المحاضرة الأولى

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$$A, B, C, \cdots$$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$$a, b, c, \cdots$$

تابع : تعريف المجموعة:

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$
أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

طرق كتابة المجموعات:

- **طريقة العد (سرد العناصر):**

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة {   } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة ","

مثل:

$$A = \{1,3,5,7\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \{1,2,3,\cdots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العناصر

تابع: طرق كتابة المجموعات:

- **طريقة القاعدة (الصفة المميزة):**

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x:كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: -3≤x ≤1 ،عدد حقيقي X}

X={x: 0≤x ≤12 ،عدد صحيح X}

أنواع المجموعات:

- **المجموعة الخالية:**

هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز Φ أو { }.

أمثلة:

$A=\{x:x^2+1=0$ ، عدد حقيقي $x\}$

$B=\{x:$ عدد طبيعي زوجي وفردي $x\}$

$C=\{x:$ دولة عربية تقع في اوروبا $x\}$

تابع: أنواع المجموعات:

- **المجموعة المنتهية:**

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$B = \{1,2,3,\cdots,100\}$$

$$C = \{x, y, z, w, u\}$$

تابع: أنواع المجموعات:

- **المجموعة غير المنتهية:**

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x: عدد طبيعي فردي x }

$$B = \{10, 20, 30, \cdots\}$$

$$C = \{x \in R : 0 \leq x \leq 10\}$$

تابع: أنواع المجموعات:

- **المجموعة الكلية:**

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمز U.

- **المجموعة الجزئية:**

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة $A \subset B$

تابع: أنواع المجموعات:

أمثلة:

١. إذا كانت $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فان $A \subset B$

٢. مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تابع: أنواع المجموعات:

- **تساوي المجموعات:**

تكون المجموعتان B ، A متساويتان إذا كانت

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

تابع: أنواع المجموعات:

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$$1-\ A=\{1,3,5,7\}\ ,\ B=\{3,1,5,7\}$$

$$2-\ A=\{0,1,2\}\ ,\ B=\{a,b,c\}$$

الحل:

$$1)\quad A=B$$

$$2)\quad A\equiv B$$

العمليات على المجموعات:

- **الاتحاد**

اتحاد المجموعتين A، B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. أي أن :

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

- **التقاطع**

تقاطع المجموعتين A، B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B . أي أن

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

- **المكملة**

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

$$\overline{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

- **الفرق**

إذا كانت مجموعتان A، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

تابع: العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

1) $A\cup B$

2) $A\cap B$

3) $A-B$

4) $\overline{A}$

5) $\overline{B}$

تابع: العمليات على المجموعات:

الحل:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5, x, y, w\}$

2) $A \cap B = \{3, x\}$

3) $A - B = \{1,2, y\}$

4) $\overline{A} = \{4,5, w, z\}$

5) $\overline{B} = \{1,2, y, z\}$

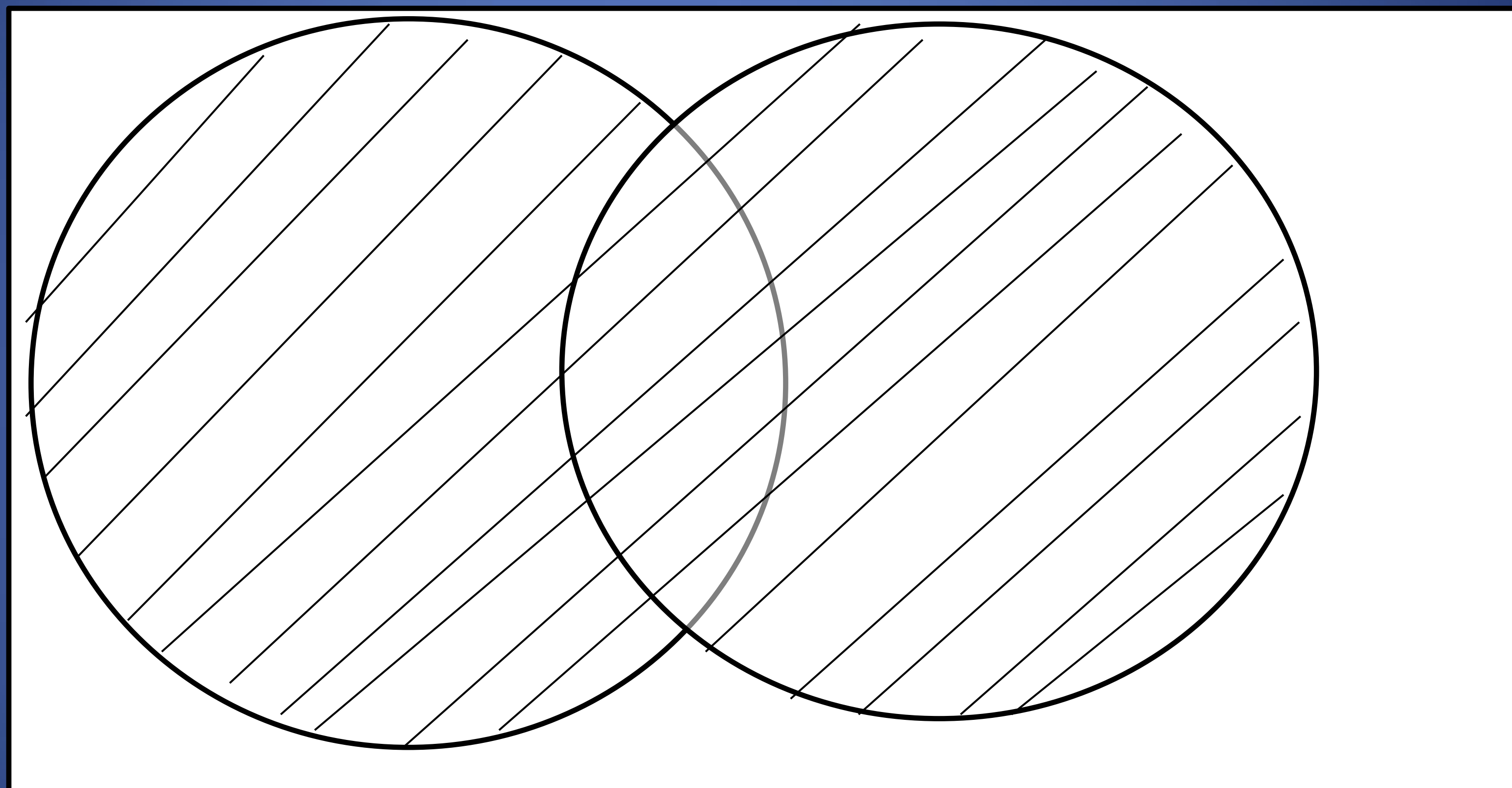
المحاضرة الثانية

المجموعات - تكملة

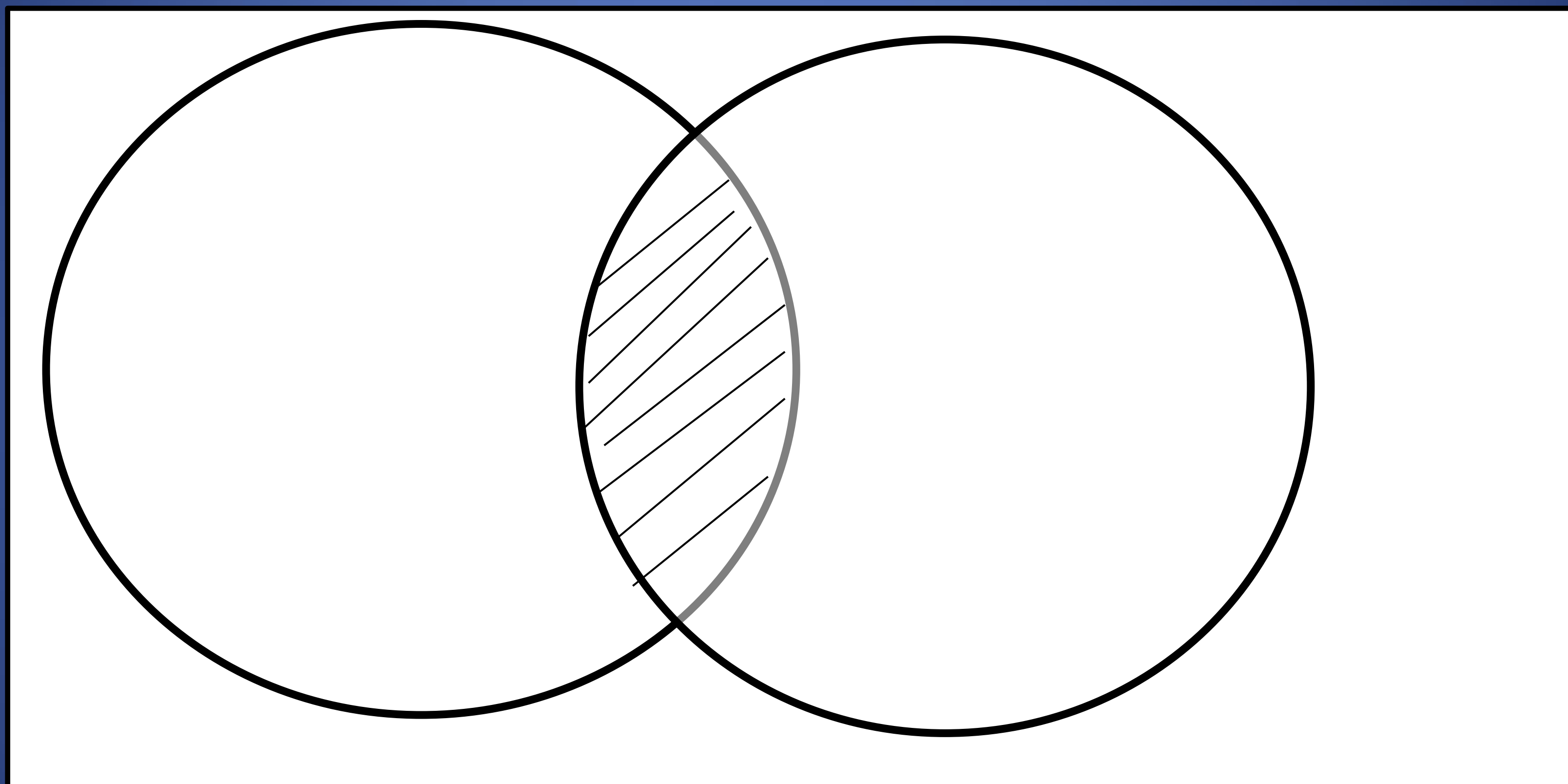
أشكال فين:

يمكن استخدام الأشكال الهندسية لتمثيل المجموعات والعمليات عليها، حيث يتم تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل ومن ثم أي مجموعة جزئية منها بشكل هندسي كالدائرة مثلاً، يرسم داخل المستطيل ، وتستخدم هذه الأشكال لتوضيح العمليات التي نجريها على المجموعات مثل الاتحاد ، التقاطع والمكملة والفرق وغيرها. كما في الأمثلة التالية:

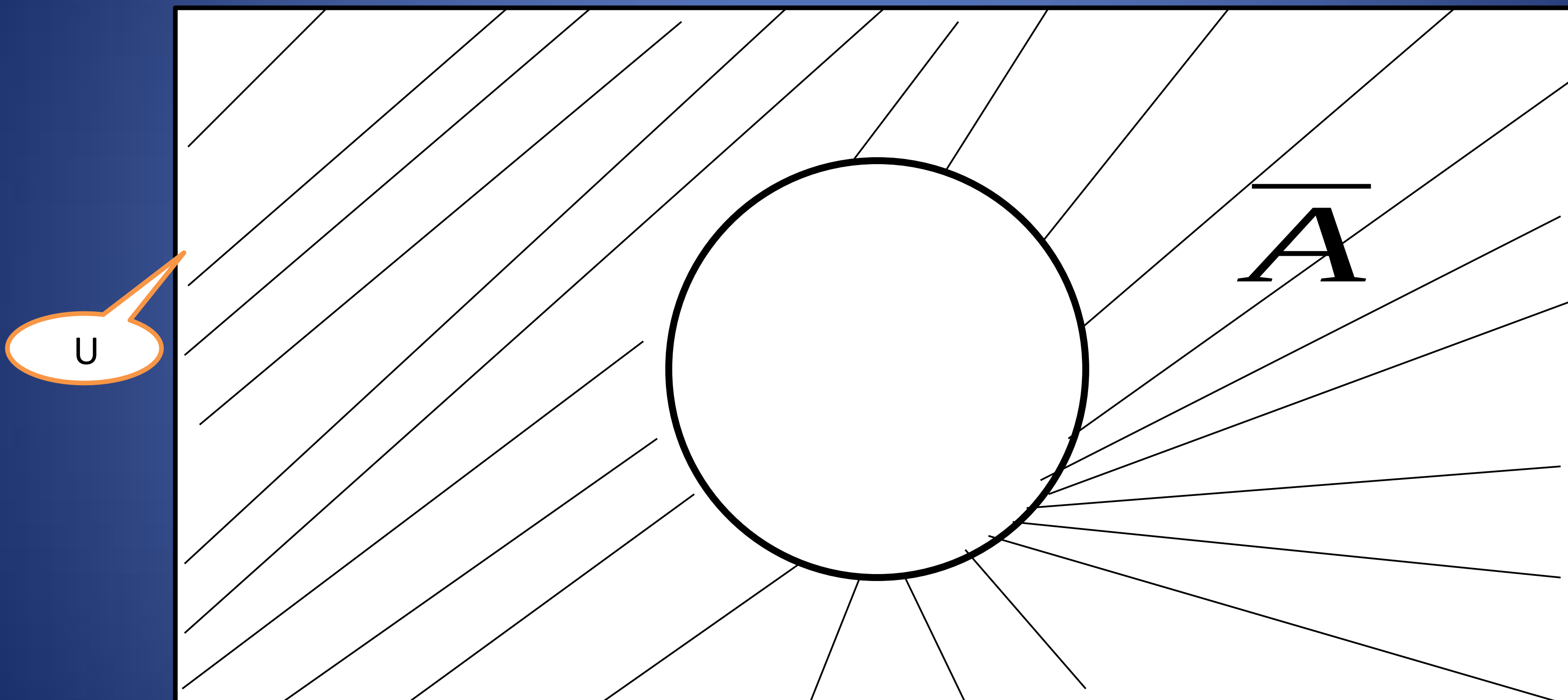
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل اتحاد مجموعتين A و B



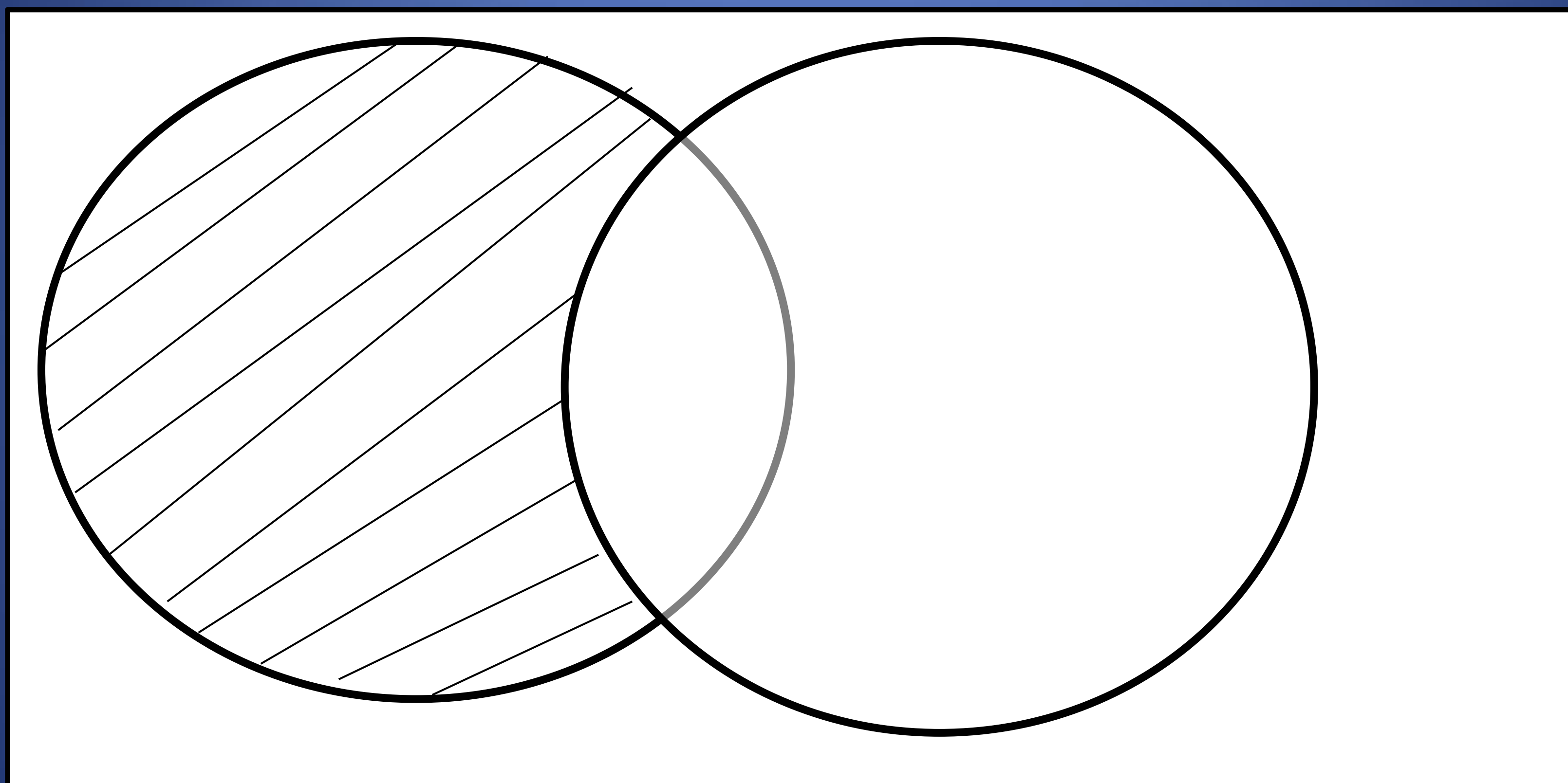
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل تقاطع مجموعتين A و B



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل $\bar{A}$



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل A-B



الضرب الديكارتي:

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A، B ($A \times B$) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y)التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B.

بالرموز

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B=\{-3,1,4\}$

فأوجد $A\times B$ و $B\times A$

الحل:

$$A\times B=\{(-2,-3),(-2,1),-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$$

$$B\times A=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$$

تابع : الضرب الديكارتي:

مثال:

أنشئ $A \times B$ ، علما بان

$$A = \{1,2\} \text{ و } B = \{w, x, y\}$$

الحل:

$$A \times B = \{(1,w),(1,x),(1,y),(2,w),(2,x),(2,y)\}$$

تابع : الضرب الديكارتي:

ملاحظات:

- لاحظ أن عدد عناصر A عنصران وعدد عناصر B ثلاثة عناصر، وان عدد عناصر$A\times B$ يساوي عدد عناصر $B\times A$ و يساوي ٦ عناصر (أزواج مرتبة) = 3×2 = عدد عناصر A×عدد عناصر B .
- أيضا يمكننا ملاحظة أن

$$A\times B\neq B\times A$$

تابع الضرب الديكارتي:

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1 = x_2)$ ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني، $(y_1 = y_2)$

تابع الضرب الديكارتي:

مثال:

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $\left(x+1, y-\frac{1}{2}\right)=\left(4, \frac{3}{2}\right)$

الحل:

$$x+1=4 \quad \Rightarrow x=4-1=3$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

مجموعة المجموعات (مجموعة القوى):

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية ϕ والمجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S).

مثال:

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a, b, c\}$

تابع : مجموعة المجموعات (مجموعة القوى):

الحل:

مجموعة المجموعات هي:

$$P(S)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

ملاحظة: إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر $P(S)$ يساوي 2^n .

تمرين: أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S=\{1,2\}$

مجموعة الأعداد:

١. مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

٢. مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

تابع: مجموعة الأعداد:

٣. مجموعة الأعداد النسبية:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$$

٤. مجموعة الأعداد غير النسبية :

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}$ والنسبة التقريبية π والعدد النابييري e غيرها.

تابع: مجموعة الأعداد:

٥. مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي المجموعة التي تحتوي على كافة الأنواع السابقة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وتمثل هندسياً بخط الأعداد.

ملاحظة: $N \subset Z \subset Q \subset R$

تمارين:

١. افرض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

$(i)\quad 3$ ________________ A

$(ii)\quad 3$ ________________ B

$(iii)\quad x$ ________________ A

$(iv)\quad x$ ________________ B

تابع:تمارين:

$(v)\ z$ ________________ A

$(vi)\ z$ ________________ B

$(vii)\ 1$ ________________ A

$(viii)\ 1$ ________________ B

$(ix)\ A$ ________________ A

$(x)\ B$ ________________ B

تابع: تمارين:

٢. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i. A={x: ٧ عدد طبيعي اصغر من x}

ii. B={x: ٢عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على x}

iii. C={y: h وc حرف من حروف الهجاء المحصور بين y}

iv. D={x: ١٧ عدد طبيعي فردي اصغر من x}

تابع: تمارين:

٣. ضع الرمز $=$ أو $\neq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\quad \{a,b,c\}$ ________ $\{b,c,a\}$

$(ii)\quad \{0,1,2,3\}$ ________ $\{0,1,2,3,3\}$

$(iii)\quad \{x,y,z\}$ ________ $\{x,y,z,w\}$

تابع: تمارين:

٤. افرض أن $X = \{1,2,3,4\}$ و $Y = \{4,6,8,10\}$ ضع الرمز $\subset$ أو $\not\subset$ أو $\subseteq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\ X$ ______________ Y

$(ii)\ Y$ ______________ X

$(iii)\ X$ ______________ $X \cup Y$

$(iv)\ \phi$ ______________ X

$(v)\ \phi$ ______________ Y

تابع: تمارين:

٥. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠ ، افرض ان $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ كون المجموعات الاتية:

$(i)\ A\cup B$

$(ii)\ A\cap B$

$(iii)\ \overline{A}$

$(iv)\ \overline{B}$

تابع: تمارين:

$$(v)\ \overline{A \cup B}$$

$$(vi)\ \overline{A \cap B}$$

$$(vii)\ \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(viii)\ \overline{A \cap U}$$

$$(ix)\ A \cap A$$

تابع: تمارين:

٦. لتكن المجموعة الكلية $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

ولتكن $A=\{1,2\}\ ,\ B=\{-1,1,3\}\ ,\ C=\{2,4,6\}$

فأوجد

$(i)\ A\times B$

$(ii)\ B\times A$

$(iii)\ B\times B$

$(iv)\ A\times(B\cap C)$

$(v)\ (A\times B)\cap(A\times C)$

$(vi)\ \overline{C}\times B$

تابع: تمارين:

٧. إذا كانت

A={x: عدد طبيعي اصغر من ٥ x}

B={y: عدد طبيعي اصغر من ٣ y}

هل $A\times B=B\times A$

٨. أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x, y^2)=(2x-2,1)$

المحاضرة الثالثة

الدوال

الدالـة:

يعتبر مفهوم الدالة واحدا من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على)أو (تتوقف على)أو(تتعين بواسطة) كمية أخرى.

فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.

تابع : الدالة:

تعريف مجرد لمفهوم الدالة:

إذا كانت A ، B مجموعتين فان f دالة من A إلى B ، أي $f:A \longrightarrow B$ إذا كانت f مجموعة جزئية من $A\times B$ بحيث انه لكل $x\epsilon A$ توجد y واحدة في B بحيث $(x,y)\epsilon f$. يسمى y قيمة الدالة f عند x ويكتب ذلك رمزا على النحو $y=f(x)$. ويسمى y بالمتغير التابع و x بالمتغير المستقل.

ملاحظة:

إذا كانت f دالة من A إلى B. فان A تسمى مجال الدالة . وتسمى B المجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

تابع : الدالة:

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

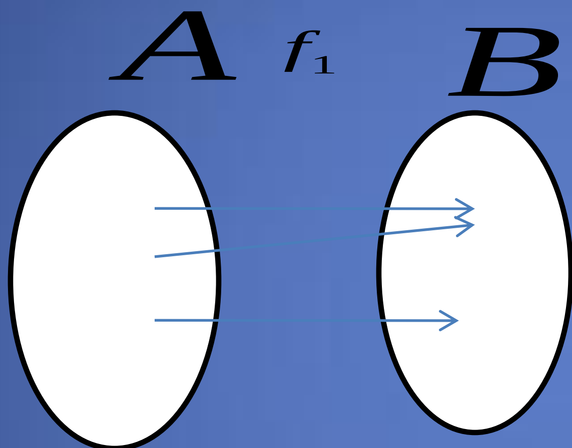
$f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و $f_2 = \{(1,4),(2,8)\}$ و

$$f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$$

فهل f_1 ، f_2 و f_3 دوال من A إلى B ؟

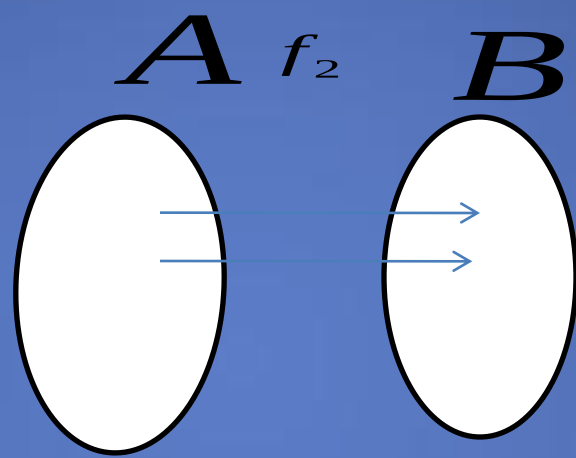
تابع : الدالة:

الحل:



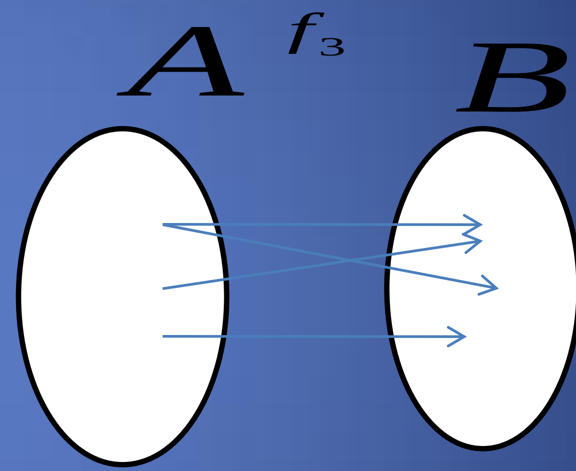
نعم f_1 دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل.

تابع : الحل:



f_2 ليست دالة لان $3 \in A$ وليس له صورة B .

تابع : الحل:



f_3 ليست دالة لان $1 \in A$ وله صورتان

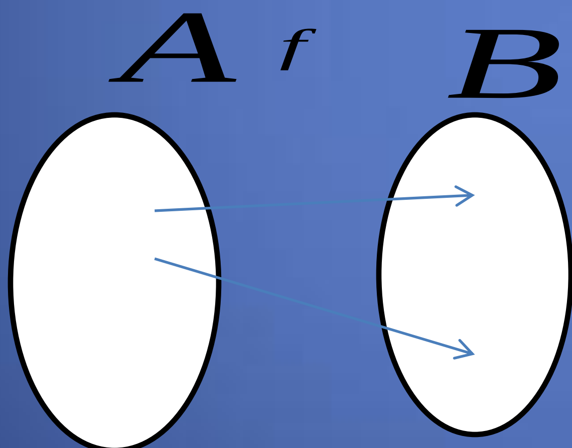
تابع الدالة:

مثال:

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها

الحل:



مدى f هو $\{3,6\}$

تمرين:

- أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. R= {(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1) }
2. R ={(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4) }
3. R={(-3,1), (-1,1), (0, 1), (4,1)}
4. R={(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)}
5. R={(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)}
6. R={(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)}

إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد

$(i)\ f(2)$

$(ii)\ f(-1)$

$(iii)\ f(a)$

$(iv)\ f(x+1)$

تابع الدالة:

الحل:

$$(i)\ f(2)=2^2+4\times 2-3=4+8-3=9$$

$$(ii)\ f(-1)=(-1)^2+(4\times -1)-3=1-4-3=-6$$

$$(iii)\ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$

$$(iv)\ f(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-3$$
$$=x^2+2x+1+4x+4-3=x^2+6x+2$$

تابع: إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان $f(x)=3x^2 -7x+2$ ، فأوجد

$$(i)\ \ f(a)$$

$$(ii)\ \ f(-3)$$

$$(iii)\ \ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(iv)\ \ f\left(\frac{-2}{3}\right)$$

تابع إيجاد قيمة الدالة:

الحل:

$$(i)\ \ f(a) = 3a^2 - 7a + 2$$

$$(ii)\ \ f(-3) = 3(-3)^2 - 7(-3) + 2$$
$$= 27 + 21 + 2 = 50$$

$$(iii)\ \ f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 2 = \frac{-3}{4}$$

$$(iv)\ \ f\left(\frac{-2}{3}\right) = 3\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} + 2 = 8$$

تمرين:

١. إذا كان $f(x)=2x^2 -3x$ ، فأوجد

$$(i)\ \ f(0)$$

$$(ii)\ \ f(-4)$$

$$(iii)\ \ f(1+h)$$

$$(iv)\ \ f(x+h)$$

تابع : تمارين:

٢ . للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-1)$

٣. للدالة $g(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$ أحسب $g(x-1)$ و $g(4)$

٤. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أحسب $f(1)+f(2)+f(3)$

٥. للدالة $f(x)=x^2$ أحسب $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦. للدالة $g(x)=x+1$ أحسب $2[g(2)]^2-g(2)+5$

٧. للدالة $f(t)=\dfrac{2t-1}{t+3}, t\neq -3$ أحسب $\dfrac{5}{f(4)}$

تابع الدالة:

ملاحظة:

سنقتصر في دراستنا للدوال على دراسة بعض أنواع الدوال الحقيقية .

الدوال الحقيقية:

الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي $f:R \longrightarrow R$

- ## دالة كثيرة الحدود:

هي الدالة التي على الصورة $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a$

حيث $a_n, a_{n-1}, \cdots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثيرة الحدود، n عدد طبيعي. تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x)

الدوال الحقيقية:

مثال: ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية:

$$(1)\ \ f(x)=3$$

$$(2)\ \ f(x)=3x-4$$

$$(3)\ \ f(x)=x^2-x+1$$

$$(4)\ \ f(x)=2-3x+x^3$$

$$(5)\ \ f(x)=x^3+x^5+5x-6$$

تابع: الدوال الحقيقية:

الحل:

١. الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة.
٢. الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية.
٣. الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية.
٤. الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية.
٥. الدرجة الخامسة

العمليات على الدوال:

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب وعملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن f ،g دالتين فان:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(ii)(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

تابع: العمليات على الدوال:

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\qquad g(x)\neq 0$$

$$(v)(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

(vi) معكوس الدالة:

إذا كانت y=f(x) دالة فان معكوسها يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$، حيث f^{-1} يرمز لمعكوس الدالة f .

تابع: العمليات على الدوال:

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$ ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد

$(i)\,(f+g)(x)$

$(ii)\,(f-g)(x)$

$(iii)\,(f\times g)(x)$

$(iv)\,\frac{f}{g}(x)$

$(v)\,(f\circ g)(x)$

$(vi)\,f^{-1}$

تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(i)(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 3x \ +5+x^2+1$$

$$= x^2+3x+6$$

$$(i)(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 3x \ +5-(x^2+1)$$

$$= 3x+5-x^2-1 = 3x-x^2+4$$

$$(iii)(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = (3x+5)(x^2+1)$$

$$= 3x^3+3x+5x^2+5$$

$$= 3x^3+5x^2+3x+5$$

تابع: العمليات على الدوال:

الحل:

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$(v)\ (f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2+1)=3(x^2+1)+5$$
$$=3x^2+3+5$$
$$=3x^2+8$$

$$(vi)\ f^{-1}(y)=\frac{y-5}{3}$$

تابع : العمليات على الدوال:

تمرين١ : افرض أن $f(x)=1/(x-2)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، احسب

$(i)\,(f\circ g)(9)$

$(ii)\,(f\circ g)(x)$

$(iii)\,(g\circ f)(6)$

$(iv)\,(g\circ f)(x)$

حلول تمرين ١ :

$$(i)\,(f\circ g)(9) = f\big(g(9)\big) = f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$(i)\,(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{g(x)-2} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(iii)\,(g\circ f)(6) = g\big(f(6)\big) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(iii)\,(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$$

تمرين ٢ :

افرض أن $f(x)=1/(x-1)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، فأوجد

$(i)\,(f+g)(x)$

$(ii)\,(f-g)(x)$

$(iii)\,(f\times g)(x)$

$(iv)\,\dfrac{f}{g}(x)$

$(v)\,(f\circ g)(x)$

$(vi)\,(g\circ f)(x)$

المحاضرة الرابعة

معادلات الخط المستقيم

إيجاد ميل الخط المستقيم:

١- ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$
يعرف على انه النسبة بين التغير في y والتغير في x ،
ويرمز له عادة بالحرف m

إذن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث $x_1 \neq x_2$

تابع: ميل خط المستقيم:

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين P و Q حيث:

1. P(1,-3) ، Q(3,7)
2. P(3,2) ، Q(5,2)
3. P(2, 3) ، Q(2,6)

الحل:

$$1. \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

تابع: الحل:

$$2.\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-2}{5-3}=\frac{0}{2}=0$$

$$3.\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-3}{2-2}=\frac{3}{0}=\infty$$ **إذن الميل غير معرف**

ملاحظات هامة:

- إذا كان الميل يساوي صفر فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .
- إذا كان الميل يساوي ∞ فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع: ميل خط المستقيم:

٢- ميل الخط المستقيم الذي معادلته في الصورة العامة $ax+by+c=0$
حيث a,b,c ثوابت والثابتان a,b لا يساويان الصفر معاً، هو $m=\frac{-a}{b}$

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $2x+4y-7=0$

الحل:

$m=\frac{-a}{b}$ ، حيث $a=2$ و $b=4$

اذاً $m=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة:

المستقيمات المتوازية:

يقال أن المستقيم L_1 موازياً للمستقيم L_2 أي $L_1 // L_2$ إذا وفقط إذا كان $m_1 = m_2$

مثال: هل المستقيمان 4x-y-2=0 و y=4x+1 متوازيان ؟

الحل:

$$m_1 = 4 \quad , m_2 = 4$$

$$\because m_1 = m_2 = 4$$

اذاً متوازيين

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة:

المستقيمات المتعامدة:

يقال أن المستقيم L_1 يعامد المستقيم L_2 أي $L_1 \perp L_2$ إذا وفقط إذا كان

$$m_1 \times m_2 = -1$$

مثال: هل المستقيمان y-3x-2=0 و 3y+x-15=0 متعامدان؟

الحل:

$$m_1 = 3\,, m_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\because m_1 \times m_2 = \frac{-1}{3} \times 3 = -1$$

اذاً متعامدين

معادلة الخط المستقيم:

طرق تحديد معادلة الخط المستقيم:

1. بمعلومية نقطة وميل:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $P(x_1, y_1)$ هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

مثال:أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) وميله يساوي 2- .

الحل:

$$m = -2\,,\ x_1 = 5\,,\ y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$y = -2x + 10 - 3$$

$$y = -2x + 7$$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (1,1) وميله يساوي ٢ .

الحل:

$$m = 2 \, , \, x_1 = 1 \, , \, y_1 = 1$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

٢. بمعلومية نقطتين:

معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (1,-2) ، (5,6)

الحل:

$$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 5, y_2 = 6$$

تابع: الحل:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-2)}{x - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1}$$

$$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y + 2 = 2(x - 1)$$

$$y + 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 - 2$$

$$y = 2x - 4$$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

٣. بمعلومية ميل والمحصور الصادي:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من محور الصادات جزءا طوله b هي y=mx+b

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله m=3 مقطوعه الصادي b=-2

الحل:

$$y = mx + b$$
$$y = 3x - 2$$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

مثال:

أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم 2x+3y=6

الحل: لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة :

Y=mx+b

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$2x+3y=6$$

$$3y=-2x+6$$

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

تابع: الحل:

بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة $y=mx+b$

نجد أن

الميل هو $m=-\frac{2}{3}$ والمقطوع الصادي هو $b=2$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

٤. بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات :

المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله = a ومن محور الصادات جزءا طوله يساوي = b تكون معادلته:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله ٣ وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله ٢ وحده.

تابع: معادلة الخط المستقيم:

الحل:

$$a = 3, b = 2$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x + 3y = 6$$

مثال: أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $2x - 3y = 5$

تابع: معادلة الخط المستقيم:

الحل:

المحصور السيني للخط a= وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (a,0)

$$2a = 5 \quad \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

المحصور الصادي للخط b= وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (0,b)

$$-3b = 5 \quad \Rightarrow b = -\frac{5}{3}$$

تمارين:

١. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{3}{2}x + 6$

٢. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $2x + 7y = 14$

٣. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $3x - y = 6$

تابع : تمارين:

٤. أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة $(1,-2)$ وميله $m=-3$

ب- المستقيم المار بالنقطة $(3,4)$ وميله صفر

ج- المستقيم المار بنقطة الأصل وميله ٢

د- المستقيم المار بالنقطة $(2,3)$ وميله $-3/2$

ه- المستقيم المار بالنقطتين $(3, 4)$ و $(7,2)$

و- المستقيم المار بالنقطتين $(2,1)$ و $(3,4)$

ز- المستقيم الذي ميله $m=-2$ ومقطوعه الصادي $b=3$

تابع : تمارين:

ح- المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ويوازي المستقيم $4y+2x=7$

ط- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3,2)$ وعمودي على المستقيم $y=-3x+4$

ي- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1,2)$ وعمودي على المستقيم $4y=2x-3$

ك- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0,3)$ ونقطة تقاطع المستقيمين $3x+y=1$ ، $4y+2x=3$

ل- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3,5)$ ويوازي المستقيم $3x+5y-2=0$

م- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1,-5)$ وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(5,3)$ و $(1,8)$

تابع : تمارين:

٥. أوجد الميل والمقطوع الصادي لكل علاقة من العلاقات الخطية التالية:

$$i)\quad 3x+5y=15$$

$$ii)\quad 2x=13-4y$$

$$iii)\quad y+2x+6=0$$

$$iv)\quad 8x+5y=20$$

واجب(١):

١- أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة $(6, 2)$ وميله $m=-7$

ب- المستقيم المار بالنقطتين $(5,8)$ و $(-3,6)$

ج- المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3,0)$ وعمودي على المستقيم $2x+3y=6$

د- المستقيم الذي يمر $(3,3)$ ويوازي المستقيم $3x-y=6$

٢- أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم $-4x=12-3y$

المحاضرة الخامسة

المتباينات والقيمة المطلقة

المتباينات:

أي تعبير يتضمن احد الرموز < ، ≤ ، > ، ≥ يسمى متباينة. فمثلاً كل مما يلي هي متباينات:

$$(i)\ 3x+4\leq 8-2x$$

$$(ii)\ \frac{2x+4}{x+5}<3$$

$$(iii)\ (x+4)(x-1)>9$$

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة. وهناك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي:

تابع : المتباينات:

١. فترة مغلقة $[a,b]=\{x\in R : a\leq x\leq b\}$

٢. فترة مفتوحة $(a,b)=\{x\in R : a< x< b\}$

٣. نصف مغلقة (نصف مفتوحة) $[a,b)=\{x\in R : a\leq x< b\}$

٤. فترة نصف مفتوحة (نصف مغلقة) $(a,b]=\{x\in R : a< x\leq b\}$

خواص المتباينات:

١. $a^2\geq 0$ لكل $a\in R$

٢. إذا كانت a<b و b<c فان a<c

تابع:خواص المتباينات:

٣. إذا كانت $a<b$ فان $a+c<b+c$ وكذلك $a-c<b-c$

٤. إذا كانت $a<b$ وكانت $c>0$ فان $ac<bc$

٥. إذا كانت $a<b$ وكانت $c<0$ فان $ac>bc$

٦. إذا كانت $a>0$ فان $\frac{1}{a}>0$

٧. إذا كانت $a>0$ و $b>0$ بحيث $a<b$ فان $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

تابع: المتباينات:

حل المتباينات:

حل المتباينة هو القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحاً.

مثال(١): حل المتباينة $4x+7\geq 2x-3$

الحل:

$$4x+7-7\geq 2x-3-7$$

$$4x\geq 2x-10$$

$$4x-2x\geq -10$$

تابع : الحل:

$$2x \geq -10$$

$$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times -10$$

$$x \geq -5$$

مجموعة الحل هي الفترة (∞,5-].

تابع: المتباينات:

مثال(٢): حل المتباينة $-5 < 3x - 2 < 1$

الحل:

$$-5+2 < 3x < 1+2$$

$$-3 < 3x < 3$$

$$\frac{1}{3} \times -3 < \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 3$$

$$-1 < x < 1$$

مجموعة الحل هي الفترة (1,1-).

تابع: المتباينات:

مثال(٣): حل المتباينة $x^2 + x - 12 > 0$

الحل:

$$(x-3)(x+4) > 0$$

الحالة الأولى $(x-3) > 0$ و $(x+4) > 0$

اذاً $x > 3$ و $x > -4$

أي أن $x > 3$

تابع الحل :

الحالة الثانية $(x-3)<0$ و $(x+4)<0$

اذاً $x<3$ و $x<-4$

أي أن $x<-4$

اذاً مجموعة الحل هي $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

تابع: الحل:

مثال(٤):

حل المتباينة $x^2 \le 4x + 12$

الحل:

$$x^2 - 4x - 12 \le 0$$

$$(x-6)(x+2) \le 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

تابع: الحل:

نعين جذري المعادلة على خط الأعداد فيقسم خط الأعداد إلى ثلاثة أجزاء ونأخذ نقط اختيارية داخلية في كل قسم من هذه الأقسام الثلاثة ونفحص كون المتباينة متحققة أم لا كما يلي:

إشارة (x-6)	- -	- -	+ +
إشارة (x+2)	- -	+ +	+ +

-2 $\qquad\qquad$ 6

مجموعة الحل هي $[-2,6]$

تابع: المتباينات:

مثال(٥):

حل المتباينة $\frac{4x+5}{x+2} \geq 3$

الحل:

$$\frac{4x+5}{x+2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{4x+5-3x-6}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

تابع: الحل:

نعين جذري البسط والمقام على خط الأعداد فيقسم خط الأعداد إلى ثلاثة أجزاء ونأخذ نقط اختيارية داخلية في كل قسم من هذه الأقسام الثلاثة ونفحص كون المتباينة متحققة أم لا كما يلي:

إشارة (x-1)	- -	- -	+ +
إشارة (x+2)	- -	+ +	+ +
	-2	1	

بما أن $\frac{x-1}{x+2}=0$ عند $x=1$

اذاً المتباينة متحققة في الفترة $(-\infty,-2)\cup[1,\infty)$

تمارين:

حل المتباينات التالية:

1. $5 > 2 - 9x > -4$
2. $5x - 6 > 11$
3. $-6 \leq 1 - 3x \leq 2$
4. $4 \leq 2x + 2 \leq 10$
5. $(x-3)(x+1) < 0$
6. $3x - 5 < 10$
7. $x^2 + x > 12$

تابع : تمارين:

8. $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$

9. $\dfrac{x+4}{x-2} \le 1$

10. $\dfrac{x+2}{x-4} \ge 1$

11. $(2x+2)(x-1)(x-3) > 0$

تابع : تمارين:

12. $x^3 - 5x^2 + 6x > 0$

13. $x^2 + x < 2$

14. $3 \le 4x - 7 < 9$

15. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \le 2$

16. $\frac{2x}{3x-4} - 2 \ge 0$

القيمة المطلقة:

تعريف:

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي (ويرمز له بالرمز $|x|$) تعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

تابع: القيمة المطلقة:

خواص القيمة المطلقة:

١. $|x| < a$ تكافئ $-a < x < a$ حيث $a > 0$

٢. $|x| \le a$ تكافئ $-a \le x \le a$ حيث $a > 0$

٣. $|x| > a$ تكافئ $x > a$ أو $x < -a$ حيث $a > 0$

٤. $|x| \ge a$ تكافئ $x \ge a$ أو $x \le -a$ حيث $a > 0$

٥. $|ab| = |a||b|$

تابع: الخواص :

٦. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

٧. $|a+b| \le |a| + |b|$

٨. $|a-b| \ge |a| - |b|$

تابع: القيمة المطلقة:

مثال (١):

حل المتباينة $|2x+4| \leq 3$

الحل:

$$|2x+4 \leq 3| \quad \Rightarrow \quad -3 \leq 2x+4 \leq 3$$

$$-7 \leq 2x \leq -1$$

$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

مجموعة الحل هي الفترة $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

تابع: القيمة المطلقة:

مثال(٢):

حل المتباينة $|2x-5|>3$

الحل:

$2x-5>3$ أو $2x-5<-3$

$2x>8$ أو $2x<2$

$x>4$ أو $x<1$

مجموعة حل المتباينة هي $(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

تابع: القيمة المطلقة:

مثال(٣):

حل المتباينة $\left|\frac{3x+1}{2}\right| < 1$

الحل:

$$-1 < \frac{3x+1}{2} < 1$$

$$-2 < 3x+1 < 2$$

تابع: الحل:

$$-3 < 3x < 1$$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

مجموعة الحل هي $(-1, \frac{1}{3})$

تمارين:

حل المتباينات التالية:

1. $|x+2|<1$
2. $|3x|>12$
3. $|3x-2|\le 4$
4. $|1-2x|>3$
5. $|2x-3|<7$
6. $|3x+4|\ge 5$

تمارين:

7. $|2x| < 6$

8. $\left|\dfrac{7-3x}{2}\right| \le 1$

المحاضرة السادسة

الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

الدالة الاسية:

أي دالة من النوع $y = a^x$ تسمى دالة أسية .

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة. أي

$$f : R \to R^+$$

أمثلة:

$$f(x) = 2^x \,,\; f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \,,\; f(x) = e^x \,,\; f(x) = 10^x$$

الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان $a>0$ ، $a\neq 1$ فان الدالة الاسية $y=a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x=\log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية.

أي $f : R^+ \longrightarrow R$

أمثلة:

$$f(x)=\log_2 x, \; f(x)=\log_4(2x+4)$$

تابع: الدالة اللوغاريتمية:

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان ١٠ ، e (عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$. تسمى اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

تابع: الدالة اللوغاريتمية:

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدداً حقيقياً فان:

1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b x^n = n \log_b x$

4. $\log_b 1 = 0$

5. $\log_b b = 1$

الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i)\quad y=\sin x$$

$$(ii)\quad y=\cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

تابع الدوال المثلثية:

$$(iii)\ y = \tan x \qquad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(iv)\ y = \sec x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(v)\ y = \csc x \qquad \left(\frac{1}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

$$(vi)\ y = \cot x \qquad \left(\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

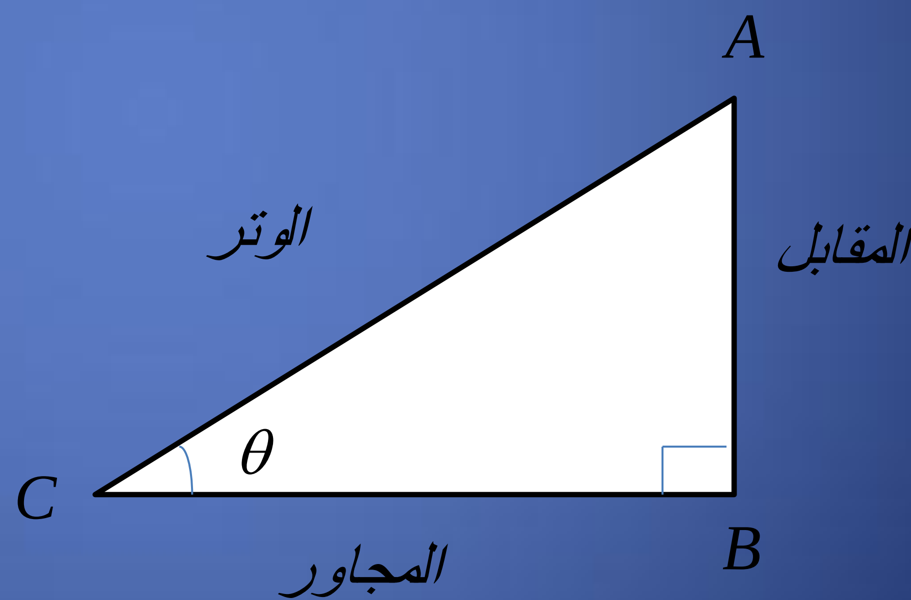
ملاحظة:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

تابع : الدوال المثلثية:

التفسير الهندسي للدوال المثلثية:

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل التالي:



تابع : الدوال المثلثية:

فان النسب المثلثية لزاوية حادة θ وهي:

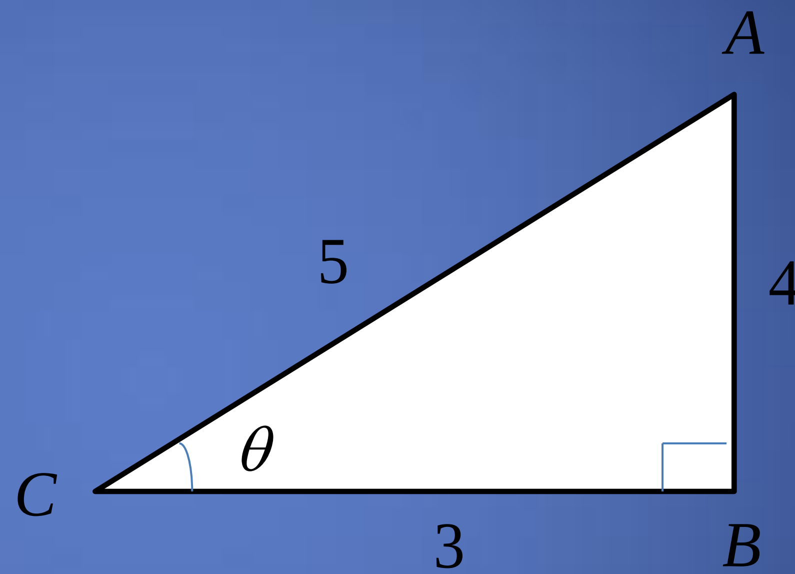
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال:

إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: ، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

تابع : الدوال المثلثية:

الحل:



$\tan\theta = \frac{4}{3}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ، $\sin\theta = \frac{4}{5}$

الدوال النسبية:

إذا كان h(x) ، g(x) كثيري حدود فان $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط g(x)≠0 ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1. $f(x)=\frac{x+7}{x+5}$

2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

3. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة y=f(x) ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

1. $y = 2x + 3$
2. $y = x$
3. $y = x^2 + 2x - 3$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x,y)=k$، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

1. $x^2+y^2=25$
2. $x^2+y^2+xy+2x-4y+5=0$
3. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة زوجية إذا كانت $f(-x)=f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2 \\
&= (-x)(-x) \\
&= x^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً الدالة زوجية

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^2 + x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= (-x)(-x) + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

اذاً ليست زوجية.

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة فردية إذا كانت $f(-x)= -f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^3$ دالة فردية ؟

الحل:

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^3 \\
&= (-x)(-x)(-x) \\
&= -x^3 \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

اذاً الدالة فردية.

تابع : الدوال الزوجية والفردية:

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^3+x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3+(-x) \\ &= (-x)(-x)(-x)+(-x) \\ &= -x^3-x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

اذاً الدالة فردية

Q_d

تطبيقات اقتصادية:

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

تابع : تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

1. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$.
2. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$
3. الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل. أي $P = 0$
4. أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة .

تابع : تطبيقات اقتصادية:

الحل:

١. عندما $P = 3$

$$Q_D = 25 - 5P$$
$$= 25 - 5 \times 3$$
$$= 25 - 15$$
$$= 10$$

٢. عندما $Q_D = 18$.

$$Q_D = 25 - 5P$$
$$18 = 25 - 5 \times P$$
$$5P = 25 - 18 = 7$$
$$\therefore P = \frac{7}{5} = 1.4$$

تابع : تطبيقات اقتصادية:

٣. عندما $P=0$

$$
\begin{aligned}
Q_D &= 25 - 5P \\
&= 25 - 5 \times 0 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

٤. أعلى سعر يحدث عندما $Q_D = 0$

$$
\begin{aligned}
Q_D &= 25 - 5P \\
0 &= 25 - 5 \times P \\
5P &= 25 \\
\therefore P &= 5
\end{aligned}
$$

تابع:تطبيقات اقتصادية:

٢- دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

تابع: تطبيقات اقتصادية:

مثال:

إذا كانت $Q_S = 3P - 2$ فأوجد:

١. Q_S إذا كانت $P = 5$

٢. P إذا كانت $Q_S = 10$

٣. اقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج).

تابع: تطبيقات اقتصادية:

الحل:

١. عندما $P = 5$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$= 3 \times 5 - 2$$
$$= 15 - 2$$
$$= 13$$

٢. عندما $Q_S = 10$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$10 = 3P - 2$$
$$-3P = -2 - 10 = -12$$
$$\therefore P = 4$$

تابع : الحل:

٣. أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج). أي عندما $Q_S = 0$

$$Q_S = 3P - 2$$

$$0 = 3P - 2$$

$$-3P = -2 - 0 = -2$$

$$\therefore P = \frac{2}{3}$$

تطبيقات اقتصادية:

٣- التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

مثال:

إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

تابع الحل :

الحل: يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعروضة .

$$Q_S = Q_D$$

$$P - 1 = 2 - P$$

$$P + P = 2 + 1$$

$$2P = 3$$

$$\therefore P = \frac{3}{2}$$

تابع: الحل:

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

تمارين:

١. هل الدالة $f(x) = 3x^2 - 4x$ دالة زوجية؟
٢. هل الدالة $f(x) = 3x^3 - 4x$ دالة فردية ؟
٣. هل الدالة $f(x) = 2x^2 + x$ دالة فردية ؟
٤. هل الدالة $f(x) = x^3 - 4$ دالة زوجية ؟
٥. هل الدالة $f(x) = x^3 - x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

تمارين:

٦. إذا كان $\sec\theta = 2$ ، فأوجد النسب الأساسية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

٧. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 100 - 5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 50$.

جـ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P = 0$.

د) أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة.

تمارين:

٨. إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S = 4P - 5$ فأوجد

أ) Q_S إذا كانت $P = 5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S = 7$.

جـ) أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج)

تمارين:

٩. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 25 - \frac{1}{2}P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 2P - 50$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

١٠. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 3P - 4$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 36 - 2P$.

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

المحاضرة السابعة

رسم الدوال:

رسم الدوال:

الخطوات:

١. نقوم بإنشاء جدول بقيم x وقيم y المناظرة لها للحصول على الأزواج المرتبة التالية: $(x_1, y_1)\ ,\ (x_2, y_2)\ ,\cdots,\ (x_n, y_n)$

٢. نرسم المحاور الديكارتية ونقوم بتدريج كل منهما تدريجاً مناسباً .

٣. نقوم بتعيين هذه النقاط على المستوى الديكارتي ثم توصيل هذه النقاط بصورة ملساء للحصول على منحنى الدالة.

رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

هناك صيغ قياسية لبعض الدوال مثل:

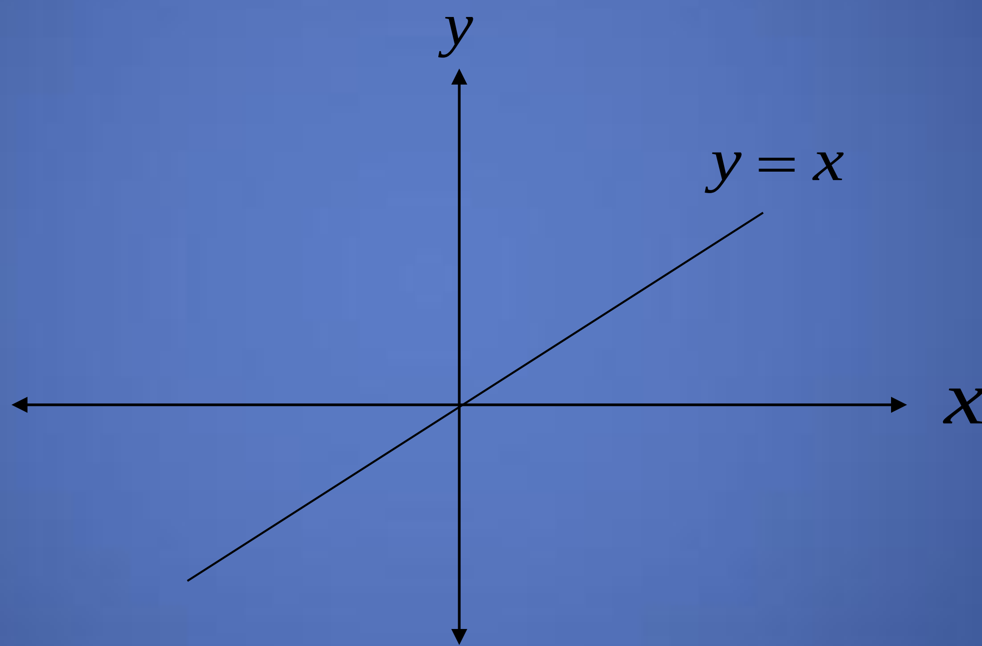
١. دالة خط مستقيم

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	-3	-2	-1	0	1	٢	٣

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

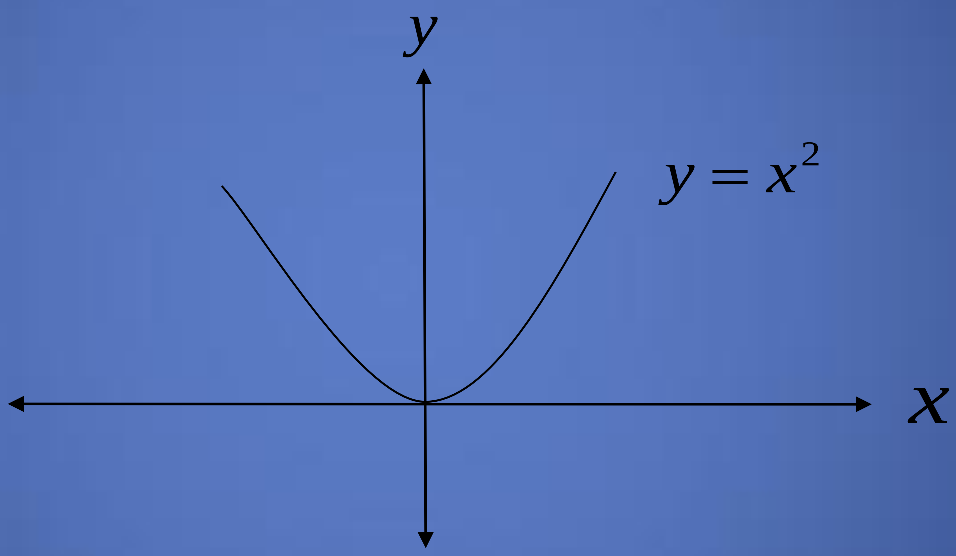
٢. الدالة التربيعية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^2$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	9	4	1	0	1	4	9

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

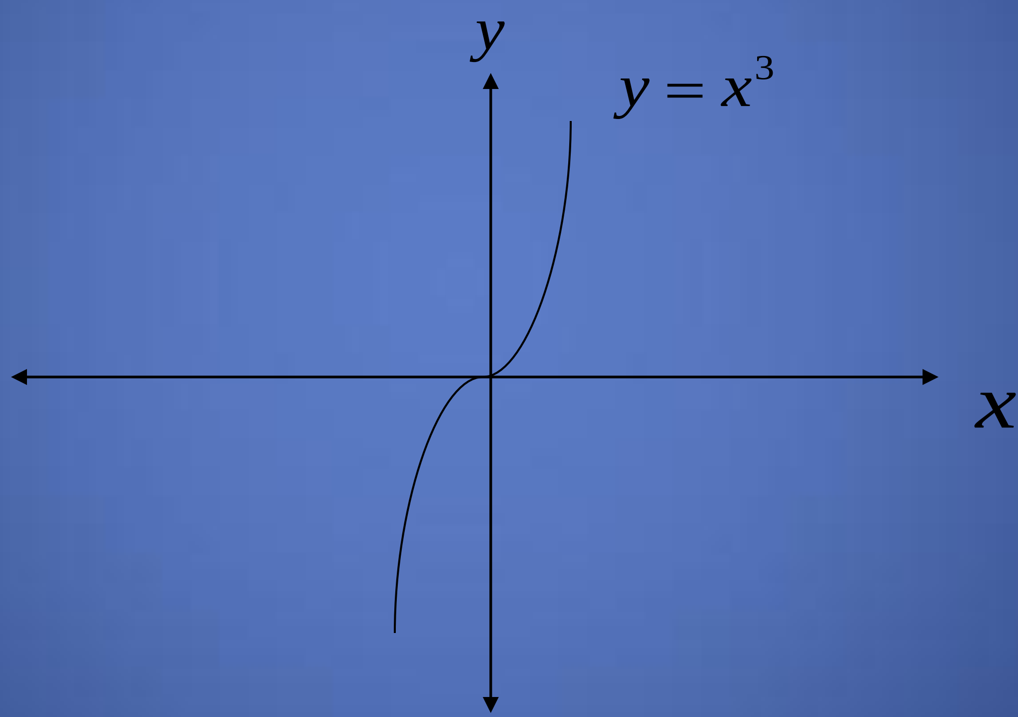
٣. الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	-1	0	1	8

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

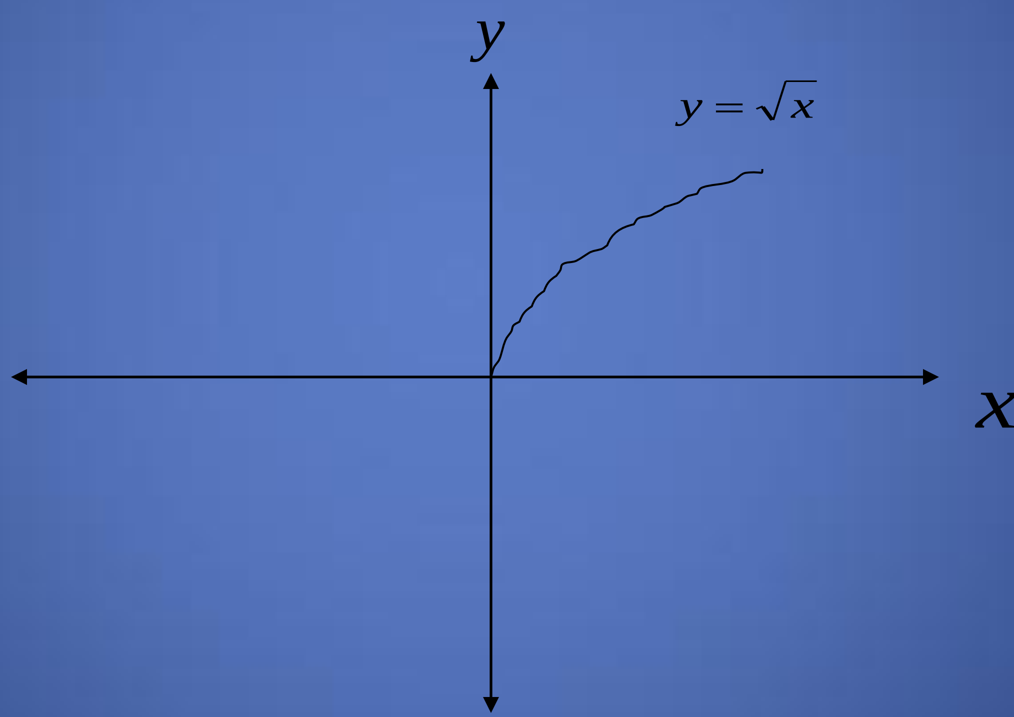
٤. الدالة الجذر التربيعي:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

x	0	1	2	3	4
y=f(x)	0	1	1.4	1.7	2

تابع: الحل:



رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

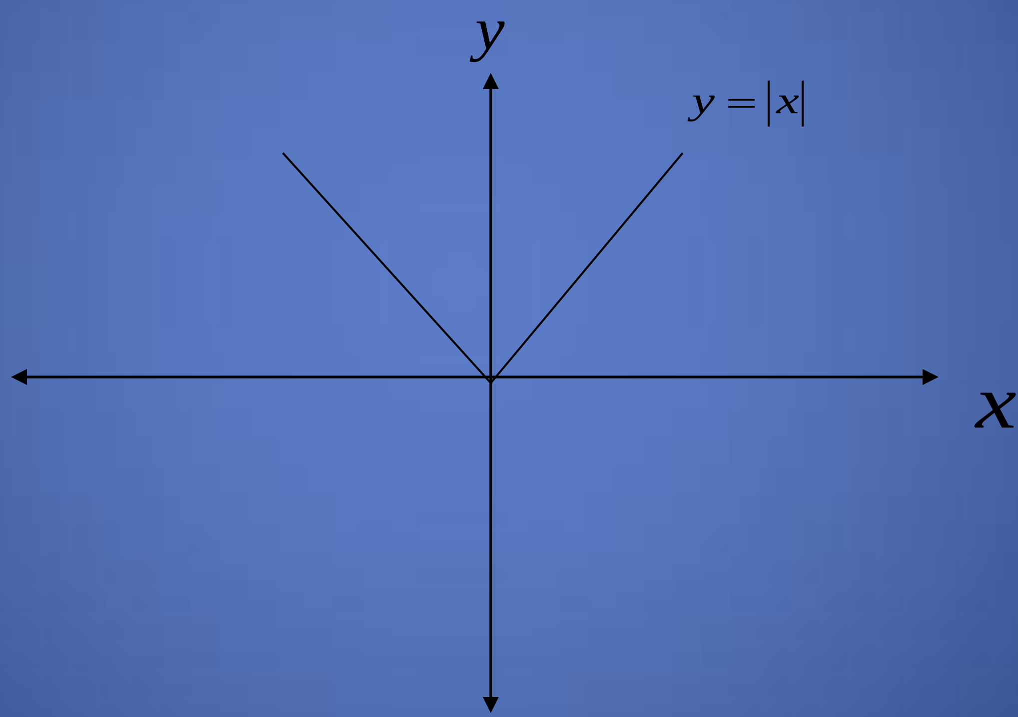
٥. دالة القيمة المطلقة:

مثال: ارسم الدالة

الحل: $y = f(x) = |x|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	٣	٢	١	0	1	٢	٣

تابع: الحل:



ملاحظات على رسم الدوال:

١. الإزاحة إلى الأعلى :

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) + c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أعلى (على محور y) .

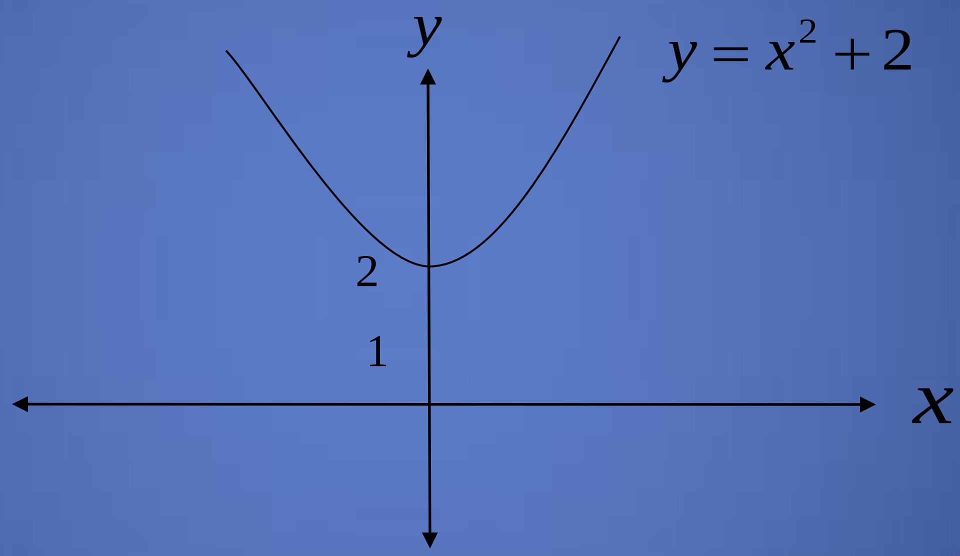
مثال:

ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ وحدتين إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



ملاحظات على رسم الدوال:

٢. الإزاحة إلى الأسفل:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) - c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أسفل (على محور y) .

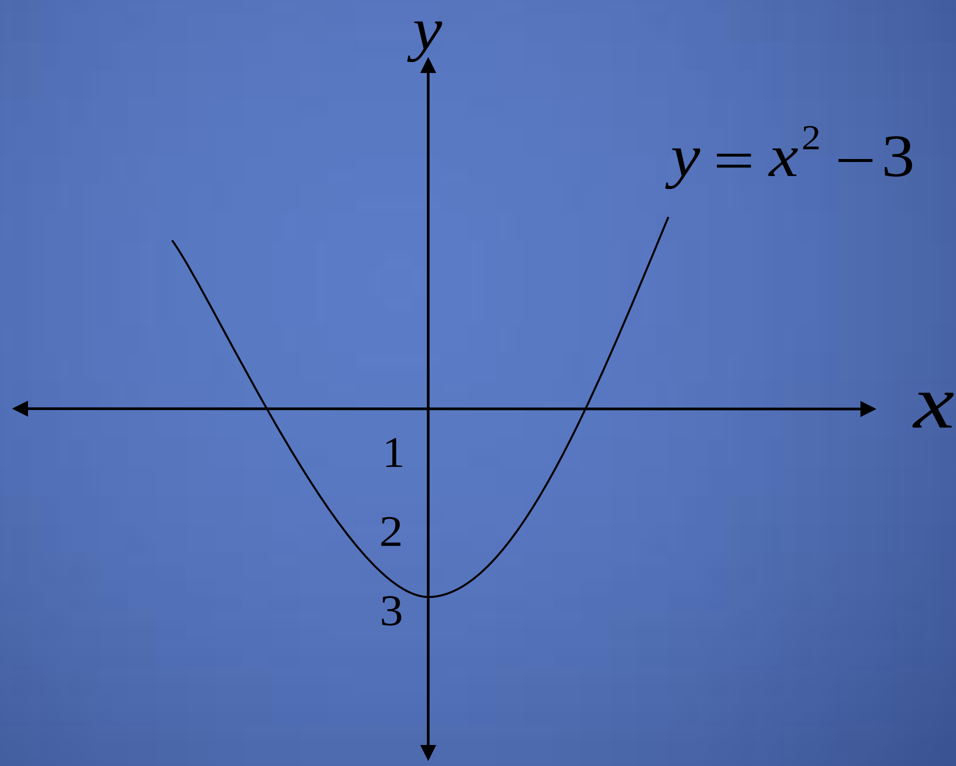
مثال:

ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات إلى أسفل كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٣. الإزاحة إلى اليمين:

يمكن الحصول على منحنى $y=f(x-c)$ بإزاحة منحنى $y=f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليمين (على محور x) .

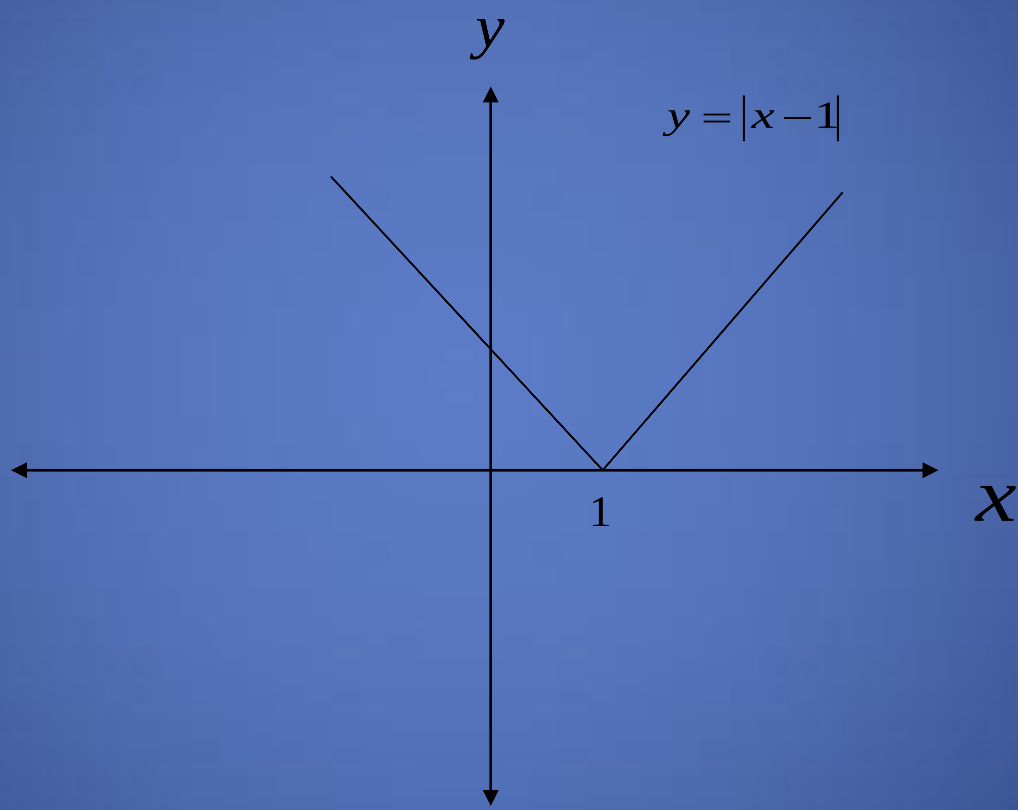
مثال:

ارسم الدالة $y=|x-1|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=|x|$ وحدة واحدة إلى اليمين كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال :

٤. الإزاحة إلى اليسار:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x+c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليسار (على محور x) .

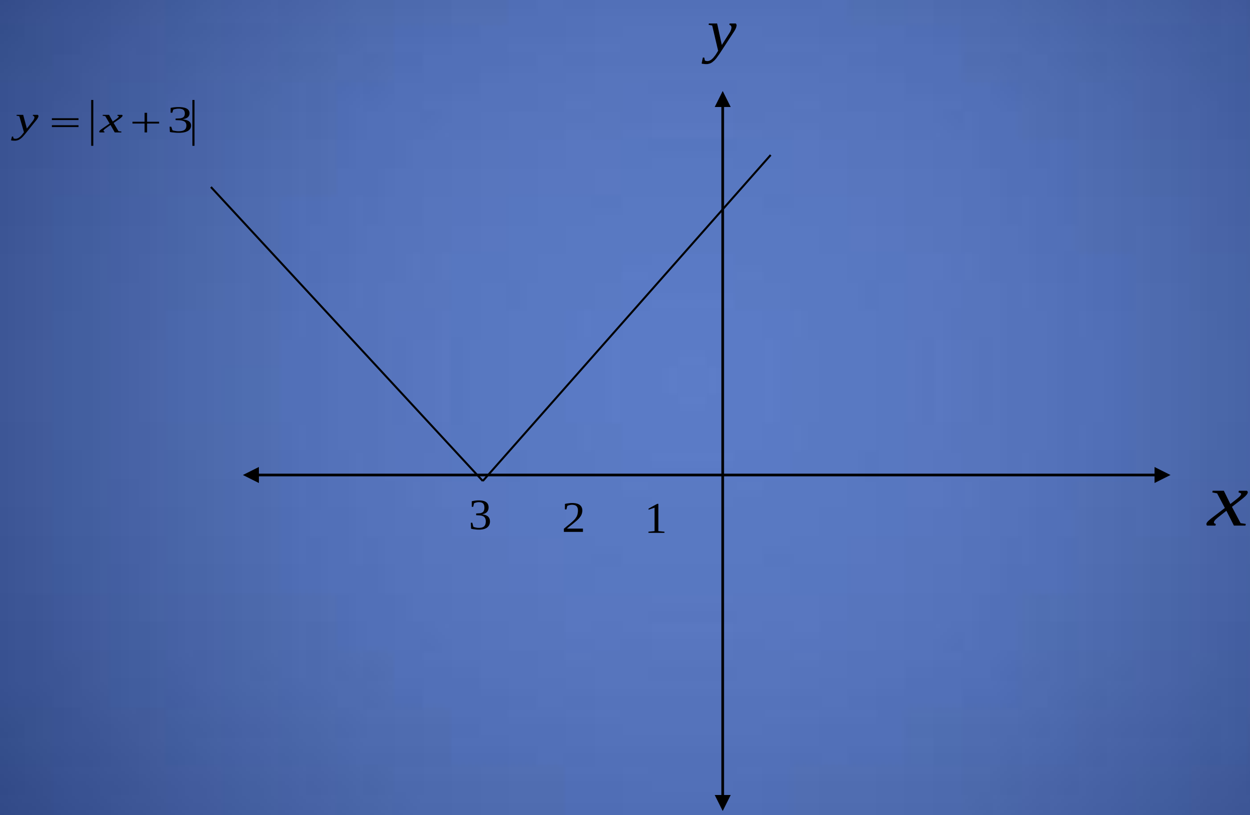
مثال:

ارسم الدالة $y = |x+3|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ ثلاث وحدات إلى اليسار كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: رسم الدوال :

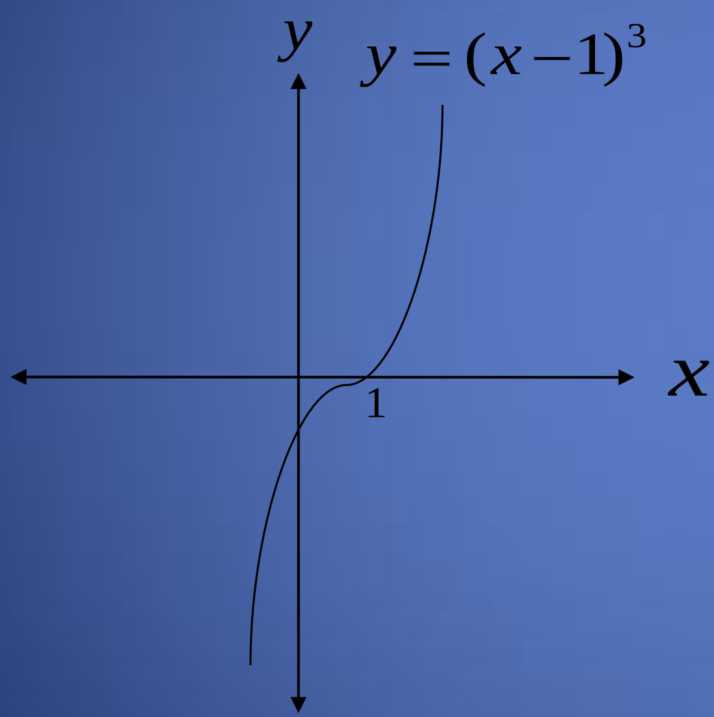
مثال:

ارسم الدالة $y=(x-1)^3+2$

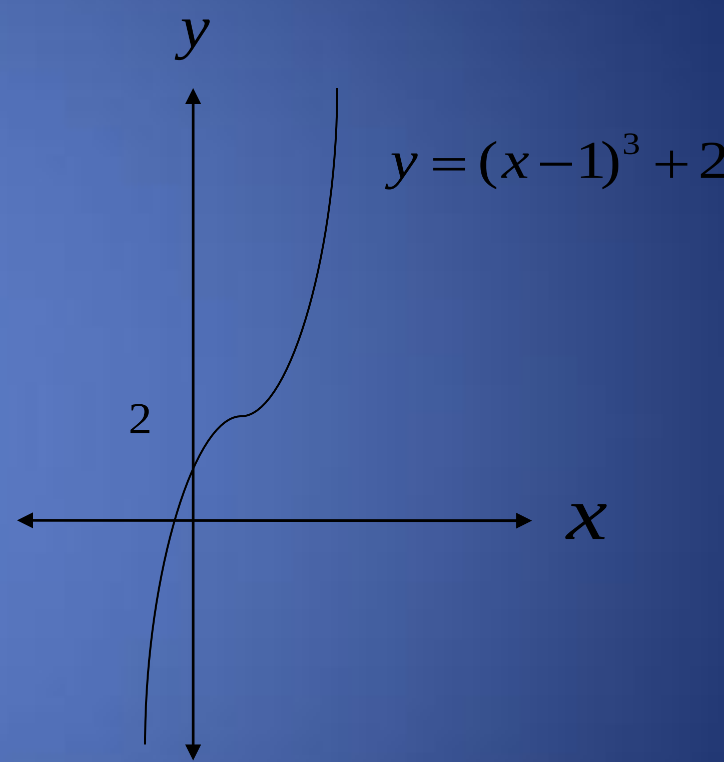
الحل:

نحصل على منحني هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=x^3$ وحدة واحدة إلى اليمين ثم وحدتان إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



$\Rightarrow$



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٥. الانعكاس على محور x:

يمكن الحصول على منحنى $y=-f(x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور x .

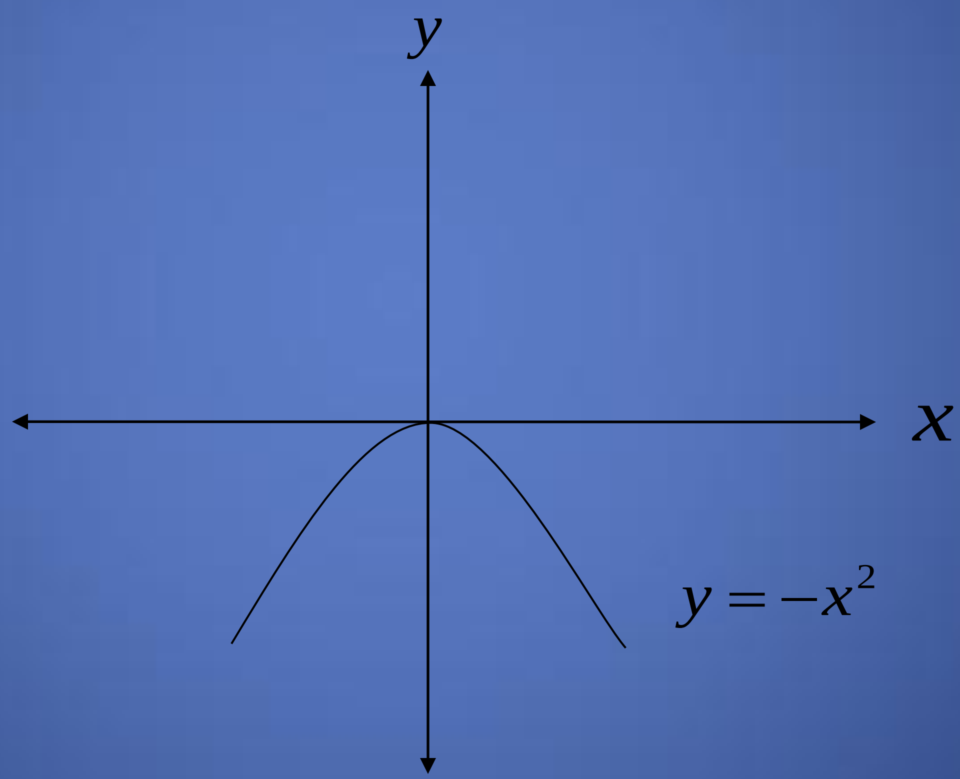
مثال:

ارسم الدالة $y=-x^2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=x^2$ على محور x كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

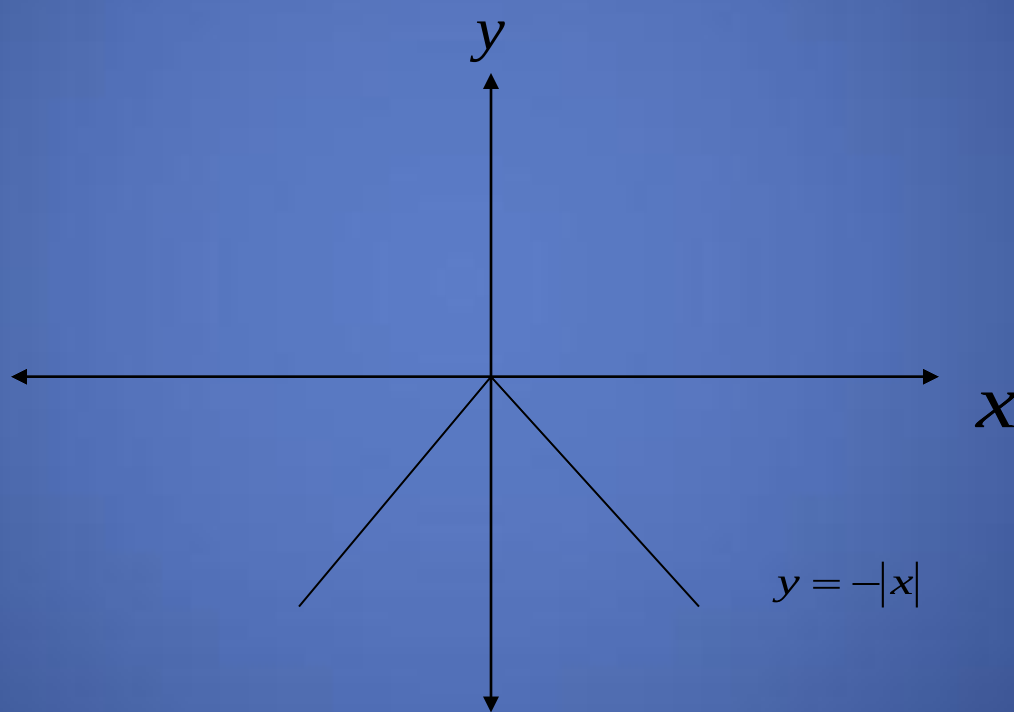
مثال:

ارسم الدالة $y=-|x|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=|x|$ على محور x كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

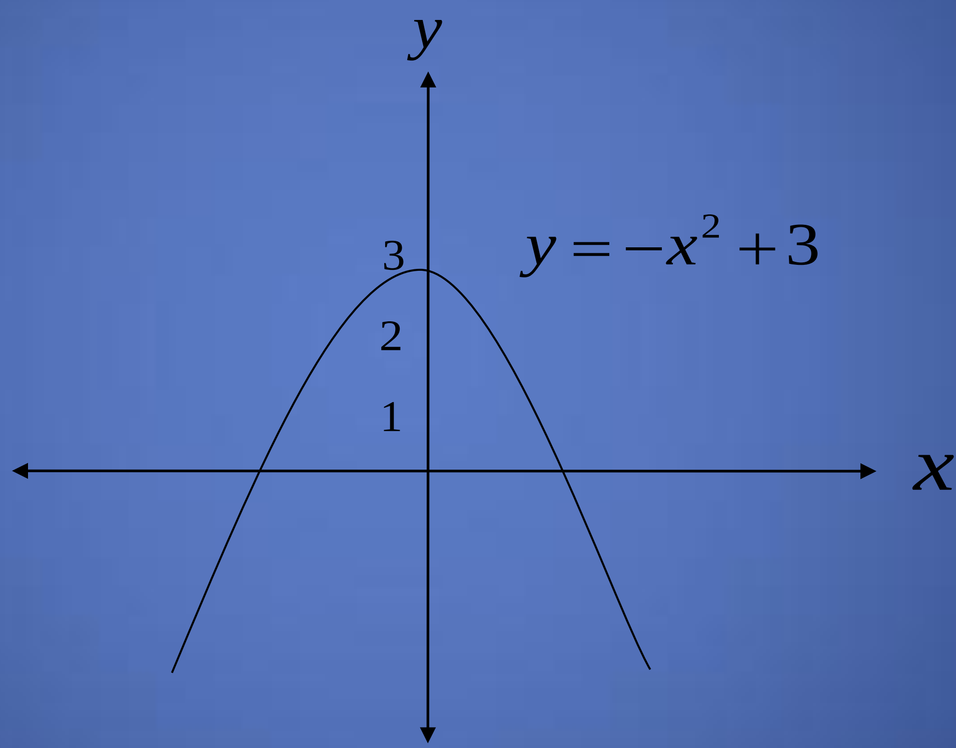
مثال:

ارسم الدالة $y=-x^2+3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=x^2$ على محور x ثم إزاحته ثلاث وحدات إلى أعلى كما يلي:

تابع: الحل:



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٦. الانعكاس على محور y:

يمكن الحصول على منحنى $y = f(-x)$ بانعكاس منحنى $y = f(x)$ على محور y .

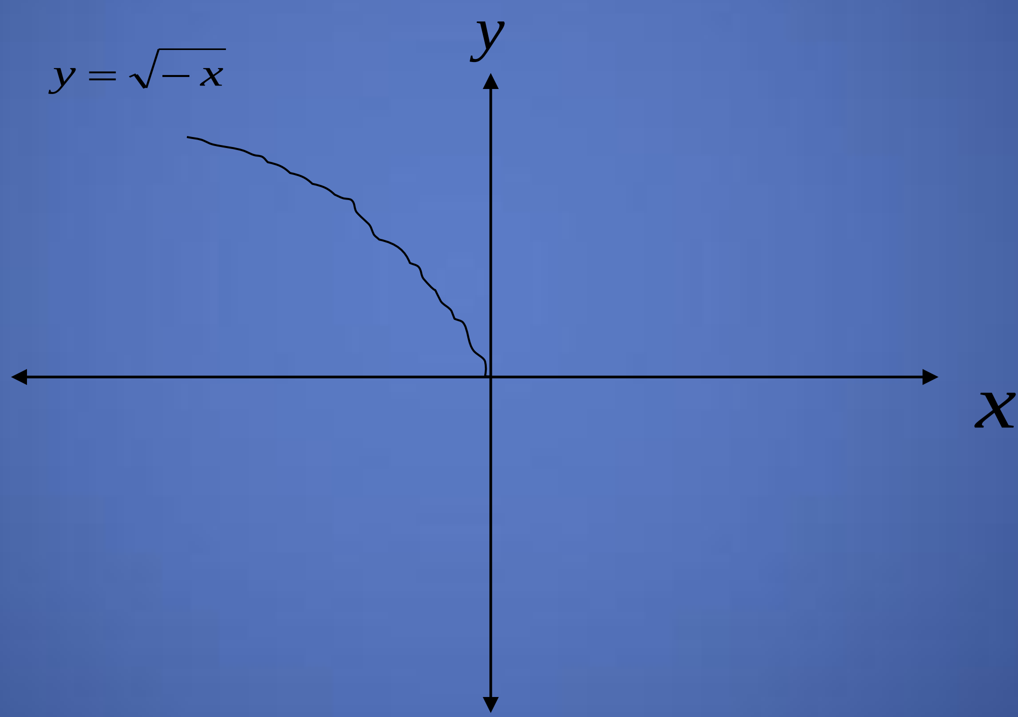
مثال:

ارسم الدالة $y = \sqrt{-x}$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ على محور y كما يلي:

تابع: الحل:



تمارين:

ارسم الدوال التالية:

1. $f(x) = x + 4$
2. $f(x) = x^2 - 4$
3. $f(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = (x+2)^2 - 1$
5. $f(x) = (x-3)^2$
6. $f(x) = -(x+2)^2$

تمارين:

7. $f(x) = |x-3| + 4$

8. $f(x) = (x-2)^3$

9. $f(x) = \sqrt{-x}$

10. $f(x) = -|x| - 2$

المحاضرة السابعة_ملحق

مجال الدالة:

مجال الدالة:

تعريف: مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها قاعدة الدالة معرفة. وكثيرات الحدود مجالها R

عند البحث عن مجال الدالة لابد من الانتباه للأمور الآتية:

أ- أن لا يكون المقسوم عليه صفراً .

ب- أن لا يكون هناك مقدار سالب تحت جذر دليله زوجي.

ج- أن لا يكون مقدار اخذ لوغاريتمه مقداراً سالباً.

د- النقاط الفاصلة للدوال المعرفة وفق أكثر من قاعدة.

ه- الشروط الإضافية الموضوعة على قاعدة الدالة.

تابع: مجال الدالة:

أمثلة:

أوجد مجال الدوال التالية :

$$1) \quad f(x) = 3x^2 + 5x - 7$$

الحل:

الدالة معرفة لجميع قيم x اذاً المجال هو R.

تابع: مجال الدالة:

$$2) \quad f(x)=\sqrt{x+4}$$

الحل:

يجب أن يكون المقدار $x+4\geq 0$ وذلك لوجود الجذر التربيعي أي $x\geq -4$ اذاً المجال هو الفترة $[-4,\infty)$.

تابع: مجال الدالة:

$$3)\quad f(x)=\sqrt[3]{x-2}$$

الحل:

المجال R لان دليل الجذر فردي.

تابع: مجال الدالة:

$$4) \quad f(x)=\sqrt{x^2+4}$$

الحل:

لوجود الجذر التربيعي يجب أن يكون $x^2+4\geq 0$ وهذا صحيح لجميع قيم x اذاً المجال هو R.

تابع: مجال الدالة:

$$5) \quad f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

الحل:

يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون $x-2=0$ عندما $x=2$،
اذاً المجال هو R ما عدا ٢ .

تابع: مجال الدالة :

$$6)\quad f(x)=\begin{cases}3x+2 & , x>1\\ 7x-6 & , x<1\end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة ولكنها غير معرفة عند x=1،
اذاً المجال هو R-{1} .

تابع: مجال الدالة :

$$7)\quad f(x)=\begin{cases} x+7 & ,1<x\le 4 \\ 3x-5 & ,\ 4<x\le 8 \end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة بقاعدتين وهناك قيدا بان 1<x≤8 اذاً المجال هو الفترة [1,8)

تابع: مجال الدالة :

$$8) \quad f(x) = \log(2x+4)$$

الحل:

بسبب وجود اللوغاريتم يجب أن يكون 2x+4>0، أي x>-2 ،
اذاً المجال هو الفترة (-2,∞)

تابع: مجال الدالة :

$$9)\quad f(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{3-x}$$

الحل:

يوجد جذران ، في الأول يجب ان يكون $x+4\geq 0$ أي $x\geq -4$ وفى الثاني يجب أن يكون $3-x\geq 0$ أي $3\geq x$ ، اذاً المجال هو الفترة التي تحقق الشرطين معاً، أي هو الفترة $[-4,3]$

تمارين:

أوجد مجالات الدوال التالية:

1. $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

2. $f(x) = \log(3x + 7)$

3. $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x + 4}$

4. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

تابع : تمارين:

6. $$f(x)=\frac{3x+8}{x^3-1}$$

7. $$f(x)=\begin{cases} 1-x & , 0\le x<1 \\ 2x-1 & , 1\le x\le 2 \end{cases}$$

المحاضرة الثامنة

النهايات

النهايات:

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى ٢. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥.

تابع: النهايات:

جبر النهايات:

١. إذا كانت $f(x)=c$ ، حيث c عدد حقيقي فان $\lim_{x\to a} f(x)=c$ لكل عدد حقيقي a .

٢. إذا كانت $f(x)=mx+c$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=ma+c$ لكل عدد حقيقي a .

تابع: النهايات:

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x \to 5} 27$

2. $\lim_{x \to -2} (1-2x)$

3. $\lim_{x \to 2} (3x+4)$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x-5)$

تابع: النهايات:

الحل:

1. $\lim_{x \to 5} 27 = 27$

2. $\lim_{x \to -2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 1 + 4 = 5$

3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x\to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فان:

i. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l \pm k$

ii. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \times \lim_{x\to a} f(x) = c \times l$

iii. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \times g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = l \times k$

iv. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{l}{k} \quad , k \neq 0$

تابع: النهايات:

مثال:

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}\left[h(x) - f(x)\right]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[g(x)\times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

تابع: النهايات:

iv. $$\lim_{x \to 2} \left[f(x) + h(x) + g(x) \right]$$

v. $$\lim_{x \to 2} \left[f(x) - g(x) \times h(x) \right]$$

vi. $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

vii. $$\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{f(x)}$$

تابع: النهايات:

الحل:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\left[h(x)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 2}h(x)-\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$=10.5-5=5.5$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\times h(x)\right]=\lim\limits_{x\to 2}g(x)\times\lim\limits_{x\to 2}h(x)$

$=-8\times 10.5=-84$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}8f(x)=8\lim\limits_{x\to 2}f(x)=8\times 5=40$

تابع: النهايات:

الحل:

iv.
$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)+h(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} h(x)+\lim_{x\to 2} g(x)$$
$$=5+10.5+(-8)$$
$$=15.5-8=7.5$$

v.
$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\times h(x)\right]=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x)$$
$$=5-(-8\times 10.5)$$
$$=5+84=89$$

تابع: النهايات:

vi. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$$

vii. $$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}=\frac{10.5}{5}=2.1$$

تابع: النهايات:

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

مثال:

$$\lim_{x \to 1} [3x-1]^6 = \left[\lim_{x \to 1} 3x-1\right]^6 = [3 \times 1 - 1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 64$$

تابع: النهايات:

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

$$1.\quad \lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)=3\times 2^3+5\times 2^2-7$$
$$=3\times 8+5\times 4-7$$
$$=24+20-7=37$$

$$2.\quad \lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}=\frac{3\times 3^2+7}{3-5}=\frac{3\times 9+7}{-2}=\frac{27+7}{-2}=\frac{34}{-2}=-17$$

تابع: النهايات:

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{5x+3}=\frac{2\times 2-1}{5\times 2+3}=\frac{4-1}{10+3}=\frac{3}{13}$$

4. $$\lim_{x\to 2} e^{x}=e^{2}$$

5. $$\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1}=e^{1^2+2\times 1+1}=e^{1+2+1}=e^{4}$$

6. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

تابع: النهايات:

7. $$\lim_{x\to 2}\left((\log(3x^2+5)\right)=\log(3\times 2^2+5)$$
$$=\log(3\times 4+5)$$
$$=\log(12+5)$$
$$=\log 17$$

8. $$\lim_{x\to 3}\left(\ln(2x-5)\right)=\ln(2\times 3-5)=\ln(6-5)=\ln 1=0$$

9. $$\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3=(3\times 1^3+4\times 1-2)^3=(3+4-2)^3=5^3=125$$

10. $$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}=\sqrt[3]{2^2+5}=\sqrt[3]{4+5}=\sqrt[3]{9}$$

تابع: النهايات:

٣. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

تابع: النهايات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

ii. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد

$$i. \quad \lim_{x \to 3} f(x) \quad , \quad ii. \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \quad , \quad iii. \quad \lim_{x \to 1} f(x)$$

تابع: النهايات:

الحل:

i. تقع ٣ ضمن مجال القاعدة الثانية لان 1< 3

$$\therefore \quad \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} 7x-2=7\times 3-2=21-2=19$$

ii. تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الثانية لان $\frac{1}{2}<1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}} 3x^2+5=3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

تابع: النهايات:

iii. تقع ١ على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين(أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار(أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 7x - 2 = 7\times 1 - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x^2 + 5 = 3\times 1^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$$ غير موجودة

تمارين

أ- إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[5f(x) - 4h(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[-\frac{1}{2}g(x)\times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

تابع: تمارين:

iv. $$\lim_{x\to 2}\left[8f(x)-g(x)\times h(x)\right]$$

v. $$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}$$

vi. $$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{2f(x)}$$

تابع: تمارين:

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

3. $\lim_{x \to -2} \frac{2x - 3}{x + 4}$

4. $\lim_{x \to 0} e^x$

تابع: تمارين:

5. $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt[4]{x^2-3x-8}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\log(2x+4)\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\ln(x^2+1)\right)$

8. $\lim\limits_{x\to -1} (2x^2+5x+1)^2$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}$

المحاضرة التاسعة

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.

من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1.\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

تابع: النهايات:

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3.\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1^2-3\times 1+2}{1-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

4. $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2x}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2x} = \frac{0^2 + 0}{2 \times 0} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x} \times 2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ب- إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \quad \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x} + 3\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(x-9\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\left(x-9\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2.\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ثانياً: عندما $x \to \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:

نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \to \infty$ فان:

$$1- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط <u>أقل</u> من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط <u>تساوي</u> درجة المقام.

$$3- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط <u>أكبر</u> من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ملاحظة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^n=0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^3=0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1} = 0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$3. \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$4. \quad \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7} = \frac{5}{2}$$

تابع: تمارين:

أوجد النهايات التالية:

1. $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$$

2. $$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$$

3. $$\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$$

4. $$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$$

تابع: تمارين:

5. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

6. $$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

7. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة a إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في a أي أن f(a) معرفة

ب- $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

ج- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

تابع: الاتصال:

مثال(١):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} x-9 & , x\neq -3 \\ -6 & , x=-3 \end{cases}$$

متصلة في x=-3 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(-3) = -6$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

بما أن

$$\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=-3

تابع: الاتصال:

مثال(٢):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 6x & , 0<x<5 \\ 25+2x & , \quad x\geq 5 \end{cases}$$

متصلة في x=5 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(5)=25+2\times 5=25+10=35$$

$$\lim_{x\to 5^{+}} f(x)=\lim_{x\to 5}(25+2x)=25+2\times 5=25+10=35$$

$$\lim_{x\to 5^{-}} f(x)=\lim_{x\to 5} 6x=6\times 5=30$$

بما أن

$$\lim_{x\to 5^{+}} f(x)\neq \lim_{x\to 5^{-}} f(x)$$

اذاً

$\lim_{x\to 5} f(x)$ غير موجودة

اذاً الدالة غير متصلة في x=5

تابع: الاتصال:

مثال(٣):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 3 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

متصلة في x=0 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(5x^2-3)=5(0)^2-3=-3$$

بما أن

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=0

تابع: الاتصال:

مثال(٤):

أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ غير متصلة في x=-2

الحل:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$ غير معرفة

اذاً الدالة غير متصلة في x=-2

تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

1. $$f(x) = \begin{cases} 2+x & , x < 2 \\ 2-x & , x \geq 2 \end{cases}$$

في x=2

2. $$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x-1 & , x < -1 \end{cases}$$

في x=-1

تمارين:

3. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ 2 & , x>1 \end{cases}$$

في x=1

4. $$f(x)=\begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 1 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \end{cases}$$

في x=2

المحاضرة العاشرة

الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2 = x_1 + \Delta x$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 1.5

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$

$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$

$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 2

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$

$$f(1)=3\times1+2=3+2=5$$

$$f(2)=3\times2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ٢ إلى 4

الحل:

$$x_1=2 \quad , \quad x_2=4$$

$$f(2)=2^2+2=4+2=6$$

$$f(4)=4^2+2=16+2=18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{18-6}{4-2}=\frac{12}{2}=6$$

تابع: الاشتقاق:

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ ، } f'(x) \text{ ، } y' \text{ ، } \frac{d}{dx} f(x)$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

تابع: الاشتقاق:

مثال:

إذا كانت $f(x)=x^2$ أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية .

الحل:

$$f(x)=x^2$$

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

تابع: الاشتقاق:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

ملاحظة:

وعندما تكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال أن الدالة قابلة للاشتقاق في a .

تابع: الاشتقاق:

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = x^5$

II. $y = x^{-3}$

III. $y = x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

II. $$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$$

III. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

II. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

III. $$\frac{dy}{dx} = 0$$

تابع: الاشتقاق:

٣. إذا كانت $y = cx^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^4$

II. $y = -2x^7$

III. $y = 16x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$

II. $$\frac{dy}{dx} = -14x^6$$

III. $$\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

تابع: الاشتقاق:

٤. إذا كانت $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

حيث $n \neq 0$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_n x^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

تابع: الاشتقاق:

٥. إذا كانت $y=[f(x)]^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\left(2x^2+5\right)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8\left(2x^2+5\right)^7.4x=32x\left(2x^2+5\right)^7$$

تابع: الاشتقاق:

٦. إذا كانت $y=\left(f(x).g(x)\right)$ فان :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\left(x^2+1\right)\left(2x^3-2\right)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=2x(2x^3-2)+6x^2(x^2+1)$$

$$=4x^4-4x+6x^4+6x^2$$

$$=10x^4+6x^2-4x$$

تابع: الاشتقاق:

٧. إذا كانت $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$$

مثال:

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = \frac{2x+5}{3x-4}$$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}$$

$$=\frac{-23}{(3x-4)^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة: إذا كانت $y = \dfrac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \, . \, f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \dfrac{3}{x^2 - 2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^2}$$

تابع: الاشتقاق:

٨. إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فان :

(قانون السلسلة) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+5)(1) = 2(x+3)+5 = 2x+11$$

تابع: الاشتقاق:

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \, , \; f''(x) \, , \; y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3} \, , \; f'''(x) \, , \; y'''$$

وهكذا

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

iv. $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

تمارين

v. $y = x + 1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x + 3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

تمارين

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$

ii. $y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$

iii. $y = \dfrac{u^2 + 1}{u - 2} \quad , \quad u = 3x + 7$

تمارين

٣. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

iv. $y = \dfrac{1}{3x + 1}$

المحاضرة الحادية عشرة

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y = e^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^{u}$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = e^{u} . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1}\left(2x+2\right) = (2x+2)e^{x+2x+1}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = a^x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \ln a$$

وبشكل عام إذا كانت $y = a^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = 3^x$

2. $y = 9^{2x^2}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$$

2. $$\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2}(4x)\ln 9$$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y = \ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln u$ حيث $u = f(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1 + x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = \log_a x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \log_a u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \log_2 x$
2. $y = \log_2(1 + x^2)$

الحل:

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 2}$$
2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln 2}$$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال المثلثية:

١. إذا كانت $y = \sin x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \sin u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u . \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \times 4 = 4\cos 4x$$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y = \cos x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \, . \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5\cos 5x$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \cos^2 x$

2. $y = \sin x \cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos x \,.\, (-\sin x) = -2\cos x \sin x$

2. $y = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$

تابع: الاشتقاق:

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

$$3. \quad \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u . \frac{du}{dx}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u . \tan u . \frac{du}{dx}$$

$$5. \quad \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u . \cot u . \frac{du}{dx}$$

$$6. \quad \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u . \frac{du}{dx}$$

حيث $u = f(x)$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y = \tan^2 x$

2. $y = \cot^3(2x+1)$

3. $y = \sec(x+1)$

4. $y = \csc 2x$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $$\frac{dy}{dx} = 2\tan x \ \sec^2 x$$

2. $$\frac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right].(2)$$

$$= -6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$$

تابع: الاشتقاق:

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \sec(x+1).\tan(x+1)\ .(1)$$
$$= \sec(x+1)\tan(x+1)$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = -\csc 2x\ .\ \cot 2x\ .\ (2)$$
$$= -2\csc 2x \cot 2x$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:

عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\frac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dy}{dx}$ في طرف ، وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

$$1. \quad y^2 + x^2 = 9$$

$$2. \quad y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$$

$$3. \quad 4x^2 + 3xy - xy^2 = 0$$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1. \quad 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

تابع: الاشتقاق:

$$2.\quad 2y\frac{dy}{dx}+2x+9x^2+12y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}+12y^2\frac{dy}{dx}=-2x-9x^2$$

$$\left(2y+12y^2\right)\frac{dy}{dx}=-2x-9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-9x^2}{2y+12y^2}$$

تابع: الاشتقاق:

$$3.\quad 8x+3x\frac{dy}{dx}+3y-2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$$

$$3x\frac{dy}{dx}-2xy\frac{dy}{dx}=y^2-3y-8x$$

$$(3x-2xy)\frac{dy}{dx}=y^2-3y-8x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-3y-8x}{3x-2xy}$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x,y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

تابع: الاشتقاق:

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

$$1.\quad z = xy + x^2 y + y^2 x$$

$$2.\quad z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

2. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = e^{x^2 - 2x}$

ii. $y = (2x+3)e^{-2x}$

iii. $y = e^{\cos x}$

iv. $y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$

تمارين

v. $y = \log_4 3x$

vi. $y = 7^{x^3}$

vii. $y = \ln(\sin x)$

viii. $y = x^2 e^{2x}$

ix. $y = e^{2x} \cos 3x$

تمارين

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

$$i.\quad 9x^2+4y^2=40$$

$$ii.\quad y^4+3y-4x^3=5x+1$$

$$iii.\quad 4xy^3-x^2y+x^3-5x+6=0$$

$$iv.\quad 5x^2+2x^2y+y^2=8$$

تمارين

$v. \quad y = x^2 \sin x$

$vi. \quad y^2 = x \cos y$

٣. إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

٤. إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

تمارين

٥. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

i. $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii. $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii. $z = xy - \ln xy$

iv. $z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$

المحاضرة الثانية عشرة

التكامل

التكامل:

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x).dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير x .

تابع: التكامل:

قواعد التكامل:

1. $\int dx = x + c$ حيث c ثابت التكامل

2. $\int a\, dx = ax + c$ حيث a ثابت

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \, , n \neq -1$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ حيث a ثابت

تابع: التكامل:

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

6. $\int e^x dx = e^x + c$

7. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \ , x \neq 0$

8. $\int \sin x \ dx = -\cos x + c$

9. $\int \cos x \ dx = \sin x + c$

تابع: التكامل:

10. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

11. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

12. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

13. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

تابع: التكامل:

أمثلة:

1. $\int 5dx = 5x + c$

2. $\int (7x+3)dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$

3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$

4. $\int (3\sin x + 2x)dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + c = -3\cos x + x^2 + c$

تابع: التكامل:

$$5.\quad \int (x+\sec^2 x)dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + c$$

$$6.\quad \int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

$$7.\quad \int (4e^x + x^{-1})dx = \int \left(4e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 4e^x + \ln|x| + c$$

تابع: التكامل:

ملاحظات :

$$1.\ \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c\ , n \neq -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int 3(x^3+4)^4 x^2 dx = \frac{(x+4)^5}{5} + c$$

$$ii.\quad \int (x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

تابع: التكامل:

$$iii. \quad \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

$$iv. \quad \int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

تابع: التكامل:

$$2.\ \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c\ , n = -1$$

أمثلة:

$$i.\quad \int x^3(1+x^4)^{-1}dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(1+x^4)^{-1}dx = \frac{1}{4}\left|1+x^4\right| + c$$

$$ii.\quad \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int 2x(1+x^2)^{-1}dx = \left|1+x^2\right| + c$$

تابع: التكامل:

$$3.\ \int f'(x).e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

أمثلة:

$$i.\quad \int e^{\sin x}\cos x\ dx = e^{\sin x} + c$$

$$ii.\quad \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$iii.\quad \int x^2e^{3x^3}dx = \frac{1}{9}\int 9x^2e^{3x^3}dx = \frac{1}{9}e^{3x^3} + c$$

تابع: التكامل:

حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$

الحل:

نفصل المتغيرين x، y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2 dy = xdx$$

تابع: التكامل:

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2 dy = \int x dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$

تابع: التكامل:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$

$$y^{-3}dy = 4x^3dx$$

تابع: التكامل:

$$\int y^{-3}dy = \int 4x^3dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$

تمارين

١. أوجد ناتج التكاملات الآتية:

i. $$\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right) dx$$

ii. $$\int \left(x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}\right) dx$$

iii. $$\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$$

تمارين

v. $\int \cos 3x \, dx$

vi. $\int \left(\sec^2 2x - 1\right) dx$

vii. $\int e^{2x} dx$

viii. $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} \quad , x \neq -1$

تمارين

٢. حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

i. $$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

ii. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

iii. $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

المحاضرة الثالثة عشر

التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت $g(x)$ دالة بحيث $g'(x)=f(x)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b)-g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و b بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

تابع: التكامل:

مثال:

أوجد $\int_1^3 x^3 dx$

الحل:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

تابع: التكامل:

بعض خواص التكامل المحدد:

$$1. \quad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

مثال:

$$\int_1^2 4x^3 dx = 4\int_1^2 x^3 dx = 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[x^4\right]_1^2 = 16 - 1 = 15$$

تابع: التكامل:

$$2. \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

مثال:

$$\int_5^5 3x^2 dx = 0$$

$$3. \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

مثال:

$$\int_0^2 (3x^2 + e^x)dx = \int_0^2 3x^2\, dx + \int_0^2 e^x\, dx$$

تابع: التكامل:

4. $$\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$$

مثال: إذا كان $\int_2^4 f(x)dx = 8$ فان $\int_4^2 f(x)dx = -8$

5. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:

$$\int_2^4 x^2dx + \int_4^2 x^2dx = \int_2^2 x^2dx = 0$$

تابع: التكامل:

أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_0^3 2\,dx$

الحل:

$$\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2\times 3 - 0 = 6$$

تابع: التكامل:

2. $$\int_0^2 (x+6)dx$$

الحل:

$$\int_0^2 (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{2}+6(2)\right]-0$$

$$= 2+12 = 14$$

تابع: التكامل:

3. $\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)dx$

الحل:

$$\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)dx = \left[x^3 - 2x^2 - 5x\right]_1^3$$

$$= \left[3^3 - 2(3)^2 - 5(3)\right] - \left[1^3 - 2(1)^2 - 5(1)\right]$$

$$= \left[27 - 18 - 15\right] - \left[1 - 2 - 5\right]$$

$$= -6 + 6 = 0$$

تابع: التكامل:

4. $\int_{-2}^{2}(5x+4)dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{2}(5x+4)dx=\left[\frac{5x^{2}}{2}+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left[\frac{5(2)^{2}}{2}+4(2)\right]-\left[\frac{5(-2)^{2}}{2}+4(-2)\right]$$

$$=[10+8]-[10-8]$$

$$=18-2=16$$

تابع: التكامل:

5. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$

الحل:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{1}^{2}$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2 - 0 = \ln 2$$

تابع: التكامل:

6. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$

تابع: التكامل:

7. $\int_{0}^{2} (2x+1)^3 \, dx$

الحل:

$$\int_{0}^{2} (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2(2x+1)^3 dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left[(2\times 2+1)^4 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{8}\times 624 = 78$$

تابع: التكامل المحدد :

٨. إذا كان $\int_{1}^{2} f(x)dx = 5$ ، $\int_{1}^{3} f(x)dx = 10$ فأوجد

$i.\quad \int_{2}^{3} f(x)dx$

$ii.\quad \int_{1}^{1} f(x)dx$

$iii.\quad \int_{3}^{1} f(x)dx$

$iv.\quad \int_{1}^{2} 6f(x)dx$

تابع: التكامل المحدد :

الحل:

$$\int_{1}^{2} f(x)dx = 5 \quad \Longrightarrow \quad \int_{2}^{1} f(x)dx = -5$$

$$i. \quad \int_{2}^{3} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$

$$= -5 + 10 = 5$$

$$ii. \quad \int_{1}^{1} f(x)dx = 0$$

تابع: التكامل المحدد :

$$iii.\quad \int_{3}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{3} f(x)dx = -10$$

$$iv.\quad \int_{1}^{2} 6f(x)dx = 6\int_{1}^{2} f(x)dx = 6\times 5 = 30$$

تمارين:

١. أوجد التكاملات التالية:

i. $\int_{0}^{2}(5x^{3}-3x+6)dx$

ii. $\int_{-2}^{3}7dx$

iii. $\int_{4}^{4}\sqrt{16-x^{2}}dx$

تابع: تمارين:

$$iv.\quad \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$$

$$v.\quad \int_{-1}^{2}(x^3+1)^2\,dx$$

$$vi.\quad \int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$$

تابع: تمارين:

$$vii.\quad \int_{-2}^{3}\left(6x^2-5\right)dx$$

$$viii.\quad \int_{2}^{10}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx$$

$$ix.\quad \int_{0}^{\pi}\sec^2 x\,dx$$