معادلة خط الانحدار البسيط

اهداف المحاضرة

بنهاية المحاضرة يكون الطالب قادر على:

١. تعريف معادلة خط الانحدار البسيط.

٢. حساب معادلة خط الانحدار البسيط.

٣. تعريف العلاقة بين معامل ارتباط بيرسون و معادلة خط الانحدار البسيط.

٤. حساب وتفسير معامل التحديد.

معادلة خط الانحدار البسيط

نجد ان معادلة خط الانحدار بين متغيرين x , y هي:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

حيث ان

x المتغير المستقل

y المتغير التابع

ε متغير الخطأ ويتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي صفر وتباين σ

معادلة خط الانحدار البسيط

استخدمت طريقة المربعات الصغرى لتقدير ميل خط الانحدار β_1 ومقطعه β_0 . ونجد ان

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

حيث ان:

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\bar{x}\,\bar{y}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

فتكون معادلة الانحدار هي:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

معادلة خط الانحدار البسيط

- هناك علاقة بين معامل الارتباط r وميل خط الانحدار $\hat{\beta}_1$ هي:

$$r = \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}\hat{\beta}_1$$

- ويمكن استنباط العلاقة

$$r^2 = \frac{SS_y - SSE}{SS_y}$$

ويعرف بمعامل التحديد ويعطي القوة التفسيرية للمتغير المستقل.

- حيث ان

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = SS_y - \hat{\beta}_1 SS_{xy}$$

ويسمى مجموع مربع الخطأ

معادلة خط الانحدار البسيط

مثال (١):

١. اوجدي معادلة خط الانحدار البسيط.
٢. اوجدي معامل الارتباط.
٣. اوجدي معامل التحديد.
٤. فسري هذه النتائج.

Y	X
3	2
7	6
2	3
8	5
5	4

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): حساب الوسط الحسابي للمتغيرين X و Y

Y	X
3	2
7	6
2	3
8	5
5	4
25	20

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): اولا يتم حساب الوسط الحسابي لكلٍ من X و Y

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): لحساب β_1 و β_0 نقوم بحساب مايلي

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): لحساب β_1 و β_0 يتم حساب ما يلي

$(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$Y_i - \bar{Y}$	$X_i - \bar{X}$	Y	X
4	4	٢ - =٥-٣	٢ - = ٤ -٢	3	2
4	4	٢=٥-٧	٢=٤-٦	7	6
3	1	٣ - =٥-٢	١ -=٤-٣	2	3
3	1	٣=٥-٨	١=٤-٥	8	5
0	0	٠=٥-٥	٠=٤-٤	5	4
14	10			25	20

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): لحساب β_1 و β_0 نقوم بحساب مايلي

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 10$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): معادلة خط الانحدار هي

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_x} = \frac{14}{10} = 1.4$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 5 - 1.4 \times 4 = -1.6$$

$$\hat{Y} = -1.6 + 1.4X$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): لحساب معامل ارتباط بيرسون يتم حساب $(Y_i - \bar{Y})^2$

$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$Y_i - \bar{Y}$	$X_i - \bar{X}$	Y	X
4	4	4	٢ - =٥-٣	٢ - = ٤ -٢	3	2
4	4	4	٢=٥-٧	٢=٤-٦	7	6
9	3	1	٣ - =٥-٢	١ -=٤-٣	2	3
9	3	1	٣=٥-٨	١=٤-٥	8	5
0	0	0	٠=٥-٥	٠=٤-٤	5	4
26	14	10			25	20

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): معامل ارتباط بيرسون هو

$$r = \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}\hat{\beta}_1$$

$$r = \sqrt{\frac{10}{26}} \times 1.4 = 0.87$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١): معامل التحديد هو

$$r^2 = (r)^2 = (0.87)^2 = 0.76$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (١):

تفسير معامل ارتباط بيرسون:

هناك ارتباط خطي طردي قوي بين X و Y

تفسير معامل التحديد:

المتغير المستقل X يفسر ٠.٧٦ أي ٧٦% من التغيرات في المتغير التابع Y.

معادلة خط الانحدار البسيط

مثال (٢): اذا كان

$$\bar{x} = 55 \qquad \bar{y} = 7 \qquad \sum x_i^2 = 19900 \qquad \sum y_i^2 = 331$$

$$\sum xy = 2566 \qquad n = 6$$

١. اوجدي معادلة خط الانحدار البسيط.

٢. اوجدي معامل الارتباط.

٣. اوجدي معامل التحديد.

٤. فسري هذه النتائج.

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (٢): لحساب β_1 و β_0 نقوم بحساب مايلي

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\bar{x}\,\bar{y} = 2566 - 6 \times 55 \times 7 = 256$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 19900 - 6 \times 55^2 = 1750$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (٢): معادلة خط الانحدار هي

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_x} = \frac{256}{1750} = 0.15$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 7 - 0.15 \times 55 = -1.25$$

$$\hat{Y} = -1.25 + 0.15X$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (٢): معامل ارتباط بيرسون هو

$$SS_y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 331 - 6 \times 7^2 = 37$$

$$r = \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}\hat{\beta}_1$$

$$r = \sqrt{\frac{1750}{37}} \times 0.15 = 1$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (٢): معامل التحديد هو

$$r^2 = (r)^2 = (1)^2 = 1$$

معادلة خط الانحدار البسيط

حل المثال (٢):

تفسير معامل ارتباط بيرسون:

هناك ارتباط خطي طردي تام بين X و Y

تفسير معامل التحديد:

المتغير المستقل X يفسر كل التغيرات في المتغير التابع Y.