17 = 340	289	5780
$15 \le x < 25$	30	20	600	20 – 27 = -7	7	30 × 7 = 210	49	1470
$25 \le x < 45$	40	35	1400	35 – 27 = 8	8	40 × 8 = 320	64	2560
$45 \le x < 55$	10	50	500	50 – 27 = 23	23	10 × 23 = 230	529	5290
	100		2700			1100		15100
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d \rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى= 55 – 5 = 50

- الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{2700}{100} = 27$

- الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum f\lvert d \rvert}{\sum f} = \frac{1100}{100} = 11$

- التباين $s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{15100}{100} = 151$

- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{151} \cong 12.29$

رابعاً : الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]

لمجموعة من البيانات يُعرف الانحراف الربيعي [أو نصف المدى الربيعي وسنرمز له بالرمز Q] كالآتي :

$$Q \text{ [نصف المدى الربيعي] الانحراف الربيعي } = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

الربيع الأول

الربيع الثالث

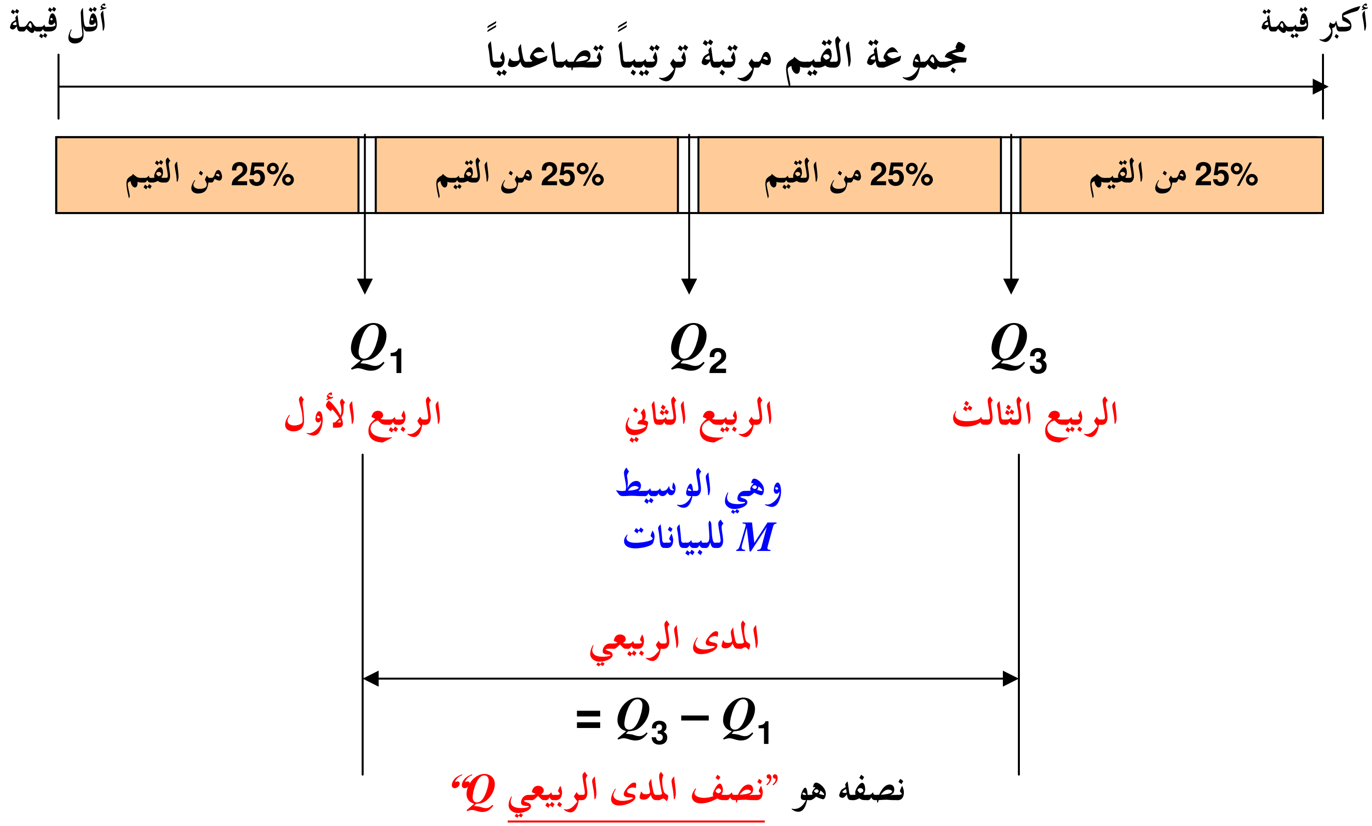
ويفضل استخدام هذا المقياس [الانحراف الربيعي] في الكثير من الحالات خاصة تلك الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

وفي بعض الأحيان يُستخدم المدى الربيعي $Q_3 - Q_1$ كمقياس للتشتت بدلاً من نصف المدى الربيعي

س : ما هي الربيعات ؟

ج : إذا رتبنا مجموعة من القيم ترتيباً تصاعدياً فإن القيمة التي تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد تُسمى بالوسيط M . بتعميم هذه الفكرة ، يمكن أن نقسم مجموعة القيم إلى أربعة أجزاء متساوية في العدد وذلك بثلاثة قيم [سنرمز لها بالرموز Q_1 , Q_2 , Q_3] . هذه القيم تُسمى بالربيعات حيث :

Q_1 تُسمى بالربيع الأول ، Q_2 تُسمى بالربيع الثاني ، Q_3 تُسمى بالربيع الثالث



أي أن :

Q_1 [الربيع الأول] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 25% من القيم [وبالطبع وفوقها 75% من القيم]

Q_2 [الربيع الثاني] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 50% من القيم [وبالطبع فوقها 50% من القيم] [أي الوسيط M]

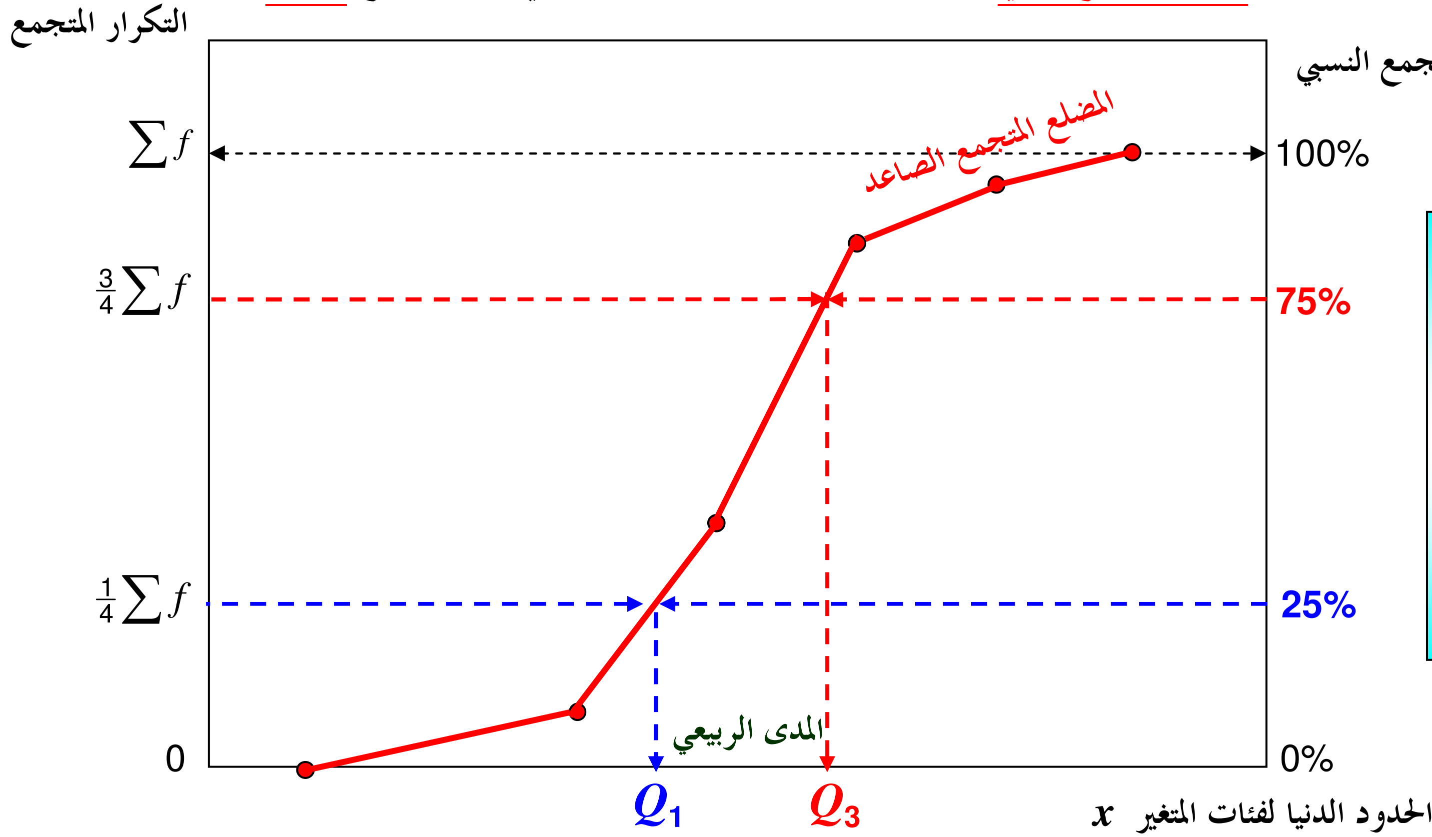
Q_3 [الربيع الثالث] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 75% من القيم [وبالطبع فوقها 25% من القيم]

ويكن تحديد الربيعين Q_1 (الأول) ، Q_3 (الثالث) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M [الربيع الثاني Q_2] ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديدها [ومن ثم تحديد نصف المدى الربيعي Q] للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{4}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 25%] فتكون تلك القيمة هي Q_1 [الربيع الأول] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{3}{4}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 75%] فتكون تلك القيمة هي Q_3 [الربيع الثالث] .



ويكون المدى الربيعي هو :

$$Q_3 - Q_1$$

ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو :

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

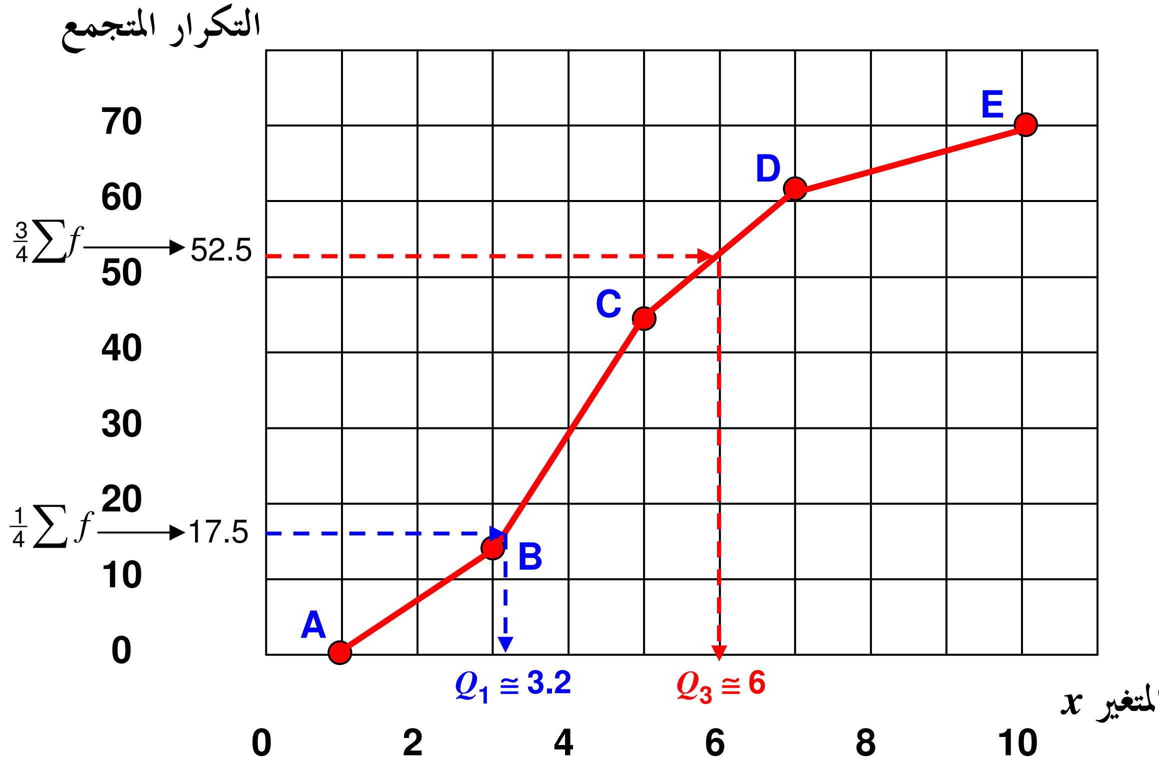
المتغير x	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

ملحوظة : $\frac{3}{4}\sum f = 52.5$, $\frac{1}{4}\sum f = 17.5$



إذن المدى الربيعي هو : $Q_3 - Q_1 = 6 - 3.2 = 2.8$

ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو : $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2} \times 2.8 = 1.4$

خامساً : المدى المئيني : لمجموعة من البيانات يُعرف المدى المئيني [وسنرمز له بالرمز P] كالآتي :

المدى المئيني : $P = P_{90} - P_{10}$

المئين التسعون (P_{90}) ، المئين العاشر (P_{10})

ويفضل أيضاً استخدامه في الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

س : ما هي المئينات ؟

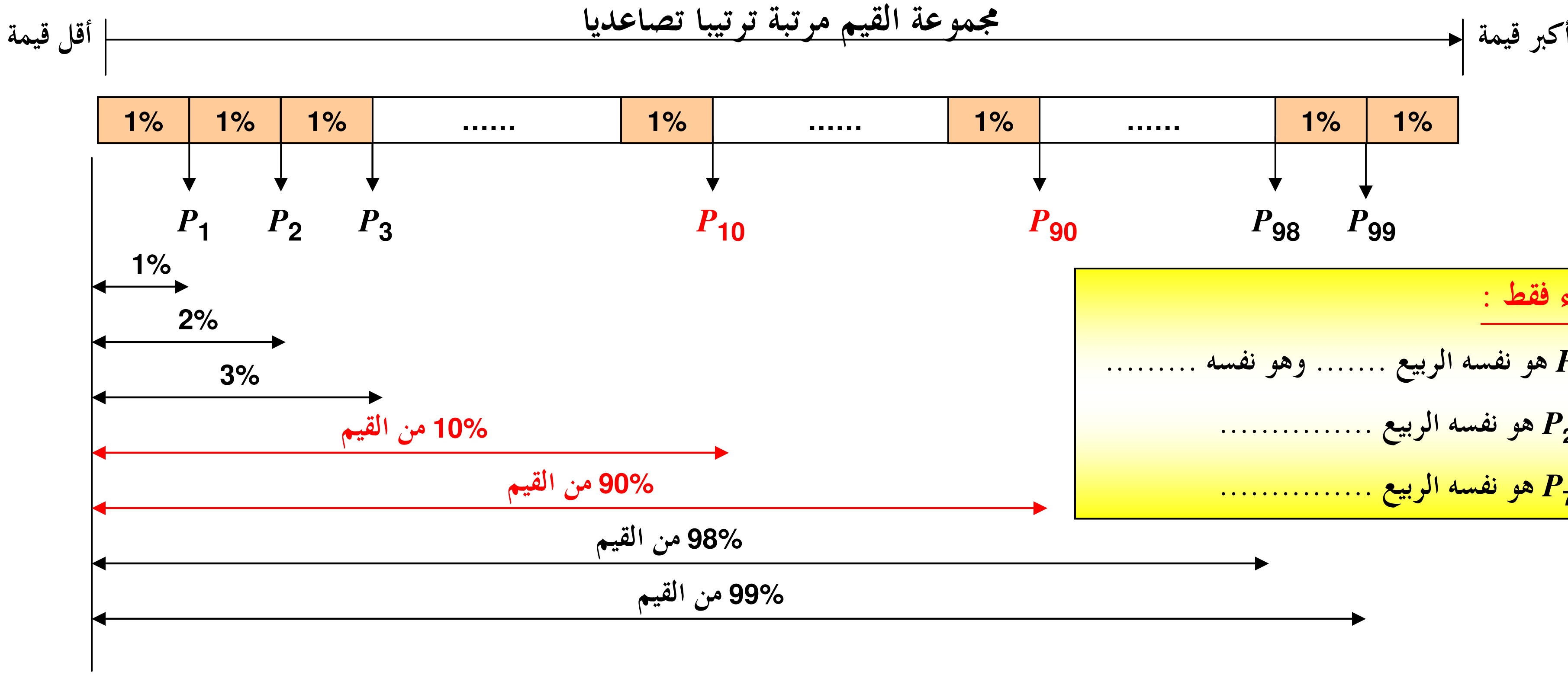
ج : بنفس الطريقة التي تم بها تقسيم مجموعة من القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد [عن طريق الوسيط M] أو تقسيمها إلى أربعة مجموعات متساوية في العدد [عن طريق الربيعات Q_3 , Q_2 , Q_1] ، يمكن تقسيم مجموعة القيم إلى 100 مجموعة متساوية في العدد عن طريق قيم عددها 99 سنرمز لها بالرموز :

$$P_1 , P_2 , \ldots\ldots , P_{10} , \ldots\ldots , P_{90} , \ldots\ldots , P_{98} , P_{99}$$

تُسمى هذه القيم بـــ المئينات ، حيث :

P_1 [المئين الأول] : هو قيمة يقع تحتها 1% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 99% من القيم]

P_2 [المئين الثاني] : هو قيمة يقع تحتها 2% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 98% من القيم]



للأذكياء فقط :

المئين P_{50} هو نفسه الربيع .... وهو نفسه ....

والمئين P_{25} هو نفسه الربيع ....

والمئين P_{75} هو نفسه الربيع ....

P_{10} [المئين العاشر] : هو قيمة يقع تحتها 10% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 90% من القيم]

P_{90} [المئين التسعون] : هو قيمة يقع تحتها 90% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 10% من القيم]

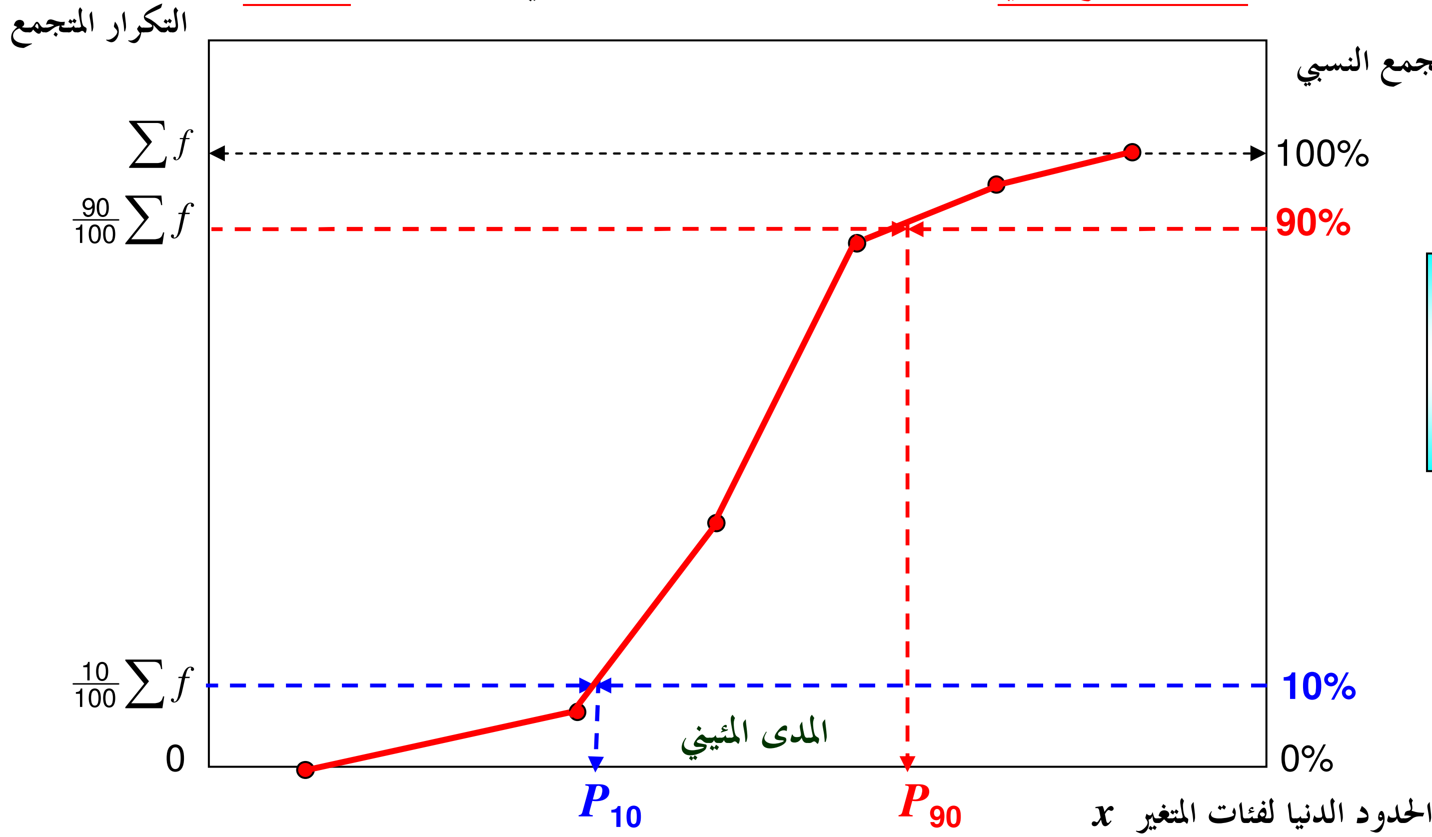
وهكذا ....

ويكن تحديد المئينات P_{10} (العاشر) ، P_{90} (التسعون) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M والربيعات ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديدها [ومن ثم تحديد المدى المئيني P] للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{10}{100}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 10%] فتكون تلك القيمة هي P_{10} [المئين العاشر] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{90}{100}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 90%] فتكون تلك القيمة هي P_{90} [المئين التسعون] .



ويكون المدى المئيني هو :

$$P = P_{90} - P_{10}$$

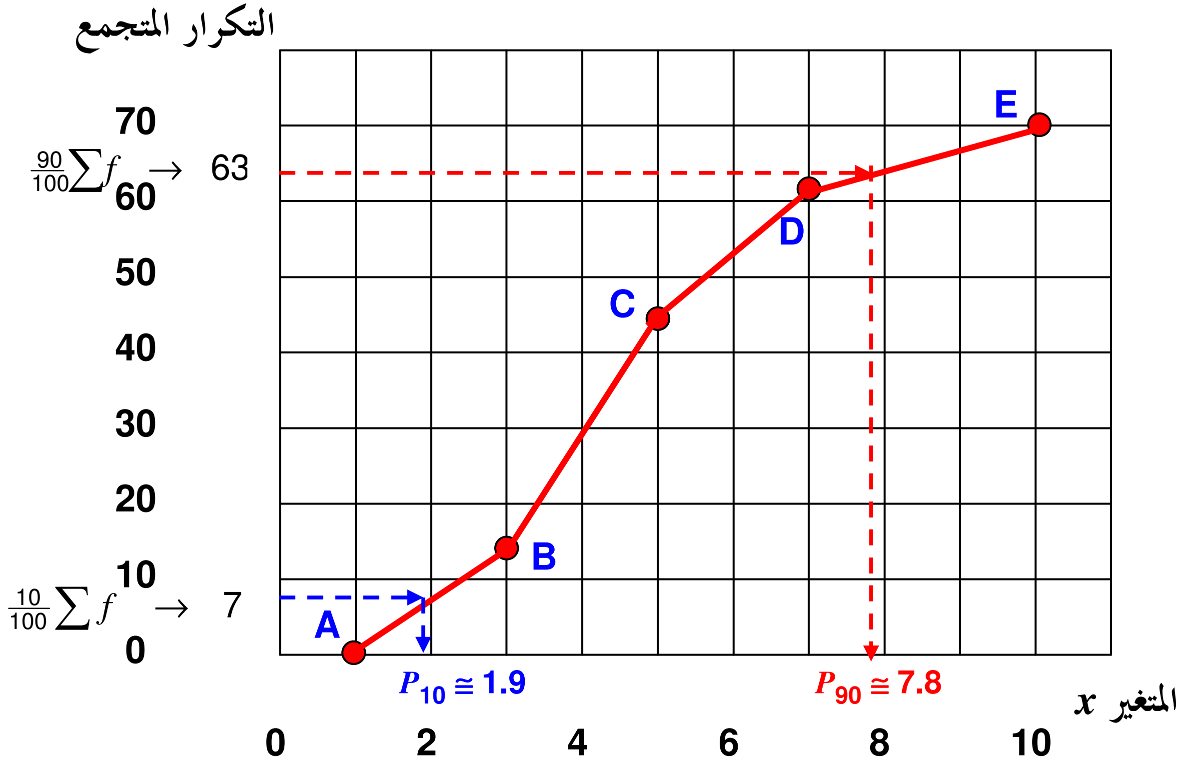
فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

المتغير x	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم المئين العاشر P_{10} والمئين التسعين P_{90} بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)



ملحوظة : $\frac{90}{100}\sum f = 63$, $\frac{10}{100}\sum f = 7$

إذن المدى المئيني هو : $P = P_{90} - P_{10} \cong 7.8 - 1.9 = \underline{\underline{6.9}}$

في التوزيعات **متوسطة الالتواء** هناك **علاقات اعتبارية** (تقريبية) بين مقاييس التشتت السابقة كالآتي :

الانحراف المتوسط = $\frac{٤}{٥}$ × الانحراف المعياري	$M.D=\frac{4}{5}s$	أو	الانحراف المعياري = $\frac{٥}{٤}$ × الانحراف المتوسط	$s=\frac{5}{4}M.D$
الانحراف الربيعي = $\frac{٢}{٣}$ × الانحراف المعياري	$Q=\frac{2}{3}s$	أو	الانحراف المعياري = $\frac{٣}{٢}$ × الانحراف الربيعي	$s=\frac{3}{2}Q$
الانحراف المتوسط = $\frac{٦}{٥}$ × الانحراف الربيعي	$M.D=\frac{6}{5}Q$	أو	الانحراف الربيعي = $\frac{٥}{٦}$ × الانحراف المتوسط	$Q=\frac{5}{6}M.D$

هذه العلاقات الاعتبارية تمكننا من حساب قيم تقريبية لبقية مقاييس التشتت متى عُلم أحدها [وذلك في حالة صلاحيتها .. أي في حالة التوزيعات التكرارية متوسطة الالتواء]

فمثلاً :

- إذا كان **$s = 30$** فإن :
  $Q=\frac{2}{3}s=\frac{2}{3}\times30=\underline{\underline{20}}$, $M.D=\frac{4}{5}s=\frac{4}{5}\times30=\underline{\underline{24}}$
- وإذا كان **$Q = 20$** فإن :
  $s=\frac{3}{2}Q=\frac{3}{2}\times20=\underline{\underline{30}}$, $M.D=\frac{6}{5}Q=\frac{6}{5}\times20=\underline{\underline{24}}$
- وإذا كان **$M.D = 24$** فإن :
  $Q=\frac{5}{6}M.D=\frac{5}{6}\times24=\underline{\underline{20}}$, $s=\frac{5}{4}M.D=\frac{5}{4}\times24=\underline{\underline{30}}$

التشتت النسبي ومقاييسه

التغير الفعلي أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المتوسط أو المعياري أو الربيعي أو غيره من مقاييس التشتت يُسمى **بالتشتت المطلق** ، ولكن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 50 درجة (مثلاً) يختلف عن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 200 ، لذا من المناسب تعريف ما يُسمى بـــ **التشتت النسبي** وهو :

$$\text{التشتت النسبي (كنسبة مئوية)} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \times 100$$

وبالتالي يكون التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطها 50 : $\frac{10}{50} \times 100 = 20\%$

أما التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطها 200 فهو : $\frac{10}{200} \times 100 = 5\%$

ومن أكثر مقاييس التشتت النسبي استخداماً ما يُسمى **بمعامل الاختلاف** [أو **معامل التشتت**] و **معامل الاختلاف الربيعي** ، حيث :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

$$\text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

فعلي سبيل المثال ، إذا كانت لدينا البيانات الموضحة بالجدول المقابل عن توزيع الوحدات السكنية حسب الإيجار السنوي بأحد الأحياء [x يمثل الإيجار بالألف ريال ، f يمثل عدد الوحدات السكنية] ، وكان مطلوباً تحديد كلٍ من معامل الاختلاف للإيجار و معامل الاختلاف الربيعي له .

التكرار f	المتغير x
8	$6 \le x < 10$
20	$10 \le x < 12$
12	$12 \le x < 14$
10	$14 \le x < 18$

أولاً : بالنسبة لمعامل الاختلاف : لابد أولاً من تحديد كلٍ من الوسط الحسابي والانحراف المعياري [فرصة للمراجعة]

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	fd^2
$6 \le x < 10$	8	8	64	8 – 12 = -4	16	128
$10 \le x < 12$	20	11	220	11 – 12 = -1	1	20
$12 \le x < 14$	12	13	156	13 – 12 = 1	1	12
$14 \le x < 18$	10	16	160	16 – 12 = 4	16	160
	50		600			320
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{600}{50} = 12 \qquad s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{320}{50} = 6.4 \ \rightarrow \ s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.4} \cong 2.53$$

وبالتالي يكون معامل الاختلاف $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.53}{12} \times 100 \cong 21.1\%$ ، أي أن الإيجار يتغير بنسبة ٢١,١% تقريباً

ثانياً : بالنسبة لمعامل الاختلاف الربيعي : لابد أولاً من تحديد الربيعين الأول والثالث [فرصة للمراجعة]

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 .

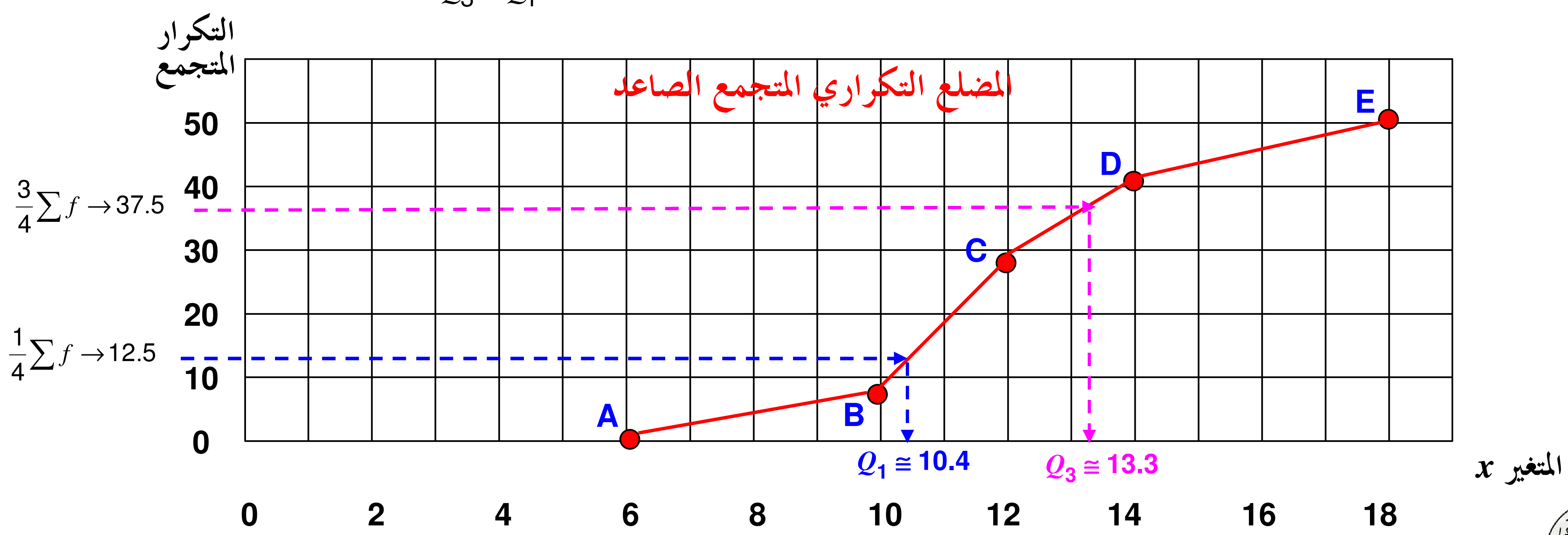
المتغير x	التكرار f
$6 \le x < 10$	8
$10 \le x < 12$	20
$12 \le x < 14$	12
$14 \le x < 18$	10

→

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 6	0	A (6 , 0)
< 10	8	B (10 , 8)
< 12	28	C (12 , 28)
< 14	40	D (14 , 40)
< 18	$\sum f = 50$	E (18 , 50)

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{13.3 - 10.4}{13.3 + 10.4} \times 100 = \frac{2.9}{23.7} \times 100 \cong \underline{\underline{12.2\%}}$$



لمجموعة من القيم x_n , ... , x_2 , x_1 وسطها الحسابي $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s تُسمى :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

بـــ **الدرجة المعيارية** للقيمة x .

فمثلاً لمجموعة القيم 8 3 4 12 6 7 4 8 3 5 [سؤال سلي نفسك/المحاضرة ١٠/شريحة ١٦ والذي قمنا بحله في بداية هذه المحاضرة/شريحة ٤] ، كان الوسط الحسابي 6 والانحراف المعياري 2.76 . إذن الدرجات المعيارية لهذه القيم هي :

القيم	8	3	4	12	6	7	4	8	3	5
الدرجات المعيارية للقيم	0.72	-1.09	-0.72	2.17	0	0.36	-0.72	0.72	-1.09	-0.36
	$\frac{8-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{12-6}{2.76}$	$\frac{6-6}{2.76}$	$\frac{7-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{8-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{5-6}{2.76}$

وللدرجات المعيارية للقيم أهمية كبيرة في مقارنة نتائج بيانات مختلفة ببعضها حيث قد يؤدي الاعتماد على القيم الحقيقة إلى استنتاجات غير سليمة أو مضللة . لتوضيح ذلك دعنا نعتبر المثال التالي :

في الاختبار النهائي لمقرر الإحصاء حصل طالب على 82 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 76 بانحراف معياري 10] وحصل في مقرر الصحة واللياقة على 90 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 82 بانحراف معياري 16] . هل يمكن القول أن الطالب درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة كانت أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء ؟

الاعتماد على درجات الطالب في المقررين [82 في الإحصاء ، 90 في الصحة واللياقة] تجعل الإجابة : نعم درجة استيعاب الطالب لمقرر الصحة واللياقة أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء .

ولكن الإجابة الصحيحة تعتمد على الدرجة المعيارية للطالب في كل من المقررين :

في مقرر الإحصاء	في مقرر الصحة واللياقة
$x=84 \quad , \quad \bar{x}=76 \quad , \quad s=10$ $\therefore \quad z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{84-76}{10}=\frac{8}{10}=\underline{\underline{0.8}}$	$x=90 \quad , \quad \bar{x}=82 \quad , \quad s=16$ $\therefore \quad z=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{90-82}{16}=\frac{8}{16}=\underline{\underline{0.5}}$

أي أن الدرجة المعيارية للطالب في مقرر الإحصاء أعلى من نظيرتها في مقرر الصحة واللياقة ، مما يعني أن درجة استيعاب الطالب لمقرر الإحصاء أعلى من درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة .

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

(١) البيانات الموضحة بالجدول المقابل تعبر عن أوزان مجموعة من الطلبة (بالكيلوجرام) في المرحلة الجامعية . المطلوب حساب مقياس مناسب للنزعة المركزية وآخر للتشتت ، ثم أوجد مقياساً لمعامل الاختلاف .

الوزن x	$x<50$	$50\le x<60$	$60\le x<70$	$70\le x<80$	$x\ge 80$
العدد f	14	29	18	9	9

(٢) حصل أحد الطلاب في مقرر المحاسبة على درجة ٨٠ في الاختبار النهائي وعلى درجة ٧٠ في مقرر الرياضيات . هل يمكن القول بأن درجة استيعاب الطالب لمادة المحاسبة أفضل من درجة استيعابه لمادة الرياضيات علماً بأن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في المادتين هو ٨٣ [في المحاسبة] ، ٦٥ [في الرياضيات] بانحراف معياري قدره ٥ في المادتين .

المحاضرة الثانية عشرة

الباب الخامس

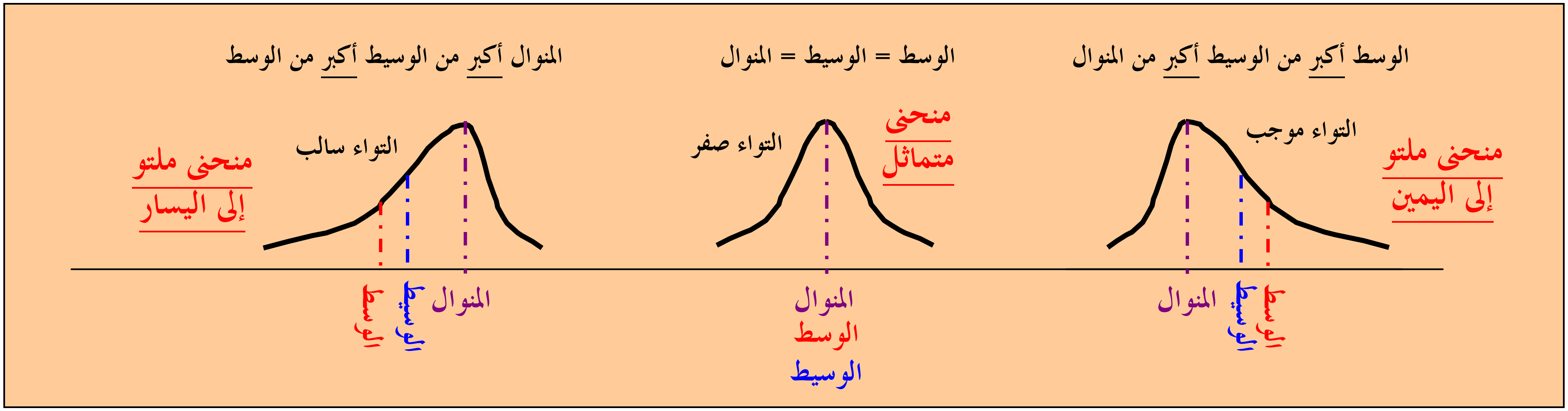
الالتواء والتفرطح

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- الالتواء
- التفرطح

ذكرنا سابقاً [في الباب الثالث/المحاضرة التاسعة] أن المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالاً مميزة منها الآتي :



تعريف الالتواء : على أنه درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما .

- فإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يمين النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يسارها يُسمى التوزيع ملتوي إلى اليمين [أو موجب الالتواء] وعندئذٍ يقع الوسط الحسابي يمين المنوال [أي الوسط يكون أكبر من المنوال] .
- وإذا كان المنحنى له ذيل أكبر إلى يسار النهاية العظمى للمنحنى عنه إلى يمينها يُسمى التوزيع ملتوي إلى اليسار [أو سالب الالتواء] وعندئذٍ يقع الوسط الحسابي يسار المنوال [أي المنوال يكون أكبر من الوسط] .

ويُقاس الالتواء بعدة مقاييس [كل منها يُسمى بــ معامل الالتواء] منها :

معامل بيرسون الأول للالتواء = $\frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

معامل بيرسون الثاني للالتواء = $\frac{\text{٣(الوسط} - \text{الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}}$

معامل الالتواء الربيعي= $\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

معامل الالتواء المئيني= $\frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$

تذكر أن :

$$P_{50} = M = Q_2$$

المئين الخمسون — الوسيط — الربيع الثاني

ويُستخدم المعامل المناسب طبقاً للمعلومات المتوفرة عن التوزيع

- تُستخدم إذا علمنا الوسط الحسابي والمنوال (ويكون وحيداً) وكذلك الانحراف المعياري
- تُستخدم إذا علمنا الوسط الحسابي والوسيط وكذلك الانحراف المعياري
- تُستخدم إذا علمنا الربيعات الأول والثالث وأيضاً الربيع الثاني (الوسيط)
- تُستخدم إذا علمنا المئينات العاشر والتسعين وأيضاً المئين الخمسين (الوسيط)

كما يتضح من المثال التالي

مثال : في كل حالة من الحالات التالية احسب معامل الالتواء المناسب للتوزيع المعطى بياناته مع توضيح نوع الالتواء (لليمين/لليسار) :

(أ) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، المنوال $\hat{x} = 82$ ، الانحراف المعياري $s = 20$

(ب) الوسط الحسابي $\bar{x} = 80$ ، الوسيط $M = 79$ ، الانحراف المعياري $s = 10$

(ج) الربيع الأول $Q_1 = 68$ ، الوسيط $M = 79$ ، الربيع الثالث $Q_3 = 91$

(د) المئين العاشر $P_{10} = 58$ ، الوسيط $M = 79$ ، المئين التسعون $P_{90} = 99$

(أ) هنا نستخدم معامل بيرسون الأول للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والمنوال والانحراف المعياري

$\bar{x} = 80 \quad , \quad \hat{x} = 82$

$s = 20$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{\bar{x} - \hat{x}}{s} = \frac{80-82}{20} = \frac{-2}{20} = -0.1$$

التواء سالب (ملتو لليسار)

(ب) هنا نستخدم معامل بيرسون الثاني للالتواء نظراً لمعرفتنا لكل من الوسط والوسيط والانحراف المعياري

$\bar{x} = 80 \quad , \quad M = 79$

$s = 10$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{3(\bar{x} - M)}{s} = \frac{3(80-79)}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

التواء موجب (ملتو لليمين)

(ج) هنا نستخدم معامل الالتواء الربيعي نظراً لمعرفتنا لكل من الربيعات الأول والثاني (الوسيط) والثالث

$Q_1 = 68 \quad , \quad Q_3 = 91$

$Q_2 = M = 79$

إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{91 - 2\times 79 + 68}{91-68} = \frac{1}{23} \cong 0.04$$

التواء موجب (ملتو لليمين)

(د) هنا نستخدم معامل الالتواء المئيني نظراً لمعرفتنا لكل من المئات العاشر والخمسين (الوسيط) والتسعين

$P_{10} = 58 \quad , \quad P_{90} = 99$

$P_{50} = M = 79$

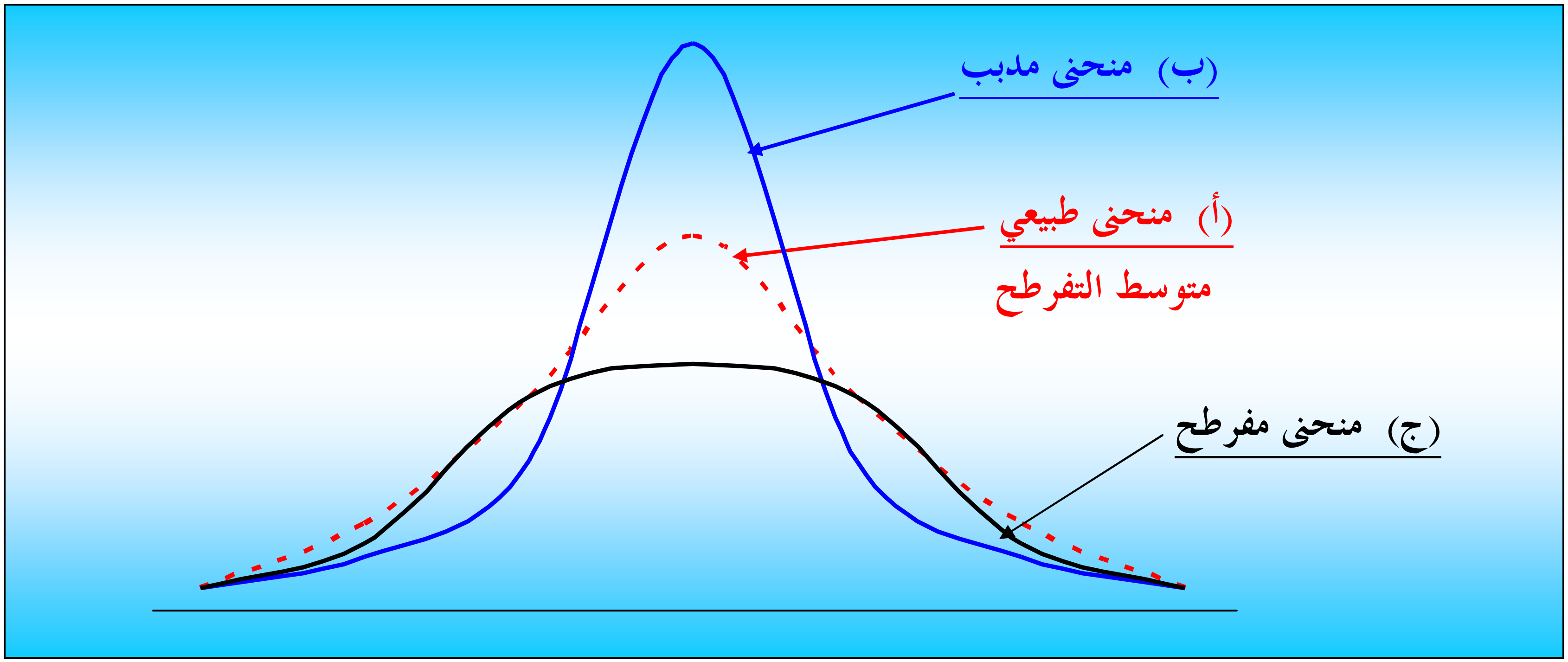
إذن معامل الالتواء يساوي

$$\frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{99 - 2\times 79 + 58}{99-58} = \frac{-1}{41} \cong -0.02$$

التواء سالب (ملتو لليسار)

التفرطح

تعريف التفرطح : يُقصد بالتفرطح درجة تدبب (الارتفاع أو الانخفاض) في قمة المنحنى مقارنةً بقمة منحنى التوزيع الطبيعي الذي يُعد متوسط التفرطح



- فإذا كانت قمة المنحنى أعلى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى مدبب
- وإذا كانت قمة المنحنى أدنى من مثيلتها في التوزيع الطبيعي يُسمى المنحنى مفرطح [تكون قمته مسطحة لحد ما]
- أما إذا كانت القمة ليست مدببة أو مسطحة [أي قريبة من المنحنى الطبيعي] يُسمى المنحنى متوسط التفرطح

ويُقاس تفرطح أي توزيع بعدة مقاييس ، أحد هذه المقاييس يعتمد على الربيعات والمئينات ويُسمى بـــ **معامل التفرطح المئيني** ويُعطي بـــ :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}}$$

وهذا المعامل يساوي (تقريباً) **0.26** في حالة التوزيع الطبيعي ، وبالتالي إذا كان معامل التفرطح لأي توزيع :

- أكبر من **0.26** كان التوزيع **مدبباً**
- أقل من **0.26** كان التوزيع **مفرطحاً**

فمثلاً إذا كان الانحراف الربيعي لتوزيع ما = **20** ، والمدى المئيني لهذا التوزيع = **100** فإن :

$$\text{معامل التفرطح المئيني} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

أي أقل من **0.26** وبالتالي يكون التوزيع **مفرطحاً**

وإذا كان للتوزيع البيانات التالية : $P_{90} = 94$, $P_{10} = 59$, $Q_3 = 91$, $Q_1 = 69$

المدى المئيني : $P_{90} - P_{10} = 94 - 59 = 35$

المدى الربيعي : $Q_3 - Q_1 = 91 - 69 = 22$

الانحراف الربيعي = نصف المدى الربيعي = **11**

إذن معامل التفرطح المئيني = $\frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}} = \frac{11}{35} \cong 0.31$

أي أكبر من **0.26** وبالتالي يكون التوزيع **مدبباً**

المحاضرة الثالثة عشرة

الباب السادس

تحليل الارتباط

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- الارتباط الخطي وشكل الانتشار
- معامل الارتباط

في دراستنا للأبواب السابقة كنا نتعامل مع بيانات ذات متغير واحد [كنا نرمز له بالرمز x] ورأينا كيف نتعامل مع هذه البيانات من حيث :

جمع البيانات

تنظيمها وعرضها

عن طريق الجداول أو بالرسم

استخراج مقاييس خاصة بها

- مقاييس نزعة مركزية

الوسط الحسابي – الوسيط – المنوال

- مقاييس تشتت

المدى – الانحراف المتوسط – الانحراف المعياري – الانحراف الربيعي – الانحراف المئيني

- مقاييس التواء

معامل بيرسون الأول للالتواء – معامل بيرسون الثاني للالتواء – معامل الالتواء الربيعي – معامل الالتواء المئيتي

- مقاييس تفرطح

معامل التفرطح المئيني

كل ذلك من خلال القسم الأول من علم الإحصاء وهو "**علم الإحصاء الوصفي**"

أما استخراج نتائج مما سبق أو توقع تنبوءات واتخاذ قرارات فيختص به الجزء الثاني من علم الإحصاء وهو "**علم الإحصاء الاستقرائي**" أو "**علم الاستدلال الإحصائي**" وهو ما لم ندرسه

أما في هذا الباب فسنتعامل مع بيانات يمثلها متغير [ليكن x] وبيانات أخرى يمثلها متغير آخر [ليكن y] ونبحث في الآتي :

(١) هل هناك علاقة بين هاتين المجموعتين من البيانات أم لا :

فإذا كانت هناك علاقة نقول أن المتغيرين y , x مرتبطان وإلا فهما غير مرتبطين

(٢) مدى قوة هذه العلاقة [إن وُجدت] : هل هي قوية جداً أم قوية أم متوسطة أم ضعيفة أم ضعيفة جداً

(٣) نوع هذه العلاقة [إن وُجدت] : هل هي طردية أم عكسية

العلاقة الطردية	العلاقة العكسية
كلما زادت قيمة x زادت أيضاً قيمة y	كلما زادت قيمة x نقصت قيمة y

مثال : كلما زادت الإعلانات عن منتج معين زاد حجم المبيعات

مثال : كلما زادت الكمية المعروضة في السوق من منتج معين قل سعر المنتج

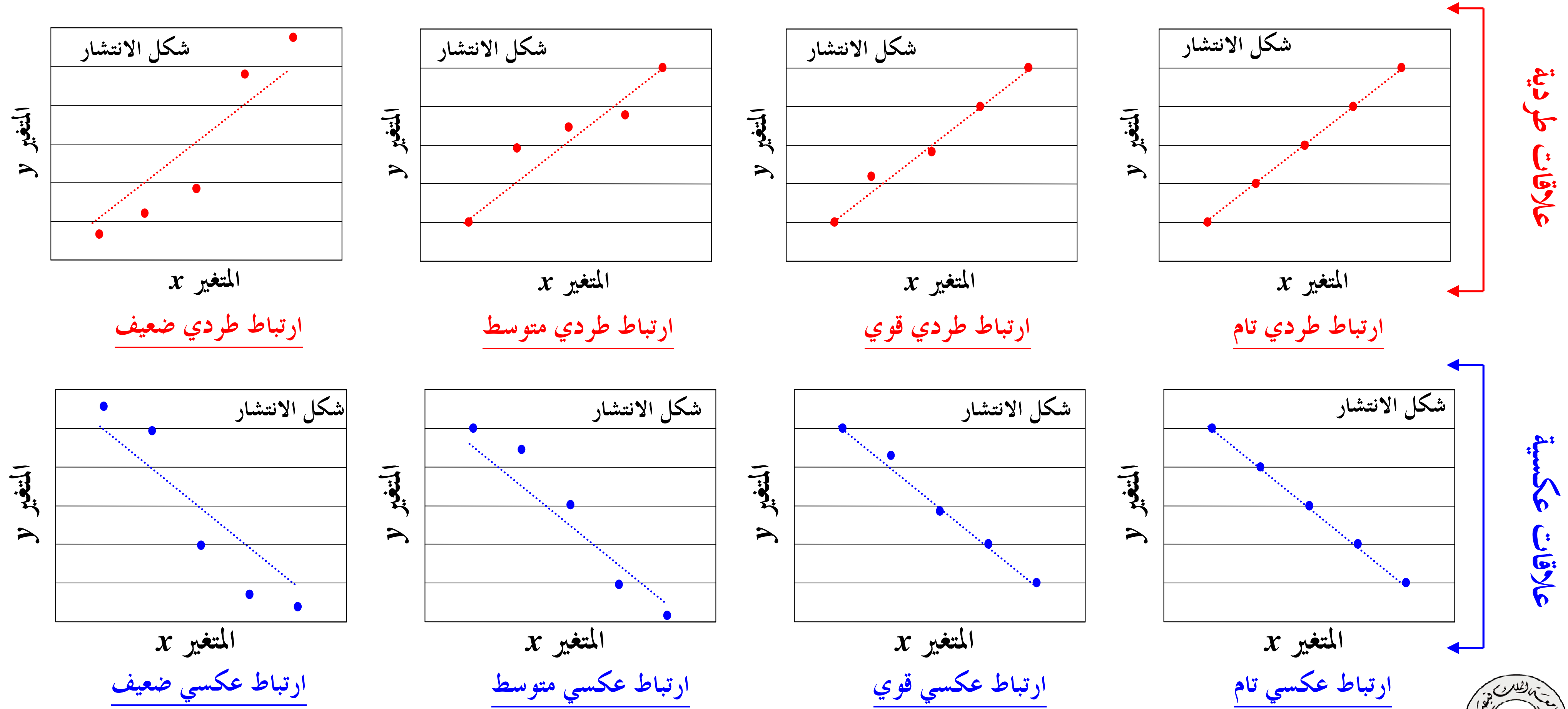
وكأمثلة لهذا النوع من الدراسة إيجاد العلاقة بين :

- البيانات عن الكمية المعروضة في السوق من منتج معين وسعر هذه السلعة
- البيانات عن حجم الإعلانات عن منتج معين وحجم المبيعات

الارتباط الخطي وشكل الانتشار

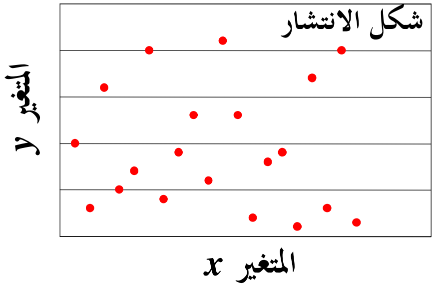
نفرض أن لدينا بيانات ... x_1 , x_2 , x_3 , ... عن متغير x ويناظرها بيانات ... y_1 , y_2 , y_3 , عن متغير آخر y ، وعلى ورقة رسم بياني اخترنا محورين : **الأفقي** (ويخص المتغير x) **والرأسي** (ويخص المتغير y) وقمنا بتوقيع النقاط.... $(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , (x_3 , y_3) , ...$

فإننا نحصل بذلك على ما يُسمى بـــ "**شكل الانتشار**" لبيانات المتغيرين . ومن شكل الانتشار يمكن بمجرد النظر تحديد ما إذا كان هناك ارتباط بين المتغيرين y , x وتحديد **نوع** هذه العلاقة (إن وُجِدت) وأيضاً (وإلى حدٍ ما) **مدى قوة** هذا الارتباط .



- فإذا أمكن رسم خط مستقيم يمر بجميع نقاط شكل الانتشار سُمي الارتباط "ارتباط تام" [طردي أو عكسي]
- وإذا أمكن رسم خط مستقيم بحيث تكون انحرافات النقاط عنه ضعيفة جداً ، سُمي الارتباط "ارتباط قوي" [طردي أو عكسي]
- أما إذا زادت الانحرافات عن الخط المستقيم ولكن بشكل معقول ، سُمي الارتباط "ارتباط متوسط" [طردي أو عكسي]
- وإذا زادت الانحرافات عن الخط المستقيم بشكل كبير إلى حد ما ، سُمي الارتباط "ارتباط ضعيف" [طردي أو عكسي]

- أما إذا لم يكن هناك ما يشير إلى وجود علاقة بين المتغيرين ، فإننا نقول إنه لا يوجد ارتباط بينهما أو أنهم غير مرتبطين



ويُقاس الارتباط بين متغيرين x , y بما يُسمى بـــ "معامل الارتباط" [وسنرمز له بالرمز r] وقيمته تكون محصورة بين 1 - ، 1 + :

- فإذا كانت قيمته موجبه دل ذلك على أن الارتباط طردي
- وإذا كانت قيمته سالبة دل ذلك على أن الارتباط عكسي
- وإذا كانت قيمته صفراً دل ذلك على عدم وجود ارتباط

هذا بخصوص نوع الارتباط [طردي أم عكسي أم معدوم]

أما بخصوص قوة الارتباط فتحدده القيمة المطلقة لمعامل الارتباط كما يوضحه الجدول التالي :

القيمة المطلقة لمعامل الارتباط	قوة الارتباط
0	لا يوجد ارتباط
$0 < r \leq 0.4$	ارتباط ضعيف
$0.4 < r \leq 0.6$	ارتباط متوسط
$0.6 < r < 1$	ارتباط قوي
1	ارتباط تام
> 1	كلام فارغ

التفسير الوحيد أن هناك خطأ في الحسابات

ونعود ونذكر أن الإشارة الموجبة لمعامل الارتباط تعني أن الارتباط طردي ، والإشارة السالبة تعني أنه عكسي

فمثلاً ، إذا كان :

- $r = 0.45$ ← فهذا يعني ارتباط طردي متوسط
- $r = - 0.9$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي قوي
- $r = 1.3$ ← فهذا يعني خطأ في الحسابات
- $r = 0.84$ ← فهذا يعني ارتباط طردي قوي
- $r = - 0.22$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي ضعيف
- $r = - 1$ ← فهذا يعني ارتباط عكسي تام

وهكذا

كما سبق وذكرنا أنه يمكن قياس نوع وقوة الارتباط بما يُسمى بمعامل الارتباط ، وهناك أكثر من معامل للارتباط ولكننا سنكتفي بدراسة ما يُسمى بـــ "معامل سبيرمان للارتباط" والذي يُسمى أيضاً بـــ "معامل ارتباط الرتب" والذي يتحدد من خلال الخطوات التالية :

نفرض أن لدينا مجموعة من n من أزواج القيم $(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , (x_3 , y_3) , \ldots$

١. قم بترتيب قيم x ترتيباً تصاعدياً ، ثم أعط لكل قيمة من القيم رتبة تبدأ من الرتبة 1 (للقيمة الصغرى) ، ثم 2 (للتي تليها) ، ... وهكذا حتى نصل إلى القيمة الأخيرة والتي تكون رتبتها n [عدد القيم] .

٢. بنفس الأسلوب ، قم بترتيب قيم y ترتيباً تصاعدياً ، ثم أعط لكل قيمة من القيم رتبة تبدأ من الرتبة 1 (للقيمة الصغرى) ، ثم 2 (للتي تليها) ، ... وهكذا حتى نصل إلى القيمة الأخيرة والتي تكون رتبتها n [عدد القيم] .

٣. احسب الفروقات D بين رتبة كلٍ زوج من أزواج x , y .

٤. احسب معامل الارتباط من العلاقة :

$$r = \text{معامل سبيرمان للارتباط أو معامل ارتباط الرتب} = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{n \times (n^2 - 1)}$$

مثال : الجدول التالي يوضح أداء ٦ طلاب في الاختبار النهائي لكل من مقرري مبادئ التربية والإحصاء التربوي ، المطلوب حساب معامل ارتباط الرتب بين درجات الطلاب في المقررين

مبادئ التربية	82	35	90	23	72	100
الإحصاء	91	54	100	17	81	76

ليكن المتغير x هو درجات الطلاب في مقرر مبادئ التربية ، وليكن المتغير y هو درجات الطلاب في مقرر الإحصاء ، قم بتدوين درجات الطلاب في العمودين 2 , 1 من الجدول المقابل :

- قم بترتيب قيم x تصاعدياً ثم أعط كل قيمة رتبتها .

قيم x	23	35	72	82	90	100
رتب x	1	2	3	4	5	6

ثم دون هذه الرتب أمام القيم المناظرة لها [عمود 3] .

- قم بترتيب قيم y تصاعدياً ثم أعط كل قيمة رتبتها .

قيم y	17	54	76	81	91	100
رتب y	1	2	3	4	5	6

ثم دون هذه الرتب أمام القيم المناظرة لها [عمود 4] .

- قم بحساب الفروقات بين رتب x , y [عمود 5]
- قم بحساب مربعات هذه الفروقات [عمود 6] ثم مجموعها

ثم احسب معامل الارتباط

عمود 1	عمود 2	عمود 3	عمود 4	عمود 5	عمود 6
قيم x	قيم y	رتب x	رتب y	فرق الرتب D	D^2
82	91	4	5	4 – 5 = -1	1
35	54	2	2	2 – 2 = 0	0
90	100	5	6	5 – 6 = -1	1
23	17	1	1	1 – 1 = 0	0
72	81	3	4	3 – 4 = -1	1
100	76	6	3	6 – 3 = 3	9
					$\sum D^2 = 12$

$n = 6$

$$r = 1 - \frac{6 \times \sum D^2}{n \times (n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 12}{6 \times (36 - 1)} = 1 - \frac{72}{6 \times 35}$$

$$= 1 - \frac{72}{210} = 1 - 0.34 = 0.66$$

وواحدة واحدة

وهذا يعني أن هناك ارتباط طردي قوي بين درجات الطلاب في المقررين

بهذا نكون قد أنهينا المقرر [كمادة علمية] "حمداً لله" ويتبقى لنا أن ننبه لبعض الإرشادات الخاصة بالاختبار النهائي ، وهذا ما سنتناوله بإذن الله في المحاضرة المباشرة القادمة [المحاضرة المباشرة الثانية]

كما أود أن أنبه أنه خلال أسبوع من هذه المحاضرة سيكون هناك تجميع للتعاريف والقوانين [ملخص] لما تناولناه في هذا المقرر أرجو أن يكون معيناً مفيداً للمراجعة ليلة الاختبار النهائي ، ويمكن أن تجده في مجلد فرعي من مجلد "المحتوي" للمقرر تحت عنوان "المراجعة النهائية"

لكنه سيكون مفيداً لمن اطلع على جميع المحاضرات أول بأول ولا يصلح لمذاكرة المقرر لأول مرة

كما سيكون هناك أيضاً [في نفس مجلد المراجعة النهائية] تدريبات على كل الأبواب التي تناولناها بأسلوب مشابه لمسائل الاختبار النهائي

وأرجو ألا يسألني أحد (من فضلكم) السؤال " هل الاختبار حا ييجي من هذه التدريبات ؟ "

بالتوفيق والنجاح بإذن الله

د. سعيد سيف الدين

المحاضرة الرابعة عشرة

والأخيرة

د. سعيد سيف الدين

عناصر المحاضرة

تجميع للتعريفات النظرية الخاصة بهذا المقرر

أما التفاصيل وكيفية إجراء العمليات الحسابية والأمثلة فمرجعها المحاضرات المسجلة

الباب الأول : مفاهيم أساسية

الإحصاء الوصفي : هو العلم الذي يهتم بجمع وتبويب وعرض ووصف البيانات وحساب بعض المقاييس الخاصة بها دون الوصول إلى نتائج أو استدلالات خاصة

الإحصاء الاستقرائي أو الاستدلال الإحصائي أو الإحصاء الاستدلالي : هو العلم الذي يختص يبحث في استقراء النتائج واتخاذ القرارات

المتغير النوعي : هو المتغير الذي لا يمكن التعبير عنه بعدد [مثل لون العين/رأيك في موضوع/لون سيارات بأحد المواقف/....]

المتغير الكمي : هو المتغير الذي يُعبر عنه بعدد [مثل عدد الطلاب/الوزن/الدخل/.......]

المتغير الكمي المتصل : هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين قيمتين ، أي يمكن أن يُقاس ولا يُعد [الوزن/الدخل/......]

المتغير الكمي المتقطع : هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ قيمتين لكن لا يأخذ أي قيمة بينهما ، أي يمكن أن يُعد ولا يُقاس [عدد الطلاب/عدد أيام شهر ما/......]

البيانات النوعية : هي البيانات (أو المشاهدات) التي يكون فيها المتغير متغير نوعي .

البيانات الكمية : هي البيانات (أو المشاهدات) التي يكون فيها المتغير متغير كمي .

البيانات الكمية المتصلة : هي البيانات (أو المشاهدات) التي يكون فيها المتغير متغير كمي متصل .

البيانات الكمية المتقطعة : هي البيانات (أو المشاهدات) التي يكون فيها المتغير متغير كمي متقطع .

الباب الأول : مفاهيم أساسية

البيانات المنفصلة : هي بيانات إما نوعية أو كمية متقطعة .

جمع البيانات : هي عملية الحصول على القياسات الخاصة بظاهرة معينة وعادةً ما تُسمى البيانات المجمعة بالبيانات الخام

تنظيم وعرض البيانات : هي عملية وضع البيانات المجمعة في جداول خاصة وعرضها بطرق مناسبة

تحليل البيانات : هي عملية إيجاد مقاييس تتحدد قيمها من البيانات وتعطي بعض الدلالات عن الظاهرة تحت الدراسة

استقراء النتائج واتخاذ القرارات : هي الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من خلال تحليله للبيانات وعادةً ما تكون على شكل تقديرات أو تنبوءات أو تعميمات أو قرارات بالرفض أو القبول

الباب الثاني : التوزيعات التكرارية

المدى R : وهو "الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة" في البيانات المعروضة

الجدول (التوزيع)التكراري : هو جدول يوضح قيم المتغير وتكراراتها

الجدول (التوزيع)التكراري النسبي : هو جدول يوضح قيم المتغير وتكراراتها وأيضاً تكراراتها النسبية

التكراري النسبي : هو خارج قسمة التكرار على مجموع التكرارات [أو عبارة مكافئة] ويمكن أن يُعبر عنه كنسبة عادية أو نسبة مئوية

العرض البياني للبيانات المنفصلة :

(١) **طريقة الأعمدة البسيطة :** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بعمود (خط رأسي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

(٢) **طريقة القضبان البسيطة :** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقضيب (خط أفقي) طوله يُعبر عن تكرار تلك القيمة

(٣) **طريقة المضلع التكراري :** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة)

(٤) **طريقة المنحنى التكراري :** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير وتكرارها بنقطة ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط ممهد (باليد)

(٥) **طريقة الدائرة :** حيث تُمثل كل قيمة من قيم المتغير بقطاع من دائرة وذلك طبقاً لتكرارها ، وتتحدد الزاوية المركزية لكل قطاع من :

$$\text{الزاوية المركزية لقيمة ما} = \frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ٣٦٠$$

أو

الزاوية المركزية لقيمة ما = التكرار النسبي للقيمة × ٣٦٠

الباب الثاني : التوزيعات التكرارية

العرض البياني للبيانات المنفصلة لظاهرتين :

(١) طريقة الأعمدة المزدوجة : حيث يُمثل كل زوج من قيم الظاهرتين (أي قيمة من الظاهرة الأولى وقيمة من الظاهرة الثانية) بعمود مزدوج

(٢) طريقة الأعمدة المجزأة : حيث يُمثل كل زوج من قيم الظاهرتين بعمود واحد يتم تجزئته طبقاً لقيم الظاهرتين .

العرض الجدولي للبيانات المتصلة :

وفي هذا النوع من البيانات يُعبر عن المتغير على صورة فئات ، ويكون لكل فئة حدان : أدنى وأعلى ويكون الحد الأدنى لكل فئة (عدا الأولى) مساوياً للحد الأعلى للفئة السابقة ، والحد الأعلى لكل فئة هو الحد الأدنى للفئة التالية . ويكون :

- طول أي فئة = حدها الأعلى – حدها الأدنى
- مركز أي فئة = مجموع حديها الأدنى والأعلى مقسوماً على 2
- كثافة تكرار أي فئة = تكرار الفئة مقسوماً على طولها

الجدول (التوزيع) التكراري : هو جدول يوضح فئات المتغير وتكراراتها

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي : هو جدول يوضح فئات المتغير وتكراراتها وأيضاً تكراراتها النسبية

وإذا كان الحد الأدنى للفئة الأولى غير معروف يُسمى الجدول (التوزيع) مفتوح من أسفل

وإذا كان الحد الأعلى للفئة الأخيرة غير معروف يُسمى الجدول (التوزيع) مفتوح من أعلى

وإذا كان الحدان : الأدنى للفئة الأولى والأعلى للفئة الأخيرة غير معروفين يُسمى الجدول (التوزيع) مفتوح من الطرفين

الباب الثاني : التوزيعات التكرارية

الجدول (التوزيع) التكراري الصاعد :

التكرار المتجمع الصاعد المناظر لقيمة معية a لمتغير x هو مجموع تكرارات جميع قيم المتغير الأقل من a

الجدول (التوزيع) التكراري الهابط :

التكرار المتجمع الهابط المناظر لقيمة معية a لمتغير x هو مجموع تكرارات جميع قيم المتغير الأكبر من أو تساوي a

العرض البياني للبيانات المتصلة :

(١) طريقة الدائرة : حيث تُمثل كل فئة من فئات المتغير بقطاع من دائرة وذلك طبقاً لتكرارها [مشابهة تماماً لتمثيل البيانات المنفصلة]

(٢) طريقة المدرج التكراري : **حيث تُمثل الفئات بمستطيلات متلاصقة بحيث يمثل كل مستطيل إحدى الفئات ، بحيث تقع قاعدة المستطيل (الممثل لفئة ما) على المحور الأفقي [محور المتغير] وممتدة بين الحد الأدنى للفئة وحدها الأعلى [أي طول قاعدة المستطيل يساوي طول الفئة] وارتفاعه هو كثافة تكرار الفئة ومساحته هي تكرار الفئة .**

(٣) طريقة المضلع التكراري : **حيث تُمثل كل فئة من الفئات بنقطة إحداثياتها هي مركز الفئة وكثافة تكرارها ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة) .**

(٤) طريقة المنحنى التكراري : **حيث تُمثل كل فئة من الفئات بنقطة إحداثياتها هي مركز الفئة وكثافة تكرارها ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط ممهد (باليد) .**

الباب الثاني : التوزيعات التكرارية

المضلع التكراري المتجمع الصاعد : حيث تُمثل كل فئة من الفئات بنقطة إحداثياتها هي الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع الصاعد المناظر ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة) ، وهنا لابد من تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد . وأحياناً يُسمى هذا المضلع بـــ "مضلع الأقل من" .

المضلع التكراري المتجمع الهابط : حيث تُمثل كل فئة من الفئات بنقطة إحداثياتها هي الحد الأدنى للفئة والتكرار المتجمع الهابط المناظر ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بخط منكسر (بواسطة المسطرة) ، وهنا لابد من تكوين الجـــدول التكـــراري المتجمع الصاعد . وأحياناً يُسمى هذا المضلع بـــ "مضلع ألأكبر من أو يساوي" .

الباب الثالث : مقاييس النزعة المركزية

الوسط الحسابي : هو مجموع القيم مقسوماً على عددها

مزاياه :سهولة حسابه – يأخذ في الاعتبار جميع القيم – لا يحتاج لترتيب القيم

عيوبه : يتأثر بشدة بالقيم المتطرفة – لا يمكن إيجاده بالرسم – لا يمكن حسابه للتوزيعات المفتوحة

الوسيط : هو القيمة التي تقسم مجموعة من القيم (المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً) إلى مجموعتين متساويتين في العدد

مزاياه : سهولة حسابه – لا يتأثر بالقيم المتطرفة – يمكن حسابه بالرسم – يمكن حسابه للتوزيعات المفتوحة

عيوبه : يحتاج لترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً – لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات

المنوال (الشائع) : هو القيمة الأكثر تكراراً (أو شيوعاً) .

مزاياه :سهولة حسابه – لا يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة – لا يحتاج لترتيب البيانات – يمكن تحديده في حالة البيانات النوعية

عيوبه : قد لا يتواجد – قد يكون هناك أكثر من منوال

وللمنحنيات التكرارية وحيدة المنوال وبسيطة الالتواء هناك علاقة اعتبارية أساسية هي :

الوسط – المنوال = ٣(الوسط – الوسيط)

- فإذا كان المنحنى متماثلاً يكون : الوسط = الوسيط = المنوال
- وإذا كان المنحنى ملتوياً لليمين (التواء موجب) يكون : الوسط أكبر من الوسيط أكبر من المنوال
- وإذا كان المنحنى ملتوياً لليسار (التواء سالب) يكون : الوسط أقل من الوسيط أقل من المنوال

الباب الرابع : مقاييس التشتت

التشتت : هو الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للانتشار حول قيمة متوسطة (أحد مقاييس النزعة المركزية) ، ومن مقاييسه :

(١) المدى : مدى مجموعة من البيانات الكمية هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأقل قيمة فيها

(٢) الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) : هو متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن الوسط الحسابي

(٣) الانحراف المعياري : هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي

متوسط مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي يُسمى التباين ، أي أن الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين [أو التباين هو مربع الانحراف المعياري]

(٤) المدى الربيعي : هو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول

(٥) الانحراف الربيعي : هو نصف المدى الربيعي [أي نصف الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول]

Q_1 [الربيع الأول] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 25% من القيم [وبالطبع وفوقها 75% من القيم]

Q_3 [الربيع الثالث] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 75% من القيم [وبالطبع وفوقها 25% من القيم]

(٤) المدى المئيني : هو الفرق بين المئين التسعين والمئين العاشر

P_{10} [المئين العاشر] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 10% من القيم [وبالطبع وفوقها 90% من القيم]

P_{90} [المئين التسعون] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 90% من القيم [وبالطبع وفوقها 10% من القيم]

الباب الرابع : مقاييس التشتت

وفي حالة التوزيعات متوسطة الالتواء هناك علاقات اعتبارية (تقريبية) بين مقاييس التشتت السابقة تتلخص في العلاقتين :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{٤}{٥} \times \text{الانحراف المعياري}$$

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{٢}{٣} \times \text{الانحراف المعياري}$$

التشتت النسبي : هو : $\frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \times 100$ ومقاييسه :

(١) معامل الاختلاف (معامل التشتت) ويساوي :

$$\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

(٢) معامل الاختلاف الربيعي ويساوي :

$$\frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{\text{الربيع الثالث} + \text{الربيع الأول}} \times 100$$

الدرجة المعيارية لقيمة ما : تساوي $\frac{\text{القيمة} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$ ولها أهمية كبيرة في مقارنة نتائج بيانات مختلفة ببعضها

الباب الخامس : الالتواء والتفرطح

الالتواء : هو درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما ، ومقاييسه :

(١) معامل بيرسون الأول للالتواء = $\frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

(٢) معامل بيرسون الثاني للالتواء = $\frac{\text{٣(الوسط} - \text{الوسيط)}}{\text{الانحراف المعياري}}$

(٣) معامل الالتواء الربيعي= $\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

(٤) معامل الالتواء المئيني= $\frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$

معامل التواء موجب يعني التواء لليمين ، ومعامل التواء سالب يعني التواء لليسار

التفرطح : هو درجة تدبب (ارتفاع أو انخفاض) قمة المنحنى مقارنة بقمة منحنى التوزيع الطبيعي ، ومقياسه : :

معامل التفرطح المئيني = $\frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{المدى المئيني}}$ = $\frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{المدى المئيني}}$

معامل تفرطح أكبر من 0.26 يعني مدبب ، وأقل يعني مفرطح

الباب السادس : تحليل الارتباط

يمكن تحديد ما إذا كان هناك ارتباط بين متغيرين أم لا ونوع هذا الارتباط (إن وُجِد) وقوته وذلك عن طريق "شكل الانتشار" أو عن طريق "معامل ارتباط الرتب r" حيث :

$$r = 1 - \frac{6\sum D^2}{n(n^2-1)}$$

حيث D تمثل الفرق في الرتب بين قيم x, y والتي تنحصر قيمته بين +1 , -1، فإذا كانت قيمته :

- موجبة ، دل ذلك على أن هناك ارتباط طردي بين المتغيرين x, y
- سالبة ، دل ذلك على أن هناك ارتباط عكسي بين المتغيرين x, y
- صفرا ، دل ذلك على أنه ليس هناك ارتباط بين المتغيرين x, y

أما قوة الارتباط فتحددها القيمة المطلقة لمعامل الارتباط طبقاً للجدول المبين

القيمة المطلقة لمعامل الارتباط	قوة الارتباط
0	لا يوجد ارتباط
$0 < r \leq 0.4$	ارتباط ضعيف
$0.4 < r \leq 0.6$	ارتباط متوسط
$0.6 < r < 1$	ارتباط قوي
1	ارتباط تام
> 1	خطأ في الحسابات

نهاية المقرر ..

أتمنى تتابعون الدكتور

وتتأكدون ان حصل أي تغير فى المحتوى ..

دعواتكم هنـآن ..