الفصل السادس

التكامل العددي

**Numerical Integration (Quadrature)**

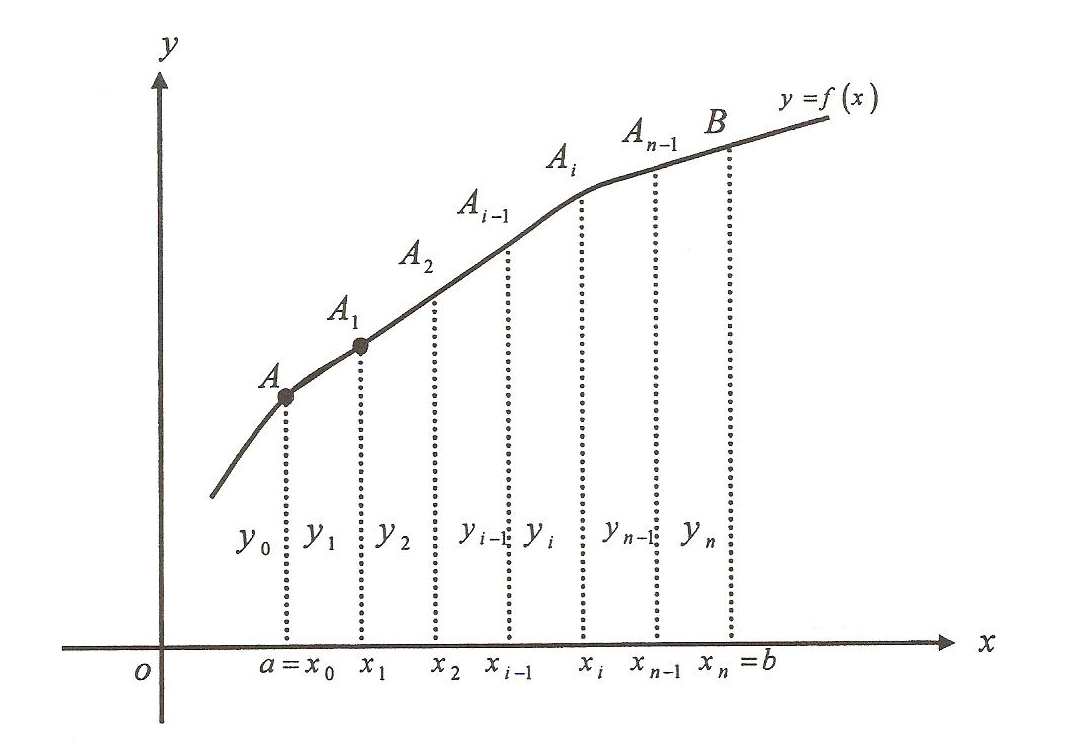
لإيجاد قيمة التكامل نوجد الدالة الأصلية F(x) للدالة المكاملة f(x) حيث f(x) دالة متصلة على الفترة المغلقة ثم نكتب:

ولكن في بعض الحالات توجد صعوبة في إيجاد الدالة الأصلية وفي بعض الحالات تكون الدالة f(x) معطاة في جدول في مثل هذه الحالات فإن قيمة التكامل يمكن إيجادها بالطرق العددية ومن هذه الطرق العددية :

**أولاً:طريقة أشباه المنحرفات :**

لحساب التكامل نقسم الفترة إلىn جزءاً متساوياً

وبحيث يكون طول كل جزء



تراتيب النقط ولتكن

عندئذ تكون مساحة الشكل المطلوب تكون مجموع مساحات أشباه المنحرفات القائمة والمحددة من الأعلى بالأقواس

.hحيث إن مساحة شبة المنحرف الأول هي

لأنه كما نعلم فإن مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع القاعدتين ×الارتفاع

.hو مساحة شبة المنحرف الأول هي

.hوهكذا مساحة شبة المنحرف الأخير هي

ومجموع هذه المساحات هو

وهذه صيغة أشباه المنحرفات لحساب التكامل المحدود.

ملاحظه:

نلاحظ أنه عند استخدام أشباه المنحرفات نستبدل في كل مجال جزئي منحنى الدالة

*من الدرجة بقطعة مستقيمة أي أننا استكملنا هذا الجزء من المنحنى بدالة*

*الأولى هذا يعني أن طريقة أشباه المنحرفات هي عملية استيفاء خطي نستبدل فيها المنحنيات بحدوديات من الدرجة الأولى لذلك نستطيع أن نستخدم طريقة نيوتن التقدمية في الاستيفاء الداخلي.*

*نعلم أن حدودية نيوتن التقدمية تعطى بالعلاقة التالية:*

فإذا اكتفينا بالحدين الأول والثاني فإن :

ومنه وذلك لأن

يكون والخطأ المرتكب في الفترة

حيث فإن وبما أن

ومنه فإن

فإننا نجد: والآن إذا أخذنا التكامل على الفترة

=h

=h

=

ثم نكامل إلى نكامل من [a,b] على كل الفترة ولحساب التكامل   
 فنحصل على : إلى وهكذا..... نكامل من إلى ثم نكامل من إلى من

…..

وهذه الصيغة تسمى صيغة سيمبسون لحساب التكامل المحدود.

مثال (6\_3):

احسب التكامل بطريقة سيمبسون حيث h=

الحل :

هذا يعني أن عدد الفترات زوجي لذلك يمكن تطبيق طريقة سيمبسون

|  |  |
| --- | --- |
| 1 0 | X |
| 1 1.1814 1.3956 1.6487 1.9477 2.3010 2.7183 | Y=f(x) |

[]

=

القيمة الفعلية للتكامل هي :

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة سيمبسون :

إن الخطأ المرتكب في الفترة الجزئية [ وحيث استبدلنا الدالة المكاملة بحدودية من الدرجة الثانية يكون من مرتبة الحد الذي يليه أي :

e=h

=

=

=

وبالتالي الخطأ من مرتبة الحد الذي يليه أي أن :

e =h

=

=

=

e =

وبما أن فأن :

e = -حيث

والخطأ الكلي المرتكب بطريقة سيمبسون هو

E= -

E= -

مثال (4\_6) :

احسب التكامل بطريقة سيمبسون حيث h=0.25ثم احسبي الخطأ المرتكب.

الحل :

n =

هذا يعني أن n عدد زوجي .

|  |  |
| --- | --- |
| -1 -0.75 -0.5 -0.25 0 0.25 0.5 0.75 1 | X |
| 0.731 0.679 0.622 0.562 0.5 0.437 0.377 0.321 0.268 | Y=f(x) |



وهي صيغه أشباه المنحرفات.

تقدير الخطأ المرتكب بطريقه أشباه المنحرفات:

وجدنا أن الخطأ في الخطوة الواحدة هو



إذن الخطأ من أجل خطوة (فترة جزئية)هو



ولكن n h=b-a و منه فإن الخطأ المرتكب بطريقة أشباه المنحرفات يعطى بالعلاقة

التالية:



مثال(6-1):

احسب التكامل  بطريقة أشباه المنحرفات حيث n=4 ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

نوجد طول الخطوة الواحدة(طول المجال الجزئي)



ومنه

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0.75 | 0.5 | 0.25 | 0 | X |
| 0.5 | 0.64 | 0.8 | 0.94 | 1 | Y=f(x) |





ومنه



مثال(6-2):

احسب التكامل حيث h=0.1 ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | X |
| 2.7183 | 2.2136 | 1.7804 | 1.4096 | 1.0933 | 0.8244 | Y=f(x) |



ومنه 

الخطأ المرتكب



ثانيا: طريقة سيمبسون:

تتلخص طريقة سيمبسون بتجزئة الفترة[a,b] إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية متساوية الطول عددها n

فيكون طول كل فترة جزئية



ولحساب التكامل  نبدأ بحساب التكامل من إلى  حيث



ونستبدل الدالة المتكاملة f(x) بحدودية نيوتن التقدمية من الدرجة الثانية الملازمة الدالة f(x)

فنجد:

ومنه

هي أكبر قيمة للمشتق في الفترة

الخطأ المرتكب هو

ملاحظة:

إذا كان عدد الفترات فردي فإننا نطبق طريقة سيمبسون على أكبر عدد زوجي في الفترات الجزئية ثم نطبق طريقة أشباه المنحرفات على الفترات الأخيرة.

مثال (5-6):

h =0.2 بطريقة سيمبسون , حيث احسب تكامل

الحل:

*نلاحظ أن عدد الفترات فردي*

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 |
| y =f(x) | 1.000 0.961 0.852 0.698 0.527 0.368 |

*بما أن عدد الفترات خمسة نطبق سيمبسون على أربع فترات جزئية ثم نطبق طريقة أشباه المنحرفات على الفترة الأخيرة كما يلي :*

. *بطريقة سيمبسون وبخطأ مطلق لا يتجاوز تطبيق: احسب التكامل*

الحل :

من أجل الخطأ المفروض نعلم أم الخطأ بطريقة سيمبسون يعطى بالعلاقة لنعين أولا

والمطلوب أن هذا الخطأ يحقق مايلي:

ومنه

𝑓

بالتعويض في (\*) نجد :

ومنه

*إلى فترتين متساويتين وبالتالي نقسم الفترة*

|  |  |
| --- | --- |
| x | 0 0.5 1 |
| y=f(x) | 1.000 1.1180 1.4142 |