اسم المقرر

مبادئ الإحصاء

د. سعيد سيف الدين

جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين سيدنا ونبينا محمد بن عبد الله وعلى آله وصحبه أجمعين

المحاضرة الحادية عشرة

[تابع] الباب الرابع
مقاييس التشتت

عناصر المحاضرة

- حل مسائل "سلي نفسك" الموجودة بالمحاضرة العاشرة
- تابع مقاييس التشتت
  - الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]
  - المدى المئيني
- علاقات اعتبارية بين مقاييس التشتت
- التشتت النسبي ومقاييسه
- الدرجات المعيارية

حل مسائل "سلي نفسك" الموجودة بالمحاضرة العاشرة

(١) أوجد المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s لمجموعة القيم :

5 3 8 4 7 6 12 4 3 8

الحل :

عدد القيم n يساوي 10

- المدى R = أكبر قيمة − أقل قيمة = 12 − 3 = 9
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{10} = 6$
- الانحراف المتوسط $M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{22}{10} = 2.2$
- التباين $s^2 = \frac{\sum d^2}{n} = \frac{72}{10} = 7.2$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7.2} \cong 2.68$

x	d	$\lvert d\rvert$	d^2
5	-1	1	1
3	-3	3	9
8	2	2	4
4	-2	2	4
7	1	1	1
6	0	0	0
12	6	6	36
4	-2	2	4
3	-3	3	9
8	2	2	4
60		22	72
$\sum x$		$\sum \lvert d\rvert$	$\sum d^2$

(٢) أوجدى المدى R، الوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الانحراف المتوسط $M.D$ ، التباين s^2 ، والانحراف المعياري s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	8	2	4	6
التكرار f	20	30	35	15

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$	$f\|d\|$	d^2	fd^2
8	20	160	8 – 4.5 = 3.5	3.5	20 × 3.5 = 70	12.25	245
2	30	60	2 – 4.5 = -2.5	2.5	30 × 2.5 = 75	6.25	187.5
4	35	140	4 – 4.5 = -0.5	0.5	35 × 0.5 = 17.5	0.25	8.75
6	15	90	6 – 4.5 = 1.5	1.5	15 × 1.5 = 22.5	2.25	33.75
	100	450			185		475
	$\sum f$	$\sum fx$			$\sum f\|d\|$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = 8 – 2 = 6
- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{450}{100} = 4.5$
- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\,|d|}{\sum f} = \dfrac{185}{100} = 1.85$
- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{475}{100} = 4.75$
- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.75} \cong 2.18$

(٣) أوجدى R، $\bar{x}$، $M.D$، s^2، s للبيانات المبينة بالجدول التكراري المقابل .

المتغير x	$5 \le x < 15$	$15 \le x < 25$	$25 \le x < 45$	$45 \le x < 55$
التكرار f	20	30	40	10

الحل :

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	$\lvert d\rvert$	$f\lvert d\rvert$	d^2	fd^2
$5 \le x < 15$	20	10	200	10 – 27 = -17	17	20 × 17 = 340	289	5780
$15 \le x < 25$	30	20	600	20 – 27 = -7	7	30 × 7 = 210	49	1470
$25 \le x < 45$	40	35	1400	35 – 27 = 8	8	40 × 8 = 320	64	2560
$45 \le x < 55$	10	50	500	50 – 27 = 23	23	10 × 23 = 230	529	5290
	100		2700			1100		15100
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum f\lvert d\rvert$		$\sum fd^2$

- المدى R = أكبر قيمة – أقل قيمة = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى= 55 – 5 = **50**

- الوسط الحسابي $\bar{x} = \dfrac{\sum fx_0}{\sum f} = \dfrac{2700}{100} = 27$

- الانحراف المتوسط $M.D = \dfrac{\sum f\lvert d\rvert}{\sum f} = \dfrac{1100}{100} = 11$

- التباين $s^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} = \dfrac{15100}{100} = 151$

- الانحراف المعياري $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{151} \cong 12.29$

رابعاً : الانحراف الربيعي [نصف المدى الربيعي]

لمجموعة من البيانات يُعرف الانحراف الربيعي [أو نصف المدى الربيعي وسنرمز له بالرمز Q] كالآتي :

$$Q \text{ [نصف المدى الربيعي] الانحراف الربيعي } = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

الربيع الثالث

الربيع الأول

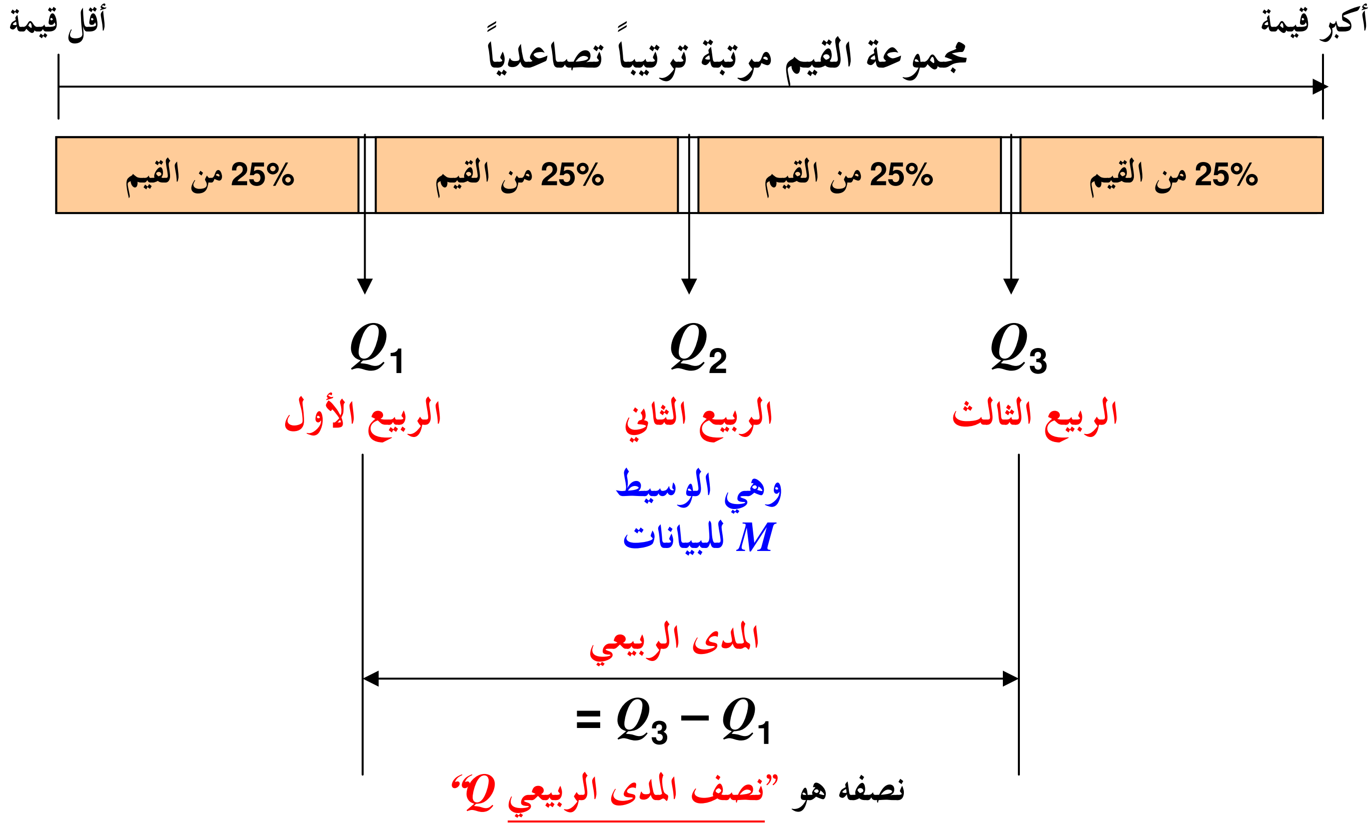
ويفضل استخدام هذا المقياس [الانحراف الربيعي] في الكثير من الحالات خاصة تلك الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

وفي بعض الأحيان يُستخدم المدى الربيعي $Q_3 - Q_1$ كمقياس للتشتت بدلاً من نصف المدى الربيعي

س : ما هي الربيعات ؟

ج : إذا رتبنا مجموعة من القيم ترتيباً تصاعدياً فإن القيمة التي تقسم المجموعة إلى مجموعتين متساويتين في العدد تُسمى بالوسيط M . بتعميم هذه الفكرة ، يمكن أن نقسم مجموعة القيم إلى أربعة أجزاء متساوية في العدد وذلك بثلاثة قيم [سنرمز لها بالرموز Q_1 , Q_2 , Q_3] . هذه القيم تُسمى بالربيعات حيث :

Q_1 تُسمى بالربيع الأول ، Q_2 تُسمى بالربيع الثاني ، Q_3 تُسمى بالربيع الثالث



أي أن :

Q_1 [الربيع الأول] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 25% من القيم [وبالطبع وفوقها 75% من القيم]

Q_2 [الربيع الثاني] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 50% من القيم [وبالطبع فوقها 50% من القيم] [أي الوسيط M]

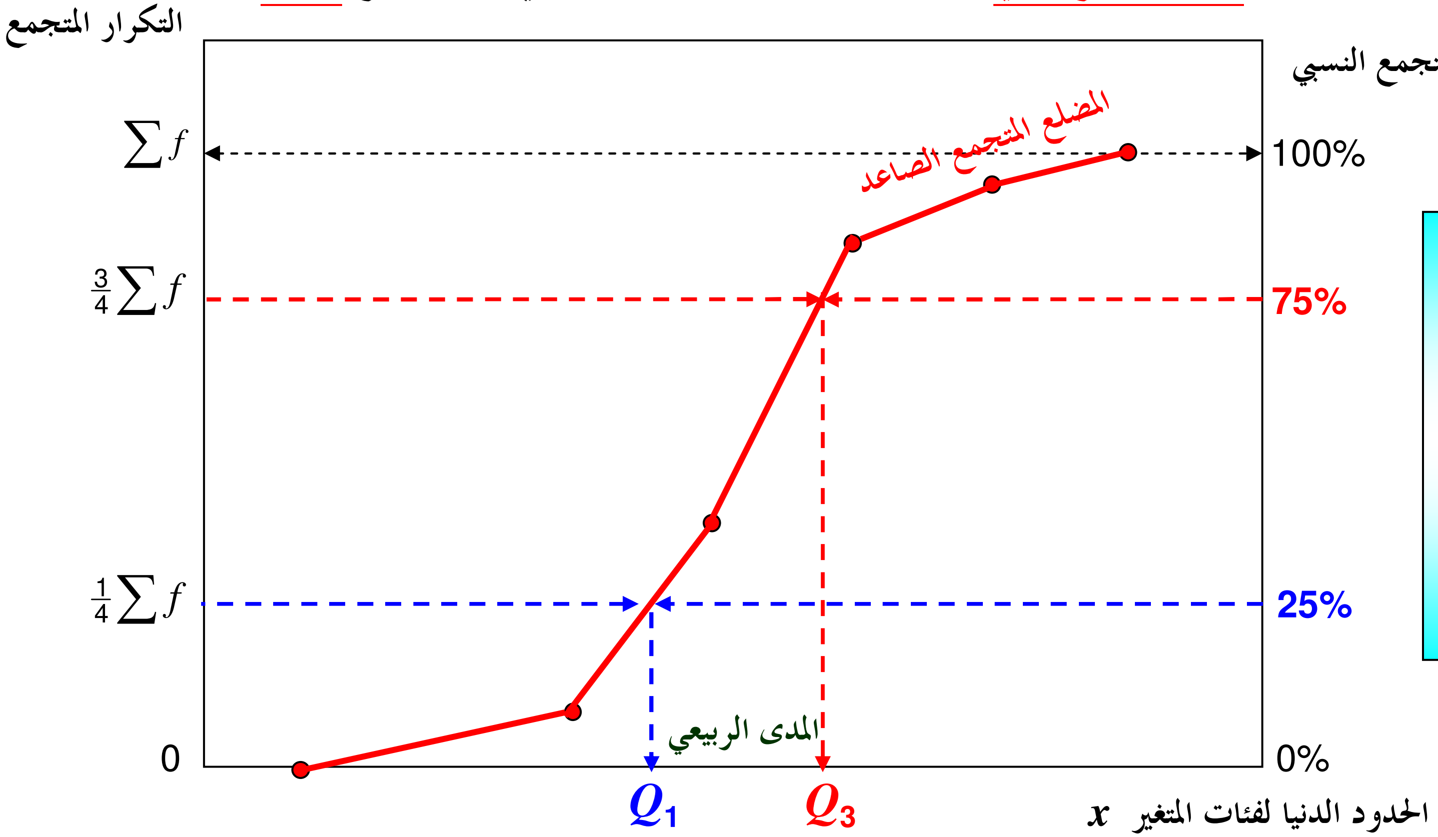
Q_3 [الربيع الثالث] هي تلك القيمة التي يقع تحتها 75% من القيم [وبالطبع فوقها 25% من القيم]

ويكن تحديد الربيعين Q_1 (الأول) ، Q_3 (الثالث) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M [الربيع الثاني Q_2] ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديدها [ومن ثم تحديد نصف المدى الربيعي Q] للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{1}{4}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 25%] فتكون تلك القيمة هي Q_1 [الربيع الأول] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{3}{4}\sum f$ [أو تكرار متجمع نسبي قدره 75%] فتكون تلك القيمة هي Q_3 [الربيع الثالث] .



ويكون المدى الربيعي هو :

$$\boxed{Q_3 - Q_1}$$

ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو :

$$\boxed{Q = \tfrac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}$$

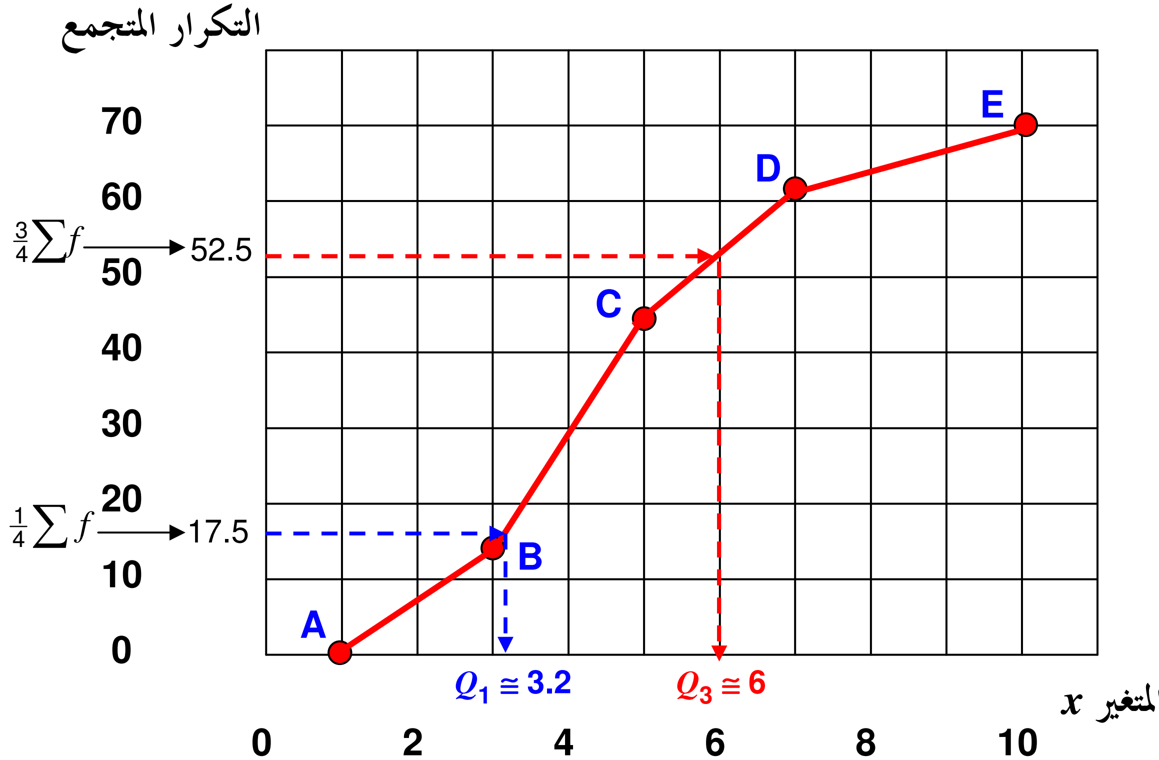
فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

المتغير x	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

ملحوظة : $\frac{1}{4}\sum f = 17.5$, $\frac{3}{4}\sum f = 52.5$



إذن المدى الربيعي هو : $\boxed{Q_3 - Q_1 = 6 - 3.2 = 2.8}$

ونصف المدى الربيعي [أو الانحراف الربيعي] هو : $\boxed{Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2} \times 2.8 = 1.4}$

خامساً : المدى المئيني : لمجموعة من البيانات يُعرف المدى المئيني [وسنرمز له بالرمز P] كالآتي :

المدى المئيني : $P = P_{90} - P_{10}$

المئين العاشر

المئين التسعون

ويفضل أيضاً استخدامه في الحالات التي يستعصي فيها حساب الانحراف المتوسط أو المعياري [مثل حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو حالة وجود قيم متطرفة في البيانات]

س : ما هي المئينات ؟

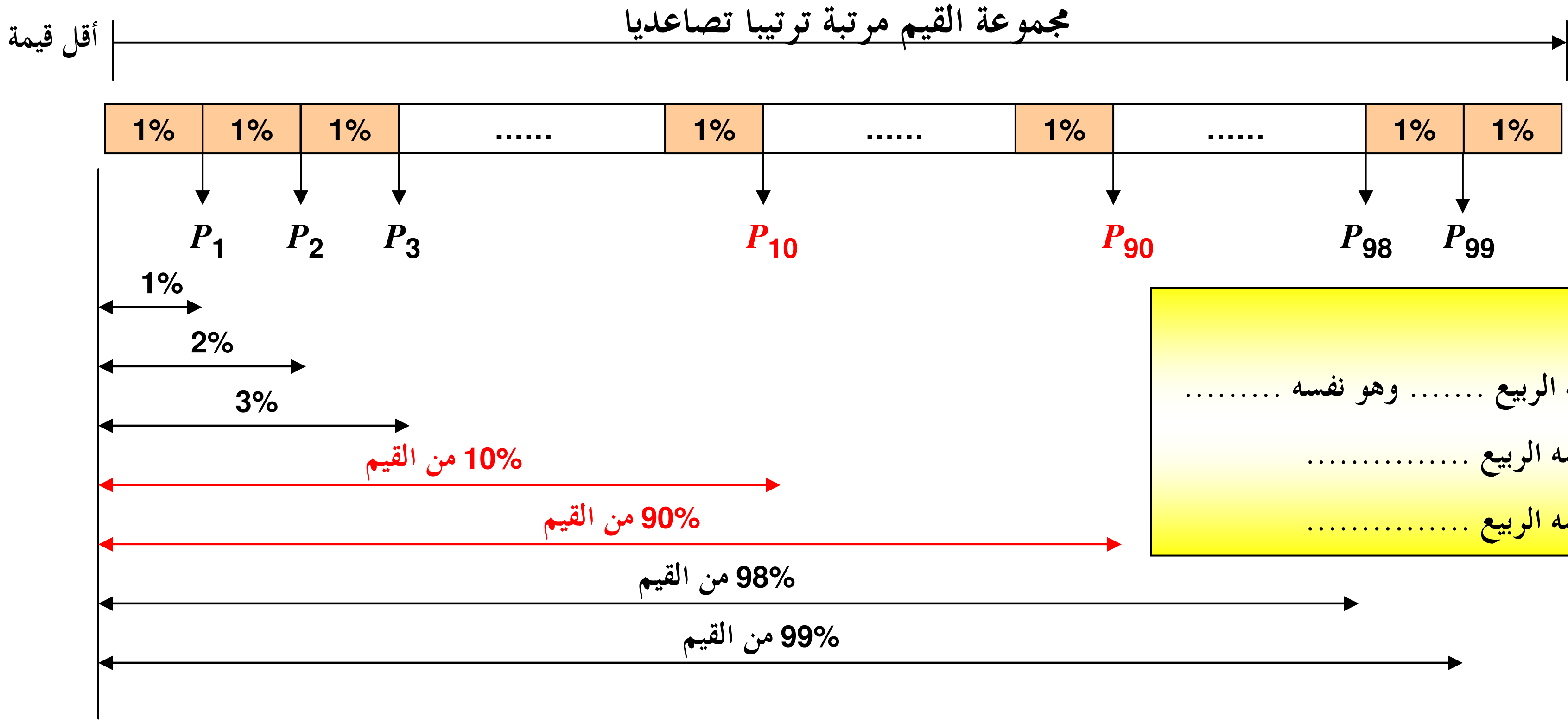
ج : بنفس الطريقة التي تم بها تقسيم مجموعة من القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد [عن طريق الوسيط M] أو تقسيمها إلى أربعة مجموعات متساوية في العدد [عن طريق الربيعات Q_1 , Q_2 , Q_3] ، يمكن تقسيم مجموعة القيم إلى 100 مجموعة متساوية في العدد عن طريق قيم عددها 99 سنرمز لها بالرموز :

$$P_1 , P_2 , \ldots\ldots , P_{10} , \ldots\ldots , P_{90} , \ldots\ldots , P_{98} , P_{99}$$

تُسمى هذه القيم بـــ المئينات ، حيث :

P_1 [المئين الأول] : هو قيمة يقع تحتها 1% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 99% من القيم]

P_2 [المئين الثاني] : هو قيمة يقع تحتها 2% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 98% من القيم]



للأذكياء فقط :

المئين P_{50} هو نفسه الربيع .... وهو نفسه ....

والمئين P_{25} هو نفسه الربيع ....

والمئين P_{75} هو نفسه الربيع ....

P_{10} [المئين العاشر] : هو قيمة يقع تحتها 10% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 90% من القيم]

P_{90} [المئين التسعون] : هو قيمة يقع تحتها 90% من مجموع القيم [وبالطبع يقع فوقها 10% من القيم]

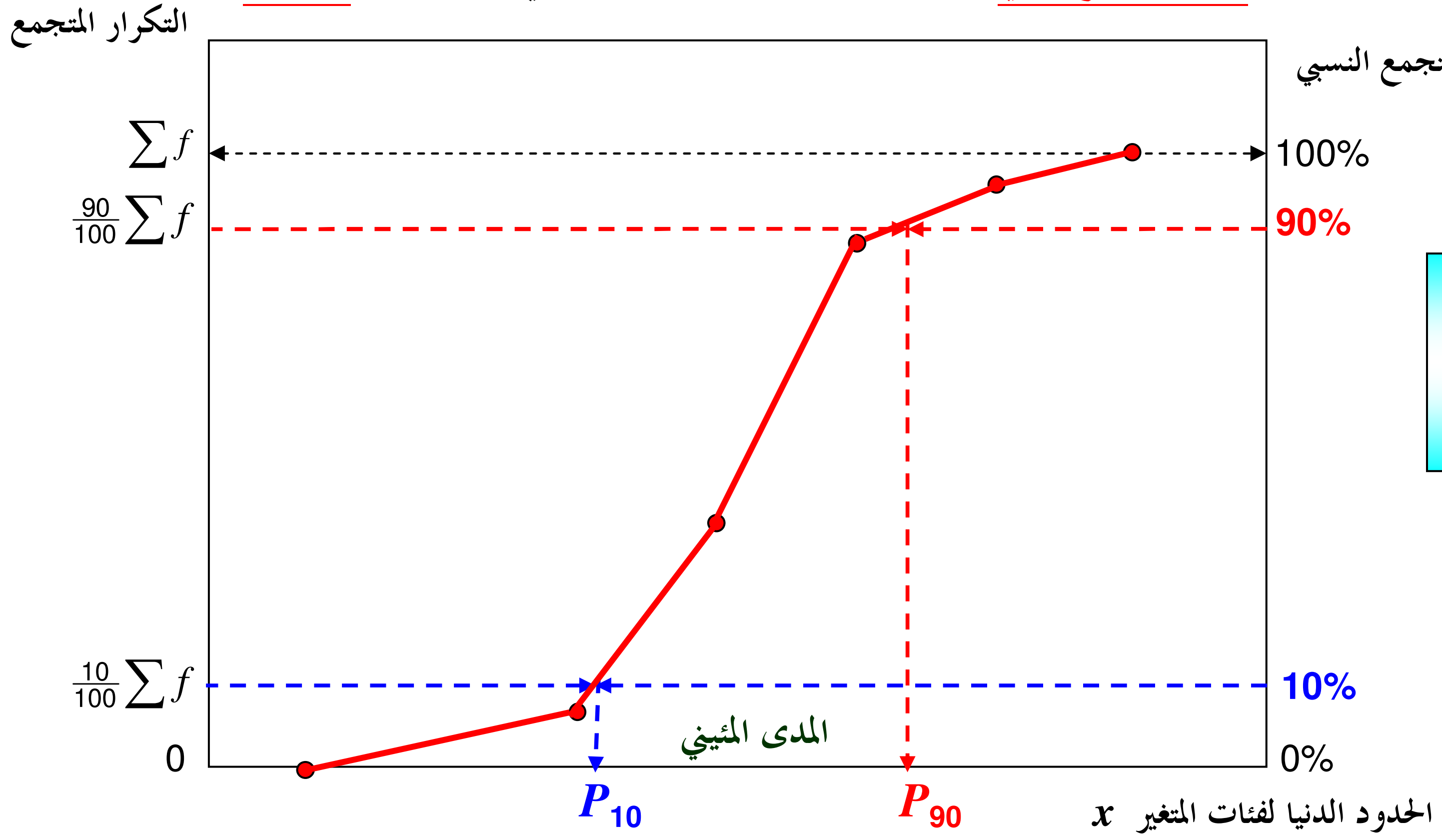
وهكذا ....

ويكن تحديد المئينات P_{10} (العاشر) ، P_{90} (التسعون) بنفس الطريقة التي حددنا بها الوسيط M والربيعات ، إلا أننا سنكتفي هنا بتحديدها [ومن ثم تحديد المدى المئيني P] للبيانات الكمية المتصلة كالتالي :

على المضلع التكراري المتجمع الصاعد :

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{10}{100}\sum f$[أو تكرار متجمع نسبي قدره 10%] فتكون تلك القيمة هي P_{10} [المئين العاشر] .

حدد قيمة المتغير المناظرة لتكرار متجمع قدره $\frac{90}{100}\sum f$[أو تكرار متجمع نسبي قدره 90%] فتكون تلك القيمة هي P_{90} [المئين التسعون] .



ويكون المدى المئيني هو :

$$P = P_{90} - P_{10}$$

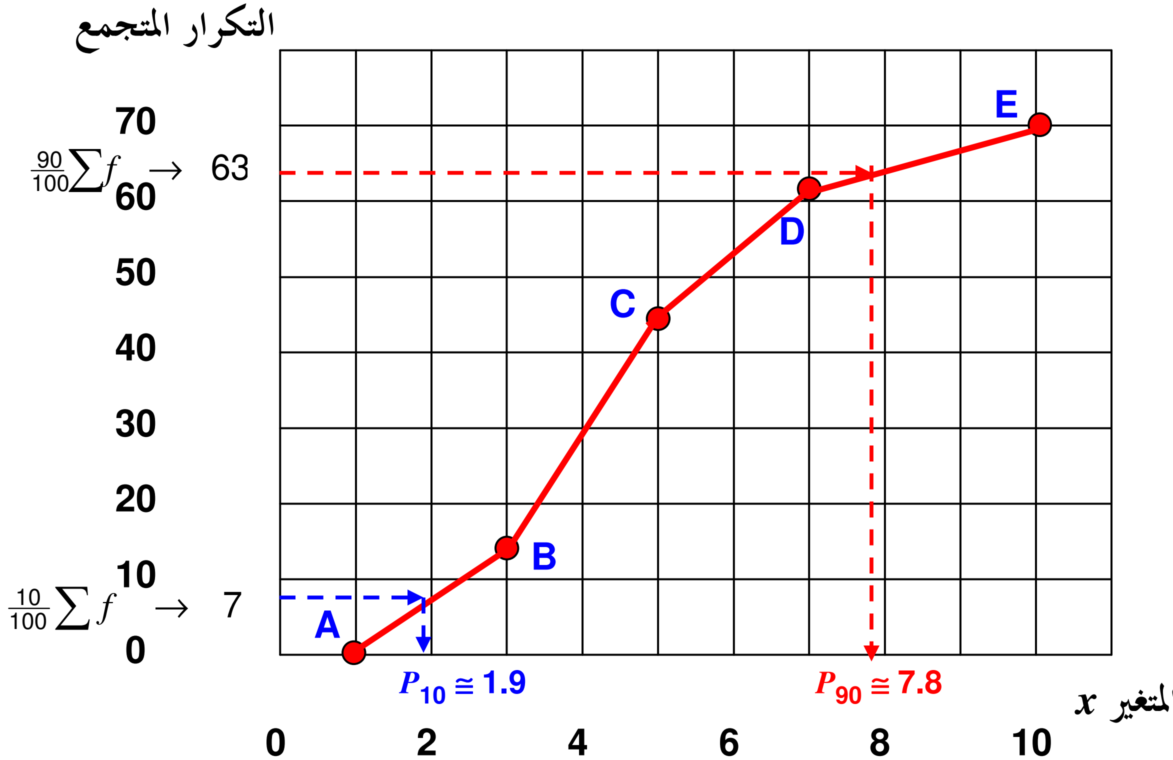
المتغير x	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 10$
التكرار f	14	29	18	9

فمثلاً للتوزيع التكراري المبين :

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد ومنه حدد قيم المئين العاشر P_{10} والمئين التسعين P_{90} بالطريقة المذكورة سابقاً

الجدول التكراري المتجمع الصاعد		
المتغير x	التكرار المتجمع	النقطة على المضلع
< 1	0	A (1 , 0)
< 3	14	B (3 , 14)
< 5	43	C (5 , 43)
< 7	61	D (7 , 61)
< 10	$\sum f = 70$	E (10 , 70)

ملحوظة : $\frac{90}{100}\sum f = 63$, $\frac{10}{100}\sum f = 7$



إذن المدى المئيني هو : $P = P_{90} - P_{10} \cong 7.8 - 1.9 = 6.9$

علاقات اعتبارية بين مقاييس التشتت

في التوزيعات متوسطة الالتواء هناك علاقات اعتبارية (تقريبية) بين مقاييس التشتت السابقة كالآتي :

الانحراف المتوسط = $\frac{٤}{٥}$ × الانحراف المعياري	$M.D=\frac{4}{5}s$	أو	الانحراف المعياري = $\frac{٥}{٤}$ × الانحراف المتوسط	$s=\frac{5}{4}M.D$
الانحراف الربيعي = $\frac{٢}{٣}$ × الانحراف المعياري	$Q=\frac{2}{3}s$	أو	الانحراف المعياري = $\frac{٣}{٢}$ × الانحراف الربيعي	$s=\frac{3}{2}Q$
الانحراف المتوسط = $\frac{٦}{٥}$ × الانحراف الربيعي	$M.D=\frac{6}{5}Q$	أو	الانحراف الربيعي = $\frac{٥}{٦}$ × الانحراف المتوسط	$Q=\frac{5}{6}M.D$

هذه العلاقات الاعتبارية تمكننا من حساب قيم تقريبية لبقية مقاييس التشتت متى عُلم أحدها [وذلك في حالة صلاحيتها .. أي في حالة التوزيعات التكرارية متوسطة الالتواء]

فمثلاً :

- إذا كان $s = 30$ فإن : $Q=\frac{2}{3}s=\frac{2}{3}\times 30=\underline{\underline{20}}$, $M.D=\frac{4}{5}s=\frac{4}{5}\times 30=\underline{\underline{24}}$
- وإذا كان $Q = 20$ فإن : $s=\frac{3}{2}Q=\frac{3}{2}\times 20=\underline{\underline{30}}$, $M.D=\frac{6}{5}Q=\frac{6}{5}\times 20=\underline{\underline{24}}$
- وإذا كان $M.D = 24$ فإن : $Q=\frac{5}{6}M.D=\frac{5}{6}\times 24=\underline{\underline{20}}$, $s=\frac{5}{4}M.D=\frac{5}{4}\times 24=\underline{\underline{30}}$

التشتت النسبي ومقاييسه

التغير الفعلي أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المتوسط أو المعياري أو الربيعي أو غيره من مقاييس التشتت يُسمى **بالتشتت المطلق** ، ولكن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 50 درجة (مثلاً) يختلف عن تشتت قدره 10 درجات عن قيمة متوسطة 200 ، لذا من المناسب تعريف ما يُسمى بــ **التشتت النسبي** وهو :

$$\text{التشتت النسبي (كنسبة مئوية)} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \times 100$$

وبالتالي يكون التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطها 50 : $\frac{10}{50}\times 100 = 20\%$

أما التشتت النسبي لتشتت مطلق قدره 10 لبيانات متوسطها 200 فهو : $\frac{10}{200}\times 100 = 5\%$

ومن أكثر مقاييس التشتت النسبي استخداماً ما يُسمى **بمعامل الاختلاف** [أو معامل التشتت] و **معامل الاختلاف الربيعي** ، حيث :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\frac{s}{\bar{x}}\times 100$$

$$\text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}\times 100$$

فعلي سبيل المثال ، إذا كانت لدينا البيانات الموضحة بالجدول المقابل عن توزيع الوحدات السكنية حسب الإيجار السنوي بأحد الأحياء [x يمثل الإيجار بالألف ريال ، f يمثل عدد الوحدات السكنية] ، وكان مطلوباً تحديد كلٍ من معامل الاختلاف للإيجار و معامل الاختلاف الربيعي له .

المتغير x	التكرار f
$6 \le x < 10$	8
$10 \le x < 12$	20
$12 \le x < 14$	12
$14 \le x < 18$	10

أولاً : بالنسبة لمعامل الاختلاف : لابد أولاً من تحديد كلٍ من الوسط الحسابي والانحراف المعياري [فرصة للمراجعة]

المتغير x	التكرار f	x_0	fx_0	$d = x_0 - \bar{x}$	d^2	fd^2
$6 \le x < 10$	8	8	64	8 – 12 = -4	16	128
$10 \le x < 12$	20	11	220	11 – 12 = -1	1	20
$12 \le x < 14$	12	13	156	13 – 12 = 1	1	12
$14 \le x < 18$	10	16	160	16 – 12 = 4	16	160
	50		600			320
	$\sum f$		$\sum fx_0$			$\sum fd^2$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx_0}{\sum f} = \frac{600}{50} = 12 \qquad s^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} = \frac{320}{50} = 6.4 \ \rightarrow \ s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.4} \cong 2.53$$

وبالتالي يكون معامل الاختلاف $= \frac{s}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.53}{12} \times 100 \cong 21.1\%$ ، أي أن الإيجار يتغير بنسبة ٢١,١% تقريباً

ثانياً : بالنسبة لمعامل الاختلاف الربيعي : لابد أولاً من تحديد الربيعين الأول والثالث [فرصة للمراجعة]

التكرار f	المتغير x
8	$6 \le x < 10$
20	$10 \le x < 12$
12	$12 \le x < 14$
10	$14 \le x < 18$

→

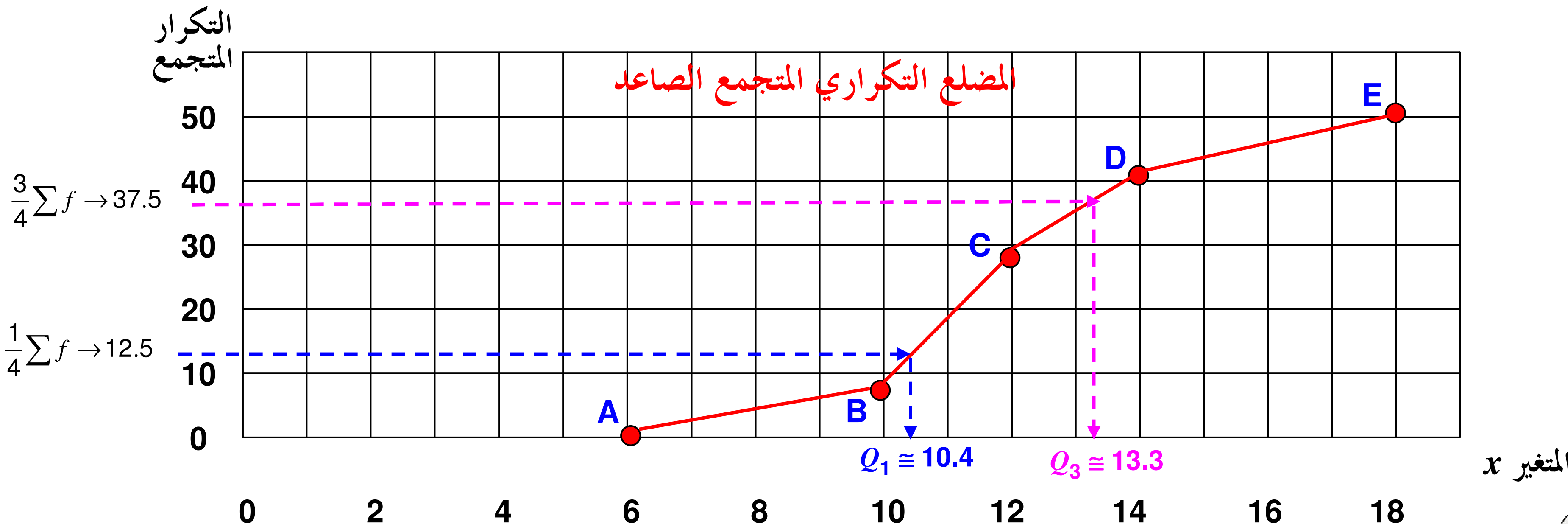
الجدول التكراري المتجمع الصاعد

النقطة على المضلع	التكرار المتجمع	المتغير x
A (6 , 0)	0	< 6
B (10 , 8)	8	< 10
C (12 , 28)	28	< 12
D (14 , 40)	40	< 14
E (18 , 50)	$\sum f = 50$	< 18

- قم بتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
- قم برسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد

ومنه حدد قيم الربيع الأول Q_1 والربيع الثالث Q_3 .

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100 = \frac{13.3 - 10.4}{13.3 + 10.4} \times 100 = \frac{2.9}{23.7} \times 100 \cong \underline{\underline{12.2\%}}$$



الدرجات المعيارية

لمجموعة من القيم x_n , ... , x_2 , x_1 وسطها الحسابي $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s تُسمى :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

بـــ **الدرجة المعيارية** للقيمة x .

فمثلاً لمجموعة القيم 8 3 4 12 6 7 4 8 3 5 [سؤال سلي نفسك/المحاضرة ١٠/شريحة ١٦ والذي قمنا بحله في بداية هذه المحاضرة/شريحة ٤] ، كان الوسط الحسابي 6 والانحراف المعياري 2.76 . إذن الدرجات المعيارية لهذه القيم هي :

القيم	8	3	4	12	6	7	4	8	3	5
الدرجات المعيارية للقيم	0.72	-1.09	-0.72	2.17	0	0.36	-0.72	0.72	-1.09	-0.36
	$\frac{8-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{12-6}{2.76}$	$\frac{6-6}{2.76}$	$\frac{7-6}{2.76}$	$\frac{4-6}{2.76}$	$\frac{8-6}{2.76}$	$\frac{3-6}{2.76}$	$\frac{5-6}{2.76}$

وللدرجات المعيارية للقيم أهمية كبيرة في مقارنة نتائج بيانات مختلفة ببعضها حيث قد يؤدي الاعتماد على القيم الحقيقة إلى استنتاجات غير سليمة أو مضللة . لتوضيح ذلك دعنا نعتبر المثال التالي :

في الاختبار النهائي لمقرر الإحصاء حصل طالب على 82 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 76 بانحراف معياري 10] وحصل في مقرر الصحة واللياقة على 90 درجة [حيث كان الوسط الحسابي للدرجات 82 بانحراف معياري 16 . هل يمكن القول أن الطالب درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة كانت أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء ؟

الاعتماد على درجات الطالب في المقررين [82 في الإحصاء ، 90 في الصحة واللياقة] تجعل الإجابة : نعم درجة استيعاب الطالب لمقرر الصحة واللياقة أعلى من درجة استيعابه لمقرر الإحصاء .

ولكن الإجابة الصحيحة تعتمد على الدرجة المعيارية للطالب في كل من المقررين :

في مقرر الصحة واللياقة	في مقرر الإحصاء
$x=90 \quad , \quad \bar{x}=82 \quad , \quad s=16$	$x=84 \quad , \quad \bar{x}=76 \quad , \quad s=10$
$\therefore \quad z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}=\dfrac{90-82}{16}=\dfrac{8}{16}=\underline{\underline{0.5}}$	$\therefore \quad z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}=\dfrac{84-76}{10}=\dfrac{8}{10}=\underline{\underline{0.8}}$

أي أن الدرجة المعيارية للطالب في مقرر الإحصاء أعلى من نظيرتها في مقرر الصحة واللياقة ، مما يعني أن درجة استيعاب الطالب لمقرر الإحصاء أعلى من درجة استيعابه لمقرر الصحة واللياقة .

سلي نفسك لغاية ما نتقابل بإذن الله

(١) البيانات الموضحة بالجدول المقابل تعبر عن أوزان مجموعة من الطلبة (بالكيلوجرام) في المرحلة الجامعية . المطلوب حساب مقياس مناسب للنزعة المركزية وآخر للتشتت ، ثم أوجد مقياساً لمعامل الاختلاف .

الوزن x	$x<50$	$50 \le x < 60$	$60 \le x < 70$	$70 \le x < 80$	$x \ge 80$
العدد f	14	29	18	9	9

(٢) حصل أحد الطلاب في مقرر المحاسبة على درجة ٨٠ في الاختبار النهائي وعلى درجة ٧٠ في مقرر الرياضيات . هل يمكن القول بأن درجة استيعاب الطالب لمادة المحاسبة أفضل من درجة استيعابه لمادة الرياضيات علماً بأن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في المادتين هو ٨٣ [في المحاسبة] ، ٦٥ [في الرياضيات] بانحراف معياري قدره ٥ في المادتين .

تمت

بحمد الله