المحاضرة الثانية عشر

مقاييس الإلتواء والتفلطح

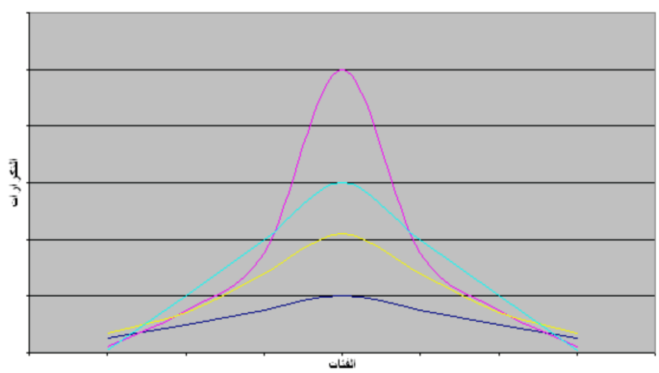
أولا: مقاييس الإلتواء Skewdness Measures

عند دراسة أشكال منحنيات التوزيعات التكرارية المختلفة نجد أن منها ماهو متماثل Symmertical ومنها الغير متماثل أى يوجد به ما يسمى بالإلتواء Skewed كما يتضح من أشكال منحنيات التوزيعات التالية:

المنحنى المتماثل Symmetrical Curve:

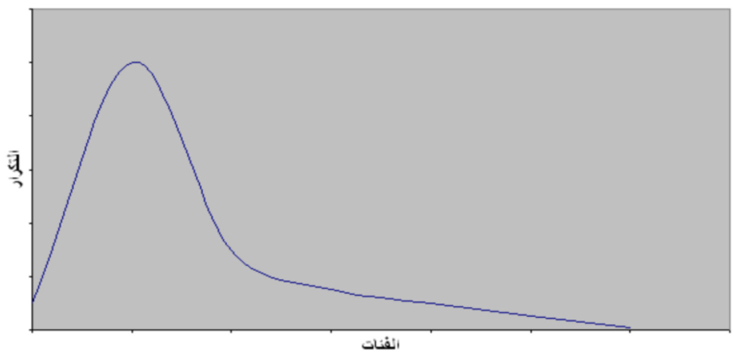
هو المنحنى الذى اذا قسمناه إلى نصفين إنطبق هذان النصفان على بعضهما البعض تماما.

شكل يوضح منحنيات التوزيع المتماثل



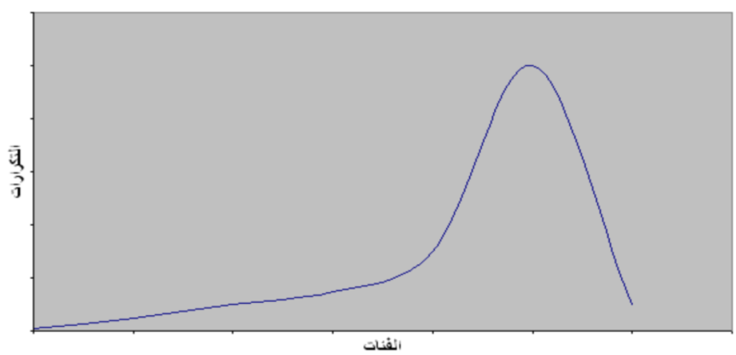
المنحنيات الملتوية Skewed: إن الكثير من التوزيعات الإحصائية تبتعد عن التماثل بتركز تكراراتها إما عند أصغر القيم فيصبح المنحنى ملتويا جهة اليمين أو إلتواء موجب كما يظهر فى الشكل التالي:

شكل يوضح منحنى ملتوى جهة اليمين



أما فى حالة تركز التكرارات عند عند أكبر القيم فيسمى المنحنى فى تلك الحالة منحنى ملتوي جهة اليسار (إلتواء سالب) كما يظهر من ا لشكل التالى:

شكل يوضح منحنى ملتوى جهة اليسار



ويمكن قياس الإلتواء من خلال معامل الإلتواء SK **والذى يفيدنا فى الحكم على مدى تماثل أو إلتواء التوزيع**

تتعدد مقاييس الإلتواء إلا أن من أهمها:

معامل الإلتواء لبيرسون والذى يكون ف ى أحد الصورتين التاليتين:

$$SK = \frac{\bar{x} - Mod}{S} \quad \text{أو} \quad SK = \frac{3(\bar{x} - Med)}{S}$$

وحيث أنه لا يمكن حساب معامل الإلتواء لبيرسون فى حالة المنحنيات التى تكون شديدة الإلتواء أو فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

لذلك يمكن الاعتماد على مقياس الإلتواء لباولى SkB الذى يعرف كما يلي:

$$SK_B = \frac{Q_3 - 2Med + Q1}{Q_3 - Q1}$$

تذكير لبعض المعادلات السابقه:

$$Med = L_{Med} + \frac{k_{Med} - F_a}{F_b - F_a} \times I_{Med}$$

Med	قيمة الوسيط
L_{Med}	الحد الادنى لبداية الفئة الوسيطية
k_{Med}	ترتيب الوسيط
F_a	التكرار المتجمع السابق للفئة الوسيطية
F_b	التكرار المتجمع اللاحق للفئة الوسيطية
I_{Med}	طول الفئة الوسيطية

معادلة حساب الوسيط Med

$$Q_1 = L_{Q_1} + \frac{\frac{n}{4} - F_a}{F_b - F_a} \times I_{Q_1}$$

Q_1	قيمة الربيع الأدنى أو الأول
L_{Q_1}	الحد الادنى لبداية الفئة الربيعية الأولى
k_Q	ترتيب الربيع الأول
F_a	التكرار المتجمع السابق للفئة الربيعية الأولى
F_b	التكرار المتجمع اللاحق للفئة الربيعية الأولى
I_{Q_1}	طول الفئة الربيعية الأولى

معادلة حساب الربيع الأول Q1

$$Q_3 = L_{Q_3} + \frac{\frac{3(n)}{4} - F_a}{F_b - F_a} \times I_{Q_3}$$

Q_3	قيمة الربيع الأدنى أو الثالث
L_{Q_3}	الحد الادنى لبداية الفئة الربيعية الثالثة
k_{Q_3}	ترتيب الربيع الثالث
F_a	التكرار المتجمع السابق للفئة الربيعية الثالثة
F_b	التكرار المتجمع اللاحق للفئة الربيعية الثالثة
I_{Q_3}	طول الفئة الربيعية الثالثة

معادلة حساب الربيع الثالث Q3

سمر المغربي

مثال: البيانات التالية تعبر عن توزيع الوحدات السكنية حسب الإيجار السنوى بأحد الاحياء في أحد المدن:

الايجار بالألف ريال	٦-	١٠ -	١٢-	١٤ - ١٨
عدد الوحدات السكنية	١٥	٢٠	١٢	١٣

المطلوب:

حساب معامل الإلتواء لتوزيع الإيجار السنوى للوحدات السكنية.

الحل: **فلحسابه :١- لابد من إيجاد جدول كما يلي:**

فئات العمر	التكرار f	مركز الفئة x	x f	x^2	$x^2 f$
٦	١٥	(٦+١٠)÷٢=٨	١٢٠	٦٤	٩٦٠
١٠	٢٠	(١٠+١٢)÷٢=١١	٢٢٠	١٢١	٢٤٢٠
١٢	١٢	(١٢+١٤)÷٢=١٣	١٥٦	١٦٩	٢٠٢٨
١٤-١٨	١٣	(١٤+١٨)÷٢=١٦	٢٠٨	٢٥٦	٣٣٢٨
المجموع	٦٠		٧٠٤		٨٧٣٦

٢- حساب (الوسط الحسابي،التباين،الانحراف المعياري،الربيع الأدنى، الربيع الأعلى ، الوسيط، المنوال)

١- الوسط الحسابي:

$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{٧٠٤}{٦٠}$ =١١,٧٣٣

٢- التباين:

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2 = \frac{٨٧٣٦}{٦٠} -$ (١١,٧٣٣)٢

١٤٥,٦ – ١٣٧,٦٦٣٢ = ٧,٩٢٨٨

٣- الانحراف المعياري:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7.9288}$ = ٢,٨١٥٨

ثم حساب كلاً من الربيع الأعلى والربيع الأدنى والوسيط:

١- إيجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد:

الحدود العليا للفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٦	٠	٠
أقل من ١٠	١٥	٠+١٥=١٥
أقل من ١٢	٢٠	١٥+٢٠=٣٥
أقل من ١٤	١٢	٣٥+١٢=٤٧
أقل من ١٨	١٣	٤٧+١٣=٦٠

K_{med}

Q_3

٢- إيجاد الرتبة:

	الرتبه
Med	K_{med}= n/٢ = ٦٠/٢ = ٣٠
Q1	K_{Q1}= n/٤ = ٦٠/٤ = ١٥
Q3	K_{Q3}=٣n/٤=١٨٠/٤ = ٤٥

سمر المغربي

٣- إيجاد القيمة:

أ - الوسيط:

$$Med = L_{Med} + \frac{k_{Med} - F_a}{F_b - F_a} \times I$$

فالحد الأدنى لبداية الفئة: Lmed = ١٠

وطول الفئة: ١٢-١٠=٢ إذن I=٢

إذن على ذلك يمكن حساب قيمة الوسيط كما يلي: med=١٠ + $\frac{٣٠-١٥}{٣٥-١٥}$ ×٢=١١,٥

ب -الربيع الأدنى(الأول): Q1=١٠ نلاحظ أن مرتبة الربيع الأول ١٥ ويوجد تكرار متجمع صاعد نفسه ١٥ أمام الحد الأعلى للفئة ١٠ لذالك لايتم تطبيق القانون وإنما نحصل على قيمة الربيع الأول مباشرة.

ت -الربيع الأعلى (الثالث):

$$Q_3 = L_{Q_3} + \frac{\frac{3(n)}{4} - F_a}{F_b - F_a} \times I_{Q_3}$$

فالحد الأدنى لبداية الفئة: L_{Q3} =١٢

وطول الفئة: ١٤ – ١٢ = ٢ إذن I =٢

ثم حساب قيمة الربيع الاعلى(الثالث) كما يلي: Q_3 =١٢+ $\frac{٤٥-٣٥}{٤٧-٣٥}$ ×٢ =١٣,٦٦٦٧

المنوال: نلاحظ أن هذا الجدول غير منتظم أي أن أطوال الفئات غير متساوية فلحساب المنوال في هذه الحالة لايتم الإعتماد على بيانات الفئات الأصلية وإنما يتم إيجاد التكرار المعدل بقيمة تكرار كل فئة على طولها كما يأتي:

فئات الدخل	التكرار f	طول الفئة	التكرار المعدل
٦	١٥	١٠-٦=٤	١٥÷٤=٣,٧٥
١٠	٢٠	١٢-١٠=٢	٢٠÷٢=١٠
١٢	١٢	١٤-١٢=٢	١٢÷٢=٦
١٤-١٨	١٣	١٨-١٤=٤	١٣÷٤=٣,٢٥

mod

نلاحظ أن أكبر تكرار معدل هو(١٠ حيث يكون مقابل للفئة ١٠) لذالك يطلق عليها الفئة المنوالية ومن ثم فإن:

الحد الأدنى للفئة المنوالية = Lmod = ١٠ وطول الفئة المنوالية = ١٢ – ١٠ = ٢ إذن I = ٢

كما أيضاً يمكن حساب كلاً من : D_1= ١٠ - ٣,٧٥ = ٦,٢٥

D_2= ١٠ - ٦ = ٤

بالتالي يمكن حساب قيمة المنوال:

$$Mod = L_{Mod} + \frac{D1}{D1 + D2} \times I$$

Mod = ١٠ + $\frac{٦,٢٥}{٦,٢٥+٤}$ ×٢ =١١,٢١٩٥١

وعلى ذلك يمكن حساب معامل الالتواء لبيرسون بإستخدام المعادلة:

$$SK = \frac{\bar{x} - Mod}{S} = \frac{١١,٧٣٣٣٣ - ١١,٢١٩٥١}{٢,٨١٥٨} = ٠,٢٤٨٥٩$$

ويظهر لنا من النتيجة لجميع المعادلات الخاصة بحساب معامل الإلتواء وجود التواء موجب جهة اليمين الا أن قيمة معامل الإلتواء صغيرة تقترب من الصفر مما يدل ايضا على أن التوزيع قريب من التماثل.

كما أيضا يمكن حساب معامل الالتواء لبيرسون باستخدام المعادلة:

$$SK = \frac{3(\bar{x} - Med)}{S} = \frac{٣(١١,٧٣٣٣٣ - ١١,٥)}{٢,٨١٥٨} = ٠,٢٤٨٥٩$$

وأيضاً يمكن حساب معامل الالتواء لباولي باستخدام المعادلة:

$$SK_B = \frac{Q_3 - 2Med + Q1}{Q_3 - Q1} = \frac{١٣,٦٦٦٧-٢(١١,٥)+١٠}{١٣,٦٦٦٧-١٠} = ٠,١٨١٨٢$$

ملاحظه/ الناتج الموجود
في الكتاب خاطئ
ص١٦٤

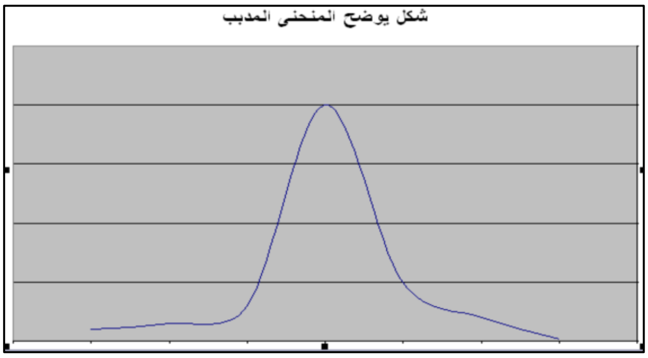
سمر المغربي

ونتيجة لوجود اختلاف فى الاصل الرياضى لكل من المعادلات الثلاث السابقة لذا نجد أن قيمة معامل الإلتواء تختلف. إلا أنة كما سبق وذكرنا بأنه يفضل استخدام معامل الإلتواء لبيرسون فى أي من صيغتيه فى حالة البيانات غير المبوبة وكذلك الجداول التكرارية المغلقة أما في حالة الجداول التكرارية المفتوحة فيفضل استخدام معامل الإلتواء لباولي.

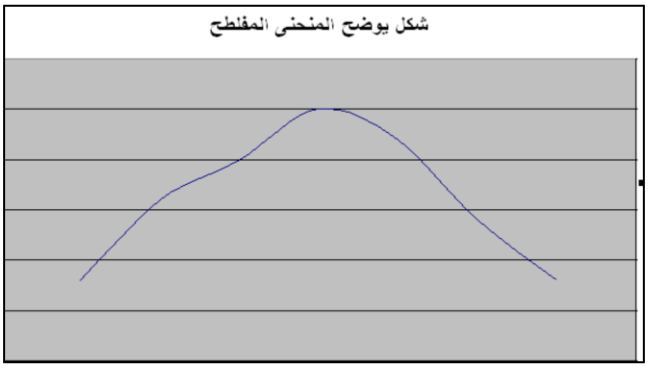
ثانيا: التفلطح Kurtosis : يقصد بالتفلطح مقدار التدبب (الارتفاع أوالإنخفاض)فى قمة المنحنى مقارنة بقمة منحنى التوزيع الطبيعى.

وتكون قيمة معامل التفلطح صفر فى حالة التوزيع الطبيعى المعيارى.

ففى حالة مايكون معامل التفلطح للبيانات الاصلية أكبرمن٣يكون المنحنى مدبب لأعلى كما بالشكل التالي:

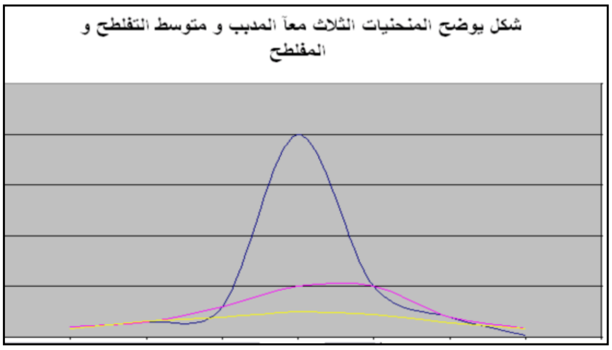


أمافى حالة ما يكون معامل التفلطح للبيانات الأصلية أقل من ٣ يعنى ذلك أن المنحنى مفلطح كما يتضح من الشكل التالي:



أما فى حالة ما يكون معامل التفلطح يساوى ثلاثة يكون المنحنى متوسط التفلطح و يكون بالشكل التالي:

وحتى يتضح الفرق بين المنحنيات الثلاث يمكن رسمها معا كما يلي: ☚



سمر المغربي

ويتم قياس معامل التفرطح KU باستخدام الربيعات والمئينيات من خلال المعادلة التالية:

$$KU = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{0.90} - P_{0.10})}$$

حيث يشير:

$P_{0.90}$	إلى المنين التسعين والذى يعبر عن ٩٠ % من المفردات تكون أقل منه و ١٠ % منها أكبر منه
$P_{0.10}$	إلى المنين العاشر (العشير) والذى يعبر عن ١٠ % من المفردات تكون أقل منه و ٩٠ % منها أكبر منه

مثال: البيانات التالية تعبر عن توزيع الوحدات السكنية حسب الإيجار السنوى بأحد الاحياء في أحد المدن:

الايجار بالألف ريال	٦-	١٠-	١٢-	١٤-١٨
عدد الوحدات السكنية	١٥	٢٠	١٢	١٣

المطلوب:

حساب معامل التفلطح لتوزيع الإيجار السنوى للوحدات السكنية.

الحل:من قانون معامل التفلطح : $KU = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{0.90} - P_{0.10})}$

حيث أنه من التمرين السابق تم حساب: Q1 = ١٠ وَ Q3 = ١٣,٦٦٦٧

ثم حساب العشير وَ المئين التسعون: ١- إيجاد الجدول التكراري المتجمع الصاعد:

الحدود العليا للفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٦	٠	٠
أقل من ١٠	١٥	١٥=١٥+٠
أقل من ١٢	٢٠	٣٥=٢٠+١٥
أقل من ١٤	١٢	٤٧=١٢+٣٥
أقل من ١٨	١٣	٦٠=١٣+٤٧

$K_{p0.10}$

$K_{p0.90}$

٢- إيجاد الرتبة (ترتيب العشير ، المئين التسعون):

	الرتبة
$P_{0.10}$	$K_{p0.10}$=n/10 = 60÷10 = ٦
$P_{0.90}$	$K_{p0.90}$=9n/10 = (٩×٦٠)÷١٠ = ٥٤

٣- إيجاد القيمة: أ- العشير:

$$P_{0.10} = L_{P0.10} + \frac{n/10 - F_a}{F_b - F_a} \times I = ٦ + \frac{٦ - ٠}{١٥ - ٠} \times ٤ = ٧,٦$$

ب- المئين التسعون:

$$P_{0.10} = L_{P0.10} + \frac{9n/10 - F_a}{F_b - F_a} \times I = ١٤ + \frac{٥٤ - ٤٧}{٦٠ - ٤٧} \times ٤ = ١٦,١٥٣$$

وعلى ذلك يمكن حساب معامل التفلطح بأستخدام العلاقة:

$$KU = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{0.90} - P_{0.10})} = \frac{١٣,٦٦٦٧ - ١٠}{٢(١٦,١٥٣ - ٧,٦)} = \frac{٣,٦٦٦٧}{١٧,١٠٦} = ٠,٢١٤٣$$

ملاحظه/ الناتج الموجود في الكتاب خاطئ ص١٦٨

ويتضح لنا أن معامل التفلطح أقل من ٣ مما يدل على أن المنحنى مفلطح أى أن المشاهدات (التكرارات) موزعة على الفئات المختلفة للإيجار السنوى ولا يوجد تركز بدرجة كبيرة فى أحد الفئات على حساب باقى الفئات الأخرى.

سمر المغربي