طريقة نيوتن - رافسون [illegible]

نظرية : اذا كان $f(a)\cdot f(b)<0$ و كان
$f'(x)$ و $f''(x)$ لا يساويان الصفر
ويحافظان على اشارتيهما ضمن
المجال $[a,b]$ فمن التقريب الاول
$x_0\in[a,b]$ الذي يحقق المتباينة :

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$$

يمكن بطريقة نيوتن حساب الجذر
الوحيد ξ للمعادلة $f(x)=0$
ولأي دقة مطلوبة :

مثال: أوجد جذر المعادلة:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$

بطريقة تنصيف الفترة.

في المجال [2,3].

الحل:

$f(2) = -1 < 0$

$f(3) = 9 > 0$

نلاحظ أنه شرطها للنظرية

$f(2) \cdot f(3) = -9 < 0$

محقق. هذا يعني يوجد جذر ضمن الفترة [2,3]. لذلك سنعتبر المجال [2,3].

$f(2.1) = -0.459 < 0$

$f(2.2) = 0.168 > 0$

نلاحظ أنه $f(2.1) \cdot f(2.2) < 0$

هذا يعني ان الجذر موجود ضمن المجال

$[2.1, 2.2]$

$\forall x \in [2.1, 2.2] \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 > 0$

$\forall x \in [2.1, 2.2] \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 > 0$

نختار $x_0 = 2.2$ لأن

$f(2.2) \cdot f''(2.2) > 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.2 - \frac{0,168}{6.72} =$$

$x_1 = 2.175 \Rightarrow f(x_1) = 0,00286 > 0$

ومنه

$f(2.1) \cdot f(2.175) < 0$

$f(2.175) \cdot f''(2.175) > 0$ اذن

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.175 - \frac{0,00286}{6.4919}$$

$$x_2 = 2.17456$$

$$|x_2 - x_1| = |2.17456 - 2.175|$$

$$= 0,0004$$

ومنه فإن الجذر التقريبي للمعادلة

هو :

$$\xi = x_2 = 2.17456$$

٣- استخدام طريقة نيوتن - رافسون (العادية) في ايجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية:

يمكن استخدام طريقة نيوتن - رافسون العادية في ايجاد الجذور المختلفة للأعداد الحقيقية وذلك كما يلي:

اذا كان المطلوب هو تعيين الجذر البائي للعدد a، نفرض أن هذا الجذر هو x أي:

$$x=\sqrt[p]{a}=a^{\frac{1}{p}}\to x^{p}=a$$

$$f(x)=x^{p}-a=0 \Leftarrow x^{p}=a$$

$$f'(x)=px^{p-1}$$

بالتعويض في قانون نيوتن - رافسون:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x^p - a = 0$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p\, x_n^{p-1}}}$$

سنعتمد على هذه العلاقة بتقييم جذور أي عدد حقيقي .

مثال: باستخدام طريقة نيوتن رافسون أوجدي الجذر $\sqrt{11}$ مكتفية بثلاثة تقريبات x_1, x_2, x_3 .

$$a = 11 \quad , \quad p = 2$$

* نبدل في القانون نجد :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 11}{2 x_n^{2-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\cancel{2}}}{2\cancel{x_n}} + \frac{11}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{11}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{11}{2x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{11}{x_n}\right]} \quad (1)$$

العلاقة (1) تصلح لايجاد الجذر التربيعي

نعطي $n=0$ نجد : لأي عدد a بشرط

$11 \to a$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{11}{x_0}\right] \quad (2)$$

نختار هنا $\boxed{x_0 = 3}$

وهو أكبر عدد مربعه أقل من العدد

المراد ايجاد جذره

$$3^2 = 9 < 11$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{11}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{11}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\,\frac{20}{3} = \frac{10}{3} = 3.3333$$

باستخدام العلاقة (1) نجد: $n=1$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{11}{x_1}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + \frac{33}{10}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{199}{30}$$

$$x_2 = \frac{199}{60} = 3.3166 = 3.3166$$

ومن أجل $n=2$ نجد:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{11}{x_2}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{199}{60} + \frac{660}{199}\right) = 3.3166$$

وبالتالي فالجذر المطلوب هو:

$$r = \sqrt{11} = 3.3166$$

مثال: اوجدي القيمة التقريبية للجذر $\sqrt[5]{12}$ ، ابدئي $x_0 = 1.5$

الحل:

Let $x = \sqrt[5]{12} \Longrightarrow x^5 = 12$

$\boxed{\begin{matrix} p = 5 \\ a = 12 \end{matrix}}$

نشكل الدالة:

$$f(x) = x^5 - 12 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4$$

بالتبديل في قانون نيوتن-رافسون:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p\,x_n^{p-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 12}{5x_n^4}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\cancel{5}}}{5\cancel{x_n^4}} + \frac{12}{5x_n^4}$$

معلومة:
سالب . سالب = +

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{5} + \frac{12}{5x_n^4}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{5}\left(x_n - \frac{12}{x_n^4}\right) \quad (3)$$

نبدأ بإعطاء $n=0$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{5}\left(x_0 - \frac{12}{x_0^4}\right)$$

نبدل $x_0 = 1,5 \Leftarrow$ يعطينا

$$x_1 = 1,5 - \frac{1}{5}\left(1,5 - \frac{12}{(1,5)^4}\right)$$

$$x_1 = 1,6741$$

لإيجاد x_2 نستخدم (3) بجعل:

~~x_2~~ for $n=1$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{5}\left(x_1 - \frac{12}{x_1^4}\right)$$

آخر حل وصلت له.

$$x_2 = 1,6741 - \frac{1}{5}\left(1,6741 - \frac{12}{(1,6741)^4}\right)$$

$$x_2 = 1.6448$$

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{5}\left(x_2 - \frac{12}{x_2^4}\right)$$

$$x_3 = 1.6448 - \frac{1}{5}\left[1{,}6448 - \frac{12}{(1{,}6448)^4}\right]$$

$$x_3 = 1{,}6438$$

نتائج مبدئي (3) نجد: $n=3$

$$x_4 = x_3 - \frac{1}{5}\left(x_3 - \frac{12}{x_3^4}\right)$$

$$x_4 = 1.6438$$

نلاحظ $x_3 = x_4$

لو تابعنا العمل سنحصل على نفس النتيجة اذن الجذر المطلوب هو :

$$z = \sqrt[5]{12} = 1{,}6438$$

ملاحظة: من الممكن ان نحول القانون الناتج لايجاد الجذور كالتالي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{p}\left[\frac{x_n^p - a}{x_n^{p-1}}\right]$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{p}\left[\frac{x_n^{p-1} \cdot x_n^1}{x_n^{p-1}} - \frac{a}{x_n^{p-1}}\right]$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{p}\left[x_n - \frac{a}{x_n^{p-1}}\right] \quad (4)$$

الرقم المطلوب جذره

اوجد الجذر الباقي مباشرة

وهي الصيغة (القانون) المعدلة للجذور ويجوز استخدامها.