اسم المقرر

مبادئ الإحصاء

د. سعيد سيف الدين

جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين سيدنا ونبينا محمد بن عبد الله وعلى آله وصحبه أجمعين

المحاضرة الرابعة

[تابع] الباب الثاني
التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

عرض البيانات الكمية المتصلة

(١) تمهيد

(٢) العرض بطريقة الجداول

- الجداول التكرارية (أو التكرارية النسبية)
- الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والهابطة)

(٣) العرض البياني للبيانات المتصلة

تمهيد

كما ذكرنا سابقاً ، فإن البيانات **المتصلة** هي تلك البيانات التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير (الخاصية تحت الدراسة) أية قيمة بين قيمتين محددتين [مثل الأطوال ، الأوزان ، درجات الحرارة ، الدخل الشهري أو السنوي ، وغيرها] . ويمكن عرض هذه البيانات أيضاً عن طريق الجداول أو بيانياً . ولتوضيح ذلك دعنا ننظر للمثال التوضيحي التالي :

مثال توضيحي (٢-٤) : في تجربة على أطوال سيقان زهور معينة في أحد المعامل البحثية بكلية الزراعة بجامعة الملك فيصل، قيست سيقان 50 زهرة فكانت البيانات كالتالي :

x	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 35$	$35 \le x < 40$	$40 \le x < 50$	$50 \le x < 60$
f	4	16	12	10	6	2

حيث x هو طول الساق (بوحدات السنتيمتر) ، f هو عدد الأزهار .

المطلوب عرض هذه البيانات بطرق مختلفة .

قبل أن نبدأ في عرض البيانات لابد من التذكير والتنويه للتالي :

١. البيانات هنا بيانات كمية متصلة فيها المتغير x (طول الزهرة) متغير كمي متصل .

٢. عدد الأزهار f هو تكرار المتغير x [وهذا واضح] .

٣. قيم المتغير x هنا معطاة على صورة ٦ فترات أو ما يُسمى بـ **الفئات** حيث :

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

الفئة الأولى : $0 \le x < 20$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 0 إلى ما قبل 20

الفئة الثانية : $20 \le x < 30$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 20 إلى ما قبل 30

الفئة الثالثة : $30 \le x < 35$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 30 إلى ما قبل 35

الفئة الرابعة : $35 \le x < 40$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 35 إلى ما قبل 40

الفئة الخامسة : $40 \le x < 50$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 40 إلى ما قبل 50

الفئة السادسة : $50 \le x < 60$ يكون المتغير أكبر من أو يساوي 50 إلى ما قبل 60

تحذير : انتبه للفرق بين المتباينات ، وطريقة قراءتها وأيضاً معناها

المتباينة	$x < 10$	$x \le 10$	$x > 10$	$x \ge 10$
طريقة القراءة	x أقل من 10	x أقل من أو تساوي 10	x أكبر من 10	x أكبر من أو تساوي 10
معناها	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأصغر من 10	أي أن x لا تأخذ القيمة 10 ولكن تأخذ كل القيم الأكبر من 10	أي أن x تأخذ القيمة 10 وأيضاً تأخذ كل القيم الأكبر من 10

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

٤. لكل فئة حدان : **حد أدنى** ، **وحد أعلى**

- فالفئة الأولى : حدها الأدنى 0 وحدها الأعلى 20 [وهو الحد الأدنى للفئة الثانية]
- والفئة الثانية : حدها الأدنى 20 [الحد الأعلى للفئة الأولى] وحدها الأعلى 30 [وهو الحد الأدنى للفئة الثالثة]
- والفئة الثالثة : حدها الأدنى 30 [الحد الأعلى للفئة الثانية] وحدها الأعلى 35 [وهو الحد الأدنى للفئة الرابعة]

وهكذا .

أي أن الفئات متصلة ولا فراغات بينها ، والحد الأدنى لكل فئة من الفئات الوسطى [غير الأولى والأخيرة] هو الحد الأعلى للفئة السابقة ، والحد الأعلى لها هو الحد الأدنى للفئة التالية لها .

الفئة	المتغير x (الطول)	
الأولى	0 -	من 0 إلى ما قبل 20
الثانية	20 -	من 20 إلى ما قبل 30
الثالثة	30 -	من 30 إلى ما قبل 35
الرابعة	35 -	من 35 إلى ما قبل 40
الخامسة	40 -	من 40 إلى ما قبل 50
السادسة	50 - 60	من 50 إلى ما قبل 60

وعليه ، يمكن كتابة الفئات كما هو مبين ←- - - - - - - - - - -

٥. لكل فئة **طول** وهو يساوي الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة c
الأولى	$0 \le x < 20$	$20 - 0 = 20$
الثانية	$20 \le x < 30$	$30 - 20 = 10$
الثالثة	$30 \le x < 35$	$35 - 30 = 5$
الرابعة	$35 \le x < 40$	$40 - 35 = 5$
الخامسة	$40 \le x < 50$	$50 - 40 = 10$
السادسة	$50 \le x < 60$	$60 - 50 = 10$

- فالفئة الأولى طولها يساوي 20 والثانية طولها يساوي 10 والثالثة طولها يساوي 5 والرابعة طولها يساوي 5 والخامسة طولها يساوي 10 ، أما السادسة (والأخيرة) فطولها يساوي 10 . أي أن الفئات [في هذا المثال] ليست متساوية في الطول

---

٦. لكل فئة **مركز** [وسنرمز له بالرمز x_0] وهي قيمة المتغير x الواقعة في منتصف تلك الفئة ، وتُحسب ببساطة على أنها متوسط حديها الأدنى والأعلى ، أي أن :

$$\text{مركز أي فئة} = \frac{\text{حد الفئة الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{2}$$

الفئة	المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0
الأولى	$0 \le x < 20$	$(0 + 20) \div 2 = 10$
الثانية	$20 \le x < 30$	$(20 + 30) \div 2 = 25$
الثالثة	$30 \le x < 35$	$(30 + 35) \div 2 = 32.5$
الرابعة	$35 \le x < 40$	$(35 + 40) \div 2 = 37.5$
الخامسة	$40 \le x < 50$	$(40 + 50) \div 2 = 45$
السادسة	$50 \le x < 60$	$(50 + 60) \div 2 = 55$

ومن ثم يكون مركز الفئة الأولى 10 ، والثانية 25 والثالثة 32.5 ، والرابعة 37.5 والخامسة 45 ، ومركز الفئة الأخيرة (السادسة) 55

ويمكن تجميع كل ما تقدم في جدول واحد كالتالي

الفئة	المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0
الأولى	$0 \le x < 20$	$20 - 0 = 20$	$(0 + 20) \div 2 = 10$
الثانية	$20 \le x < 30$	$30 - 20 = 10$	$(20 + 30) \div 2 = 25$
الثالثة	$30 \le x < 35$	$35 - 30 = 5$	$(30 + 35) \div 2 = 32.5$
الرابعة	$35 \le x < 40$	$40 - 35 = 5$	$(35 + 40) \div 2 = 37.5$
الخامسة	$40 \le x < 50$	$50 - 40 = 10$	$(40 + 50) \div 2 = 45$
السادسة	$50 \le x < 60$	$60 - 50 = 10$	$(50 + 60) \div 2 = 55$

وبعد هذا التمهيد الضروري ، نعود إلى مثالنا ، حيث يمكن عرض البيانات (الكمية المتصلة) إما عن طريق جداول (تكرارية أو تكرارية نسبية) أو بيانياً كما في حالة البيانات المنفصلة التي سبق وتعرضنا لها من قبل

عرض البيانات الكمية المتصلة عن طريق الجداول

١. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) :

يُعتبر الجدول الأخير [بعد إضافة عمود التكرار أو عمود التكرار النسبي له] إحدى طرق عرض البيانات وبالتالي يمكننا الحصول على الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي للبيانات

المتغير x (الطول)	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	التكرار (العدد) f	التكرار النسبي $\bar{f}$
$0 \le x < 20$	20	10	4	4 ÷ 50 = 0.08 or 8%
$20 \le x < 30$	10	25	16	16 ÷ 50 = 0.32 or 32%
$30 \le x < 35$	5	32.5	12	12 ÷ 50 = 0.24 or 24%
$35 \le x < 40$	5	37.5	10	10 ÷ 50 = 0.20 or 20%
$40 \le x < 50$	10	45	6	6 ÷ 50 = 0.12 or 12%
$50 \le x < 60$	10	55	2	2 ÷ 50 = 0.04 or 4%
			$\sum f = 50$	$\sum \bar{f} =$ 1 or 100%

يمكن الاستغناء عنهما هنا

الجدول (التوزيع) التكراري

الجدول (التوزيع) التكراري النسبي

٢. الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع :

وفي حالة البيانات المتصلة قد يكون من المفيد تكوين ما يُسمى **بالتوزيع التكراري المتجمع الصاعد** الذي يُعطى **مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأدنى** لكل فئة من الفئات

الجدول التكراري	
التكرار f	المتغير x (الطول)
4	$0 \le x < 20$
16	$20 \le x < 30$
12	$30 \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < 60$
$\sum f = 50$	

من الصفحة السابقة

الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الصاعد		
التكرار النسبي المتجمع	التكرار المتجمع	المتغير x (الطول)
$0 \div 50 = 0$ [0%]	0	$x < 0$ أقل من 0
$4 \div 50 = 0.08$ [8%]	$0 + 4 = 4$	$x < 20$ أقل من 20
$20 \div 50 = 0.40$ [40%]	$4 + 16 = 20$	$x < 30$ أقل من 30
$32 \div 50 = 0.64$ [64%]	$20 + 12 = 32$	$x < 35$ أقل من 35
$42 \div 50 = 0.84$ [84%]	$32 + 10 = 42$	$x < 40$ أقل من 40
$48 \div 50 = 0.96$ [96%]	$42 + 6 = 48$	$x < 50$ أقل من 50
$50 \div 50 = 1$ [100%]	$48 + 2 = 50$	$x < 60$ أقل من 60
$\sum \bar{f}$	$\sum f$	

ذيل السهم يدل على البداية واتجاهه يدل على التجميع التوالي للتكرارات

0

$\sum f$

وفي أحيان أخرى قد يكون من المرغوب فيه الحصول على **التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى لكل فئة** . عندئذٍ يُسمى التوزيع **بالتوزيع التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط (أو النازل)** .

$\sum f$

$\sum \bar{f}$

$\sum f$

الجدول التكراري	
التكرار f	المتغير x (الطول)
4	$0 \le x < 20$
16	$20 \le x < 30$
12	$30 \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < 60$
$\sum f = 50$	

من الصفحة السابقة

الجدول (التوزيع) التكراري (أو التكراري النسبي) المتجمع الهابط

	المتغير x (الطول)	التكرار المتجمع	التكرار النسبي المتجمع
0 أو أكثر	$x \ge 0$	46 + 4 = 50	50 ÷ 50 = 1 [100%]
20 أو أكثر	$x \ge 20$	30 + 16 = 46	46 ÷ 50 = 0.92 [92%]
30 أو أكثر	$x \ge 30$	18 + 12 = 30	30 ÷ 50 = 0.60 [60%]
35 أو أكثر	$x \ge 35$	8 + 10 = 18	18 ÷ 50 = 0.36 [36%]
40 أو أكثر	$x \ge 40$	2 + 6 = 8	8 ÷ 50 = 0.16 [16%]
50 أو أكثر	$x \ge 50$	0 + 2 = 2	2 ÷ 50 = 0.04 [4%]
60 أو أكثر	$x \ge 60$	0	0 ÷ 50 = 0 [0%]

ذيل السهم يدل على البداية واتجاهه يدل على التجميع التالي للتكرارات

0

هل لاحظت الفارق بين التوزيعين المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط

الجدول التكراري	
التكرار	المتغير x
4	$0 \le x < 20$
16	$20 \le x < 30$
12	$30 \le x < 35$
10	$35 \le x < 40$
6	$40 \le x < 50$
2	$50 \le x < 60$
$\sum f = 50$	

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

التكرار المتجمع	المتغير x (الطول)
0	أقل من 0
0 + 4 = 4	أقل من 20
4 + 16 = 20	أقل من 30
20 + 12 = 32	أقل من 35
32 + 10 = 42	أقل من 40
42 + 6 = 48	أقل من 50
48 + 2 = 50	أقل من 60

الحد الأدنى للفئة الأولى

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

$\sum f$

0

$\sum f$

التوزيع التكراري المتجمع الهابط

التكرار المتجمع	المتغير x (الطول)
46 + 4 = 50	0 أو أكثر
30 + 16 = 46	20 أو أكثر
18 + 12 = 30	30 أو أكثر
8 + 10 = 18	35 أو أكثر
2 + 6 = 8	40 أو أكثر
0 + 2 = 2	50 أو أكثر
0	60 أو أكثر

$\sum f$

الحد الأدنى للفئة الأولى

$\sum f$

0

الحد الأعلى للفئة الأخيرة

عرض البيانات الكمية المتصلة بيانياً

يمكن عرض البيانات المتصلة بطرق مختلفة وكل طريقة لها مزاياها ويمكن أن ترد على بعض الأسئلة بأسلوب أسرع من نظيرتها ، لذا سنستعرض بعضاً من هذه الطرق . وكما ذكرنا سابقاً (عند تعاملنا مع البيانات المنفصلة) أنه من أساسيات عرض أي بيانات بيانياً هو **وضوح وبساطة** طريقة العرض ولا مانع من أن تكون أيضاً **جاذبة** . ولعرض للبيانات المعطاة في المثال التوضيحي (٢-٤) السابق يجب القيام أولاً بتنظيم البيانات [إن كانت على صورة بيانات خام] ووضعها في صورة جدول تكراري أو جدول تكراري نسبي [كما سبق] ثم نقوم بعرضها بيانياً بطرق مختلفة منها :

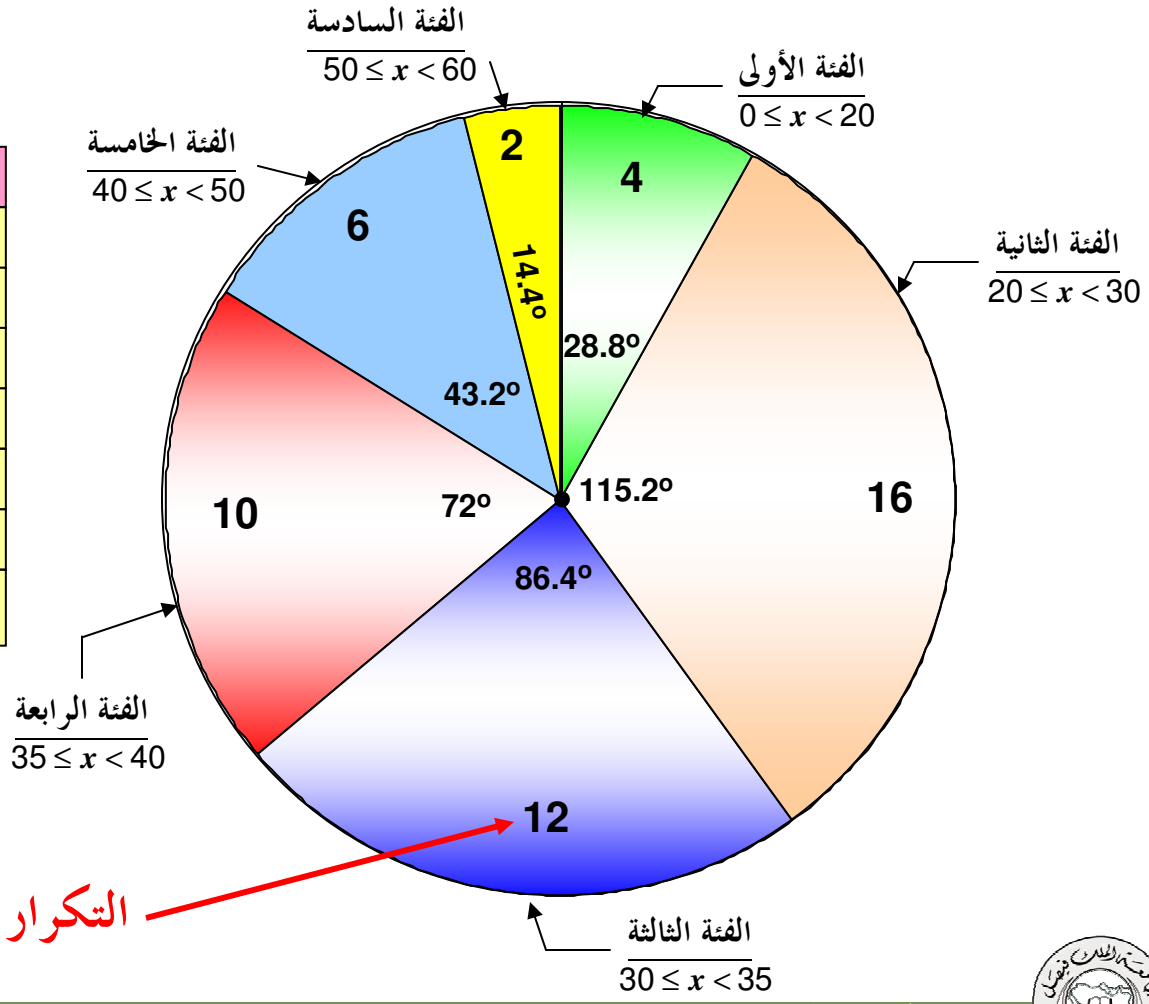
- **الدائرة :** وهي مشابهة تماماً لطريقة الدائرة في عرض البيانات المنفصلة ، لذا سنبدأ بها .
- **المدرج التكراري :** وهي تناظر طريقة الأعمدة البسيطة في حالة البيانات المنفصلة .
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري :** وهي تناظر طريقة المضلع (أو المنحنى) التكراري للبيانات المنفصلة .
- **المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد (أو الهابط) :**

وهي طريقة ذات أهمية كبيرة في حالة البيانات الكمية المتصلة

طريقة الدائرة لعرض البيانات الكمية المتصلة

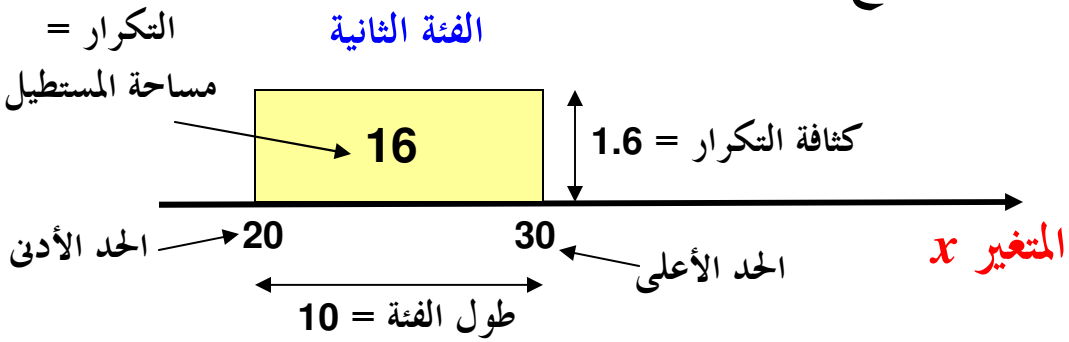
تُمثل كل فئة بقطاع دائري طبقاً للزاوية المركزية لهذه الفئة . إذن لابد من تحديد الزوايا المركزية أولاً ثم تمثيل البيانات بنفس الطريقة التي اتبعناها مع البيانات المنفصلة .

الجدول التكراري		
المتغير x	التكرار f	الزاوية المركزية
$0 \le x < 20$	4	$(4 \div 50) \times 360 = 28.8^o$
$20 \le x < 30$	16	$(16 \div 50) \times 360 = 115.2^o$
$30 \le x < 35$	12	$(12 \div 50) \times 360 = 86.4^o$
$35 \le x < 40$	10	$(10 \div 50) \times 360 = 72^o$
$40 \le x < 50$	6	$(6 \div 50) \times 360 = 43.2^o$
$50 \le x < 60$	2	$(2 \div 50) \times 360 = 14.4^o$
	$\sum f = 50$	مجموع الزوايا = 360^o



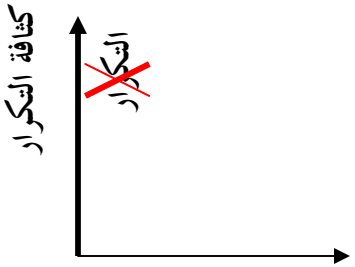
طريقة المدرج التكراري لتمثيل البيانات الكمية المتصلة

هو أسلوب مشابه لطريقة الأعمدة البسيطة [للبيانات المنفصلة] مع الاختلافات التالية :



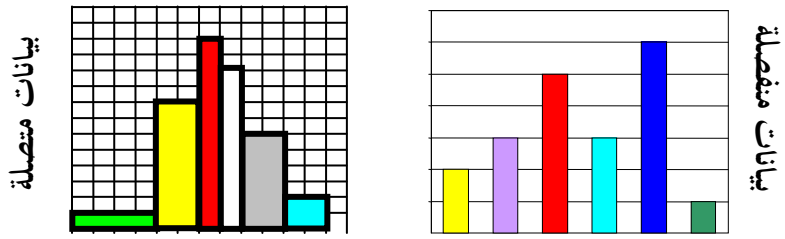
١. تُمثل كل فئة بمستطيل قاعدته تقع على المحور الأفقي [الذي يمثل المتغير x] وعرضه يساوي طول الفئة ومساحته تساوي تكرار الفئة .

وحيث أن مساحة أي مستطيل تساوي عرض المستطيل مضروباً في ارتفاعه ، فإن ارتفاع أي مستطيل يكون مساوياً لـ "تكرار الفئة مقسوماً على طول الفئة" . سنسمي خارج القسمة هذا بـ "كثافة التكرار" .



٢. المحور الرأسي هنا يمثل كثافة التكرار [وليس التكرار كما في حالة الأعمدة البسيطة] .

٣. لا فراغات موجودة بين المستطيلات [حيث أن البيانات هنا بيانات متصلة] بخلاف طريقة الأعمدة في حالة البيانات المنفصلة حيث يجب ألا تكون الأعمدة متلاصقة .



الجدول التكراري

الفئة	المتغير x (الطول)
الأولى	$0 \le x < 20$
الثانية	$20 \le x < 30$
الثالثة	$30 \le x < 35$
الرابعة	$35 \le x < 40$
الخامسة	$40 \le x < 50$
السادسة	$50 \le x < 60$

وبالتالي لرسم المدرج التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها

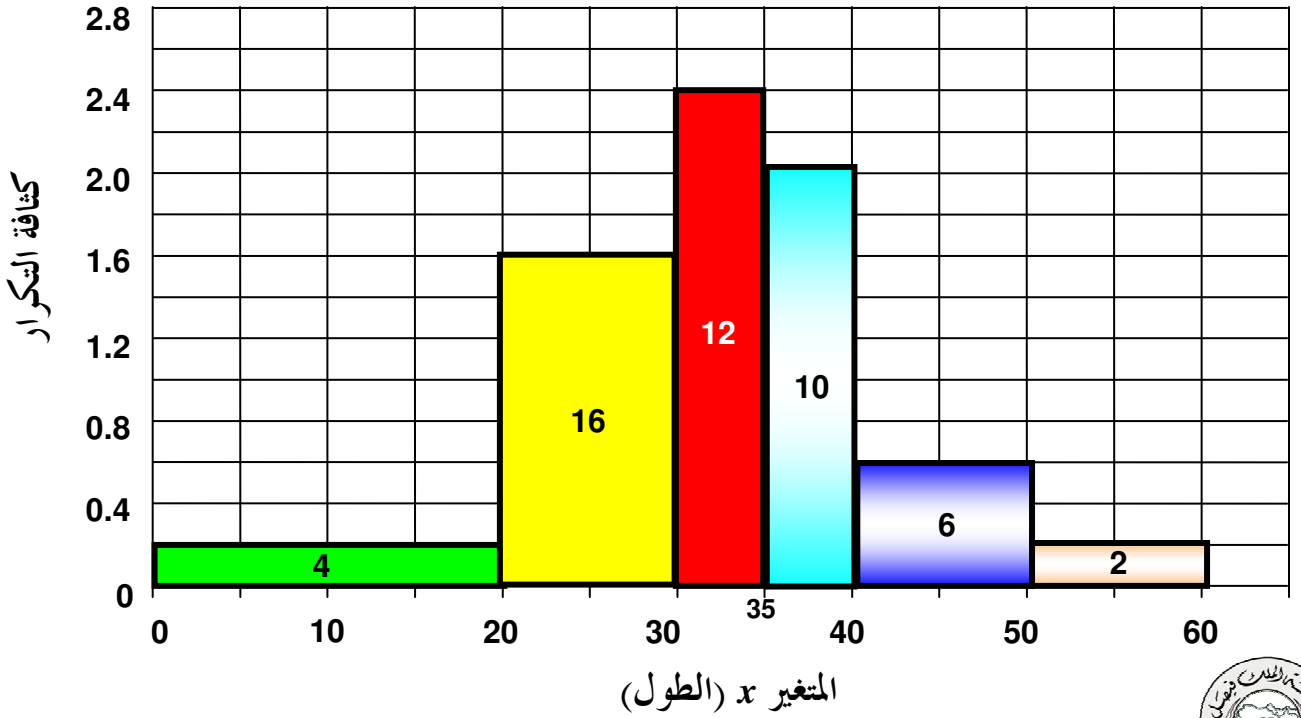
إضافة للجدول

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	كثافة التكرار $f \div c$
$0 \le x < 20$	4	20	$4 \div 20 = 0.2$
$20 \le x < 30$	16	10	$16 \div 10 = 1.6$
$30 \le x < 35$	12	5	$12 \div 5 = 2.4$
$35 \le x < 40$	10	5	$10 \div 5 = 2$
$40 \le x < 50$	6	10	$6 \div 10 = 0.6$
$50 \le x < 60$	2	10	$2 \div 10 = 0.2$

المتغير x	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	1.6
$30 \le x < 35$	12	5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	2
$40 \le x < 50$	6	10	0.6
$50 \le x < 60$	2	10	0.2

والآن يمكن رسم المدرج التكراري بأخذ محورين متعامدين : الأفقي ويمثل المتغير x [وهنا مقياس الرسم له أو تدريجه مهم] والرأسي يمثل كثافة التكرار ونقوم بتمثيل كل فئة بمستطيل قاعدته على المحور الأفقي (وطولها = طول الفئة) وارتفاعه يمثل كثافة تكرار الفئة (وبالتالي مساحته تساوي تكرار الفئة) .

المدرج التكراري للمثال التوضيحي (٢-٤)



تذكر وتذكري الآتي :

١. مساحة كل مستطيل هي تكرار الفئة ، وبالتالي فإن مجموع مساحات المستطيلات في المدرج التكراري هي التكرار الكلي [50 هنا]

٢. ارتفاع كل مستطيل هو كثافة التكرار وليس التكرار أو التكرار النسبي .

٣. طول قاعدة أي مستطيل هي طول الفئة

٤. المستطيلات متلاصقة وليس بينها فراغات

المضلع (المنحنى) التكراري للبيانات الكمية المتصلة

وهو أسلوب مشابه لطريقة المضلع التكراري للبيانات المنفصلة ، إلا أن كل فئة تُمثل بنقطة : إحداثيها الأفقي هو **مركز الفئة** ، وإحداثيها الرأسي هو **كثافة تكرارها** .

وبالتالي لرسم المضلع التكراري لابد أن نضيف للجدول التكراري أعمدة تبين طول كل فئة وكثافة تكراراها [كما في حالة المدرج التكراري] إلى جانب عمود يبين مركز الفئة .

المتغير x (الطول)	التكرار (العدد) f	طول الفئة c	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار
$0 \le x < 20$	4	20	10	0.2
$20 \le x < 30$	16	10	25	1.6
$30 \le x < 35$	12	5	32.5	2.4
$35 \le x < 40$	10	5	37.5	2
$40 \le x < 50$	6	10	45	0.6
$50 \le x < 60$	2	10	55	0.2

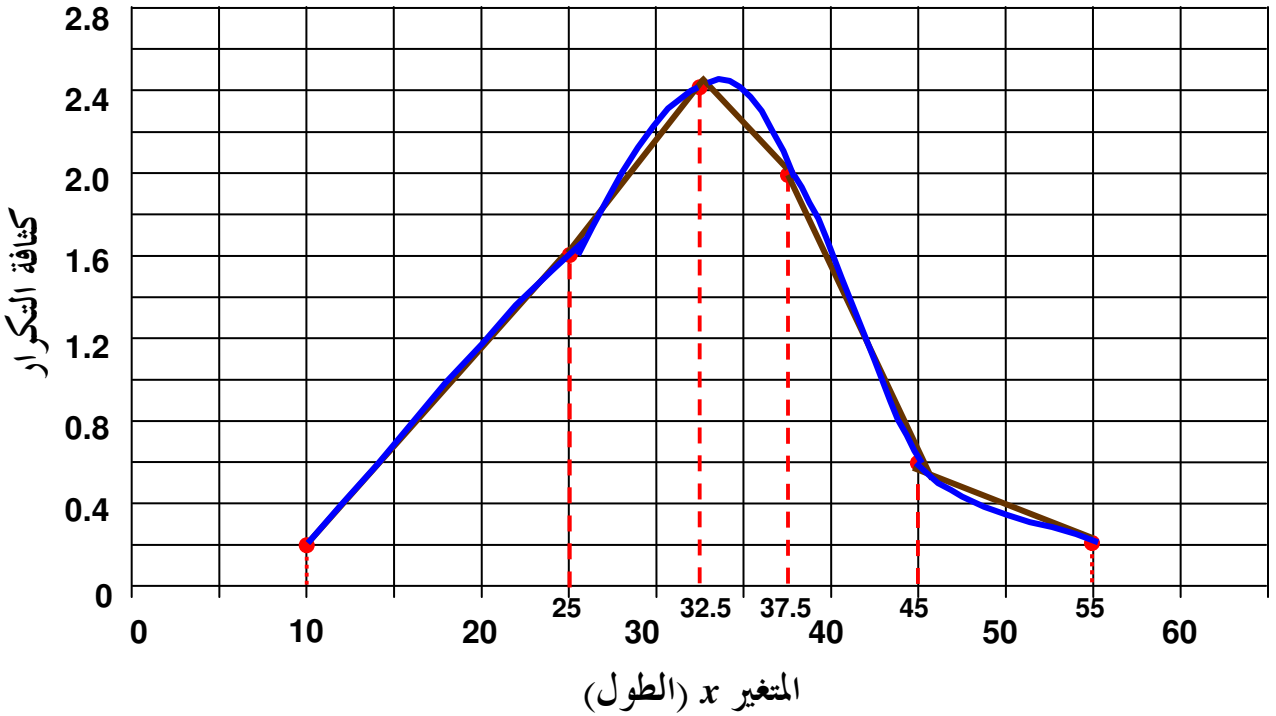
المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \le x < 20$	10	0.2	(10 , 0.2)
$20 \le x < 30$	25	1.6	(25 , 1.6)
$30 \le x < 35$	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
$35 \le x < 40$	37.5	2	(37.5 , 2)
$40 \le x < 50$	45	0.6	(45 , 0.6)
$50 \le x < 60$	55	0.2	(55 , 0.2)

أخذنا من الجدول السابق ما يهمنا

وبأخذ محورين متعامدين : الأفقي (ويمثل المتغير x) والرأسي (ويمثل كثافة التكرار) ، نقوم بتمثيل الفئات بالنقاط المبينة بالجدول .

ثم نقوم بتوصيل هذه النقاط بالمسطرة نحصل على خط منكسر هو المضلع التكراري للبيانات .

أما إذا قمنا بتوصيل النقاط باليد وبطريقة ناعمة نحصل على خط ممهد هو المنحنى التكراري لمجموعة البيانات .

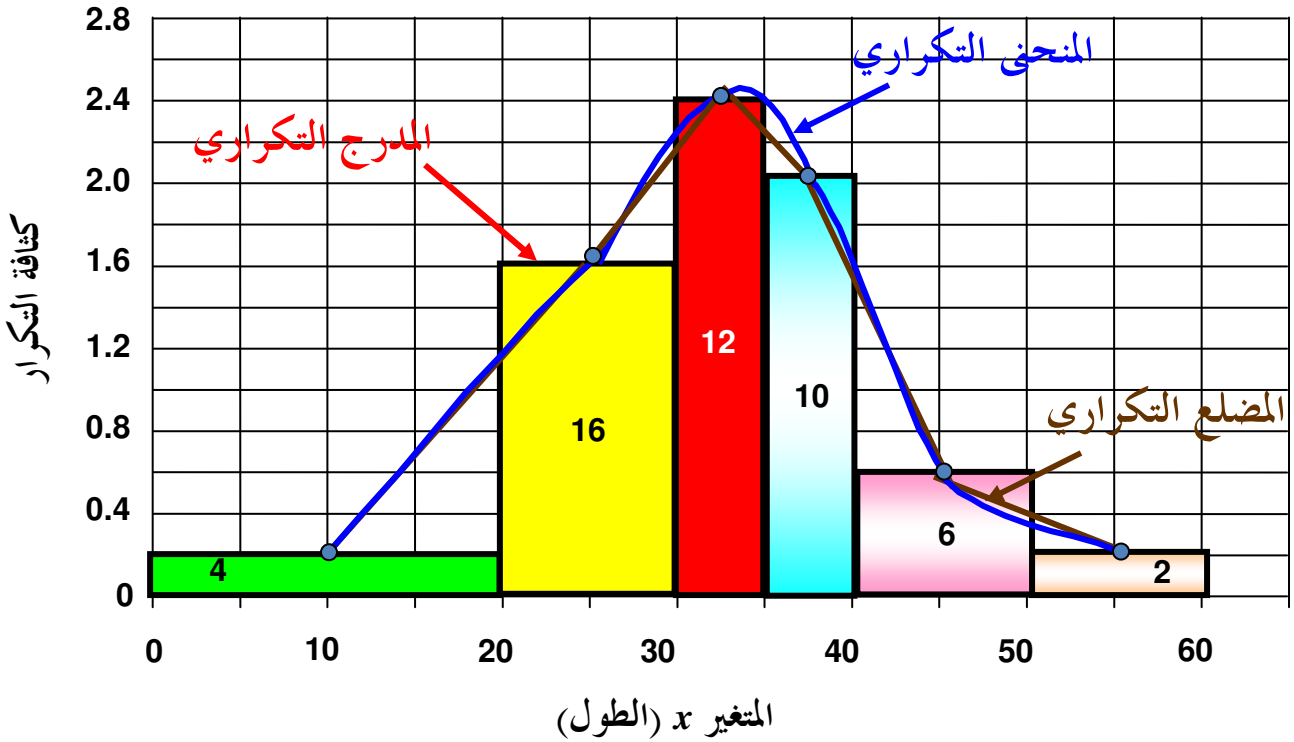


المضلع التكراري

المنحنى التكراري

المتغير x (الطول)	مركز الفئة x_0	كثافة التكرار	النقطة
$0 \le x < 20$	10	0.2	(10 , 0.2)
$20 \le x < 30$	25	1.6	(25 , 1.6)
$30 \le x < 35$	32.5	2.4	(32.5 , 2.4)
$35 \le x < 40$	37.5	2	(37.5 , 2)
$40 \le x < 50$	45	0.6	(45 , 0.6)
$50 \le x < 60$	55	0.2	(55 , 0.2)

لاحظ أنه يمكن رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري والمنحنى التكراري على رسمة واحدة ، حيث أن نقطة منتصف القاعدة العليا من كل مستطيل في المدرج التكراري هي النقطة الممثلة للفئة عند رسم كل من المضلع التكراري والمنحنى التكراري



تمت بحمد الله